QUANTITATIVE METHODS
(DEC05)
(M.A. ECONOMICS)

ACHARYA NAGARJUNA UNIVERSITY

CENTRE FOR DISTANCE EDUCATION

NAGARJUNA NAGAR,

GUNTUR

ANDHRA PRADESH

పాఠం 1 ప్రమేయాలు (Concept of Functions)

ఉద్దేశ్యం

ఈ పాఠ్యభాగం చదివిన తరువాత మీరు ఈ క్రింది అంశాలను తెలుసుకోగలరు.

* ప్రవేయం దాని అర్థం
* పలు రకాల ప్రమేయాలు
* ప్రమేయాలను రేఖా చిత్రాల ద్వారా సూచించటం
* ప్రమేయాల సమీకరణాలు సాధించటం
* అర్థశాస్త్రంలో ప్రమేయాల ప్రాముఖ్యత.

పాఠ్య నిర్మాణ క్రమం

* **రాబడి ప్రమేయం**
* **వ్యయ ప్రమేయం**
* **ఉత్పత్తి ప్రమేయం**

1.1 పరిచయం:

ప్రస్తుతం ఉన్న పోటీ వాతావరణంలో 'తంబ్ రూల్స్'నుపయోగించి నిర్ణయాలు తీసుకోవడం అంత ఆచరణ యోగ్యం కాదు. సంకేతాలను, శాస్త్రీయ పద్ధతులనుపయోగించి వీలయినంత మేరకు ఖచ్చితమైన నిర్ణయాలు తీసుకోవాల్సిన అవసరం ఎంతైనా వుంది. ఒక్కొక్కసారి ఎక్కువ సంఖ్యలో అర్థ చలరాశులు (Economic Variable) ఇమిడి ఉండే సంక్లిష్ట పరిస్థితిలో అశాస్త్రీయ పద్దతుల ద్వారా నిర్ణయాలు తీసుకోవడం చాలా కష్టం. కాబట్టి అర్థశాస్త్రంలోని అనేక భావనలకు మనం సంకేతాలు ఉపయోగించి, వాటి మధ్య ఖచ్చితమైన సంబంధాన్ని నిర్వచించవచ్చు. కావున ఎక్కువ చలరాశులు వున్నప్పుడు గణిత శాస్త్రానుపయోగించి అర్థ చలరాశుల మధ్య ఖచ్చితమైన సంబందాలు సమీకరణము ద్వారా తెలియబరచి గణిత శాస్త్రంలోని వివిధ పద్దతులనుపయోగించి వాస్తవానికి దగ్గరగా ఉండే ఖచ్చితమైన నిర్ణయాలు తీసుకోవచ్చు. ఇలా ఆర్థిక చలరాసుల మధ్య సంబంధాలను సూచించే సమీకరణాలను మోడల్ అని కూడా అంటాము. ఈ సందర్భంలో కొన్ని పదాలు నిర్వచిద్దాం.

1. చలరాశి: దేని పరిమాణం లేక విలువ మారుతూ ఉంటుందో లేక మారుతున్న విలువలను గ్రహిస్తుందో (assume) దానిని చలరాశి (Variable) అంటాము. అర్థశాస్త్రంలో ధర, లాభం, వ్యయం మొ॥వి చలరాశులౌతాయి. చలరాశులను x, y, z .... అనే ఆంగ్ల అక్షరాలతో సూచిస్తాము. కాని ఎక్కువ సార్లు అ చలరాసి పేరులోని మొదటి అక్షరాన్నే దానికి సంకేతంగా వాడతాము. ఉదాహరణకు ధరకు (Price) సంకేతం 'P', ఆదాయం (Income) సంకేతం 'I', పొదుపు (Savings)కు సంకేతం 'S'.

ఒక చలరాశి ఒక ప్రత్యేకమైన విలువను గ్రహిస్తే ఉదాహరణకు ఒక వస్తువు ధర రూ॥ 5/-లు అయితే, దానిని సంకేతాలుపయోగించి $P = 5$ అని వ్రాస్తాము.

చల రాశులు రెండు రకాలు. విచ్ఛిన్న చలరాశి, అవిచ్ఛిన్న చలరాశి. విచ్ఛిన్న చలరాశి విచ్ఛిన్న విలువలను మాత్రమే గ్రహిస్తుంది. ఉదాహరణకు ఒక కుటుంబములోని పిల్లల సంఖ్య, విశ్వ విద్యాలయానికి అనుబందింపబడిన కళాశాలల సంఖ్య మొ॥వి. విచ్ఛిన్న విలువలు. రెండు అవధుల మధ్య ఉన్న ఏ విలువనైనా గ్రహించే చలరాశిని అవిచ్ఛిన్న చలరాశి అంటారు. ఉదాహరణకు ఒక వ్యక్తి పొడవు, ఉష్ణోగ్రత మొ॥వి.

2. స్థిరరాశి: ఏదేని ఒకదాని విలువ లేక పరిమాణం ఒక సమస్యలో కాని లేక ఒక పరిస్థితిలో కాని స్థిరంగా ఉంటే దానిని స్థిరరాశి (Constant) అంటారు. ఉదాహరణకు ఒక వృత్తము యొక్క చుట్టుకొలత సూత్రం $2\pi r$. ఈ సూత్రంలో 2π స్థిరరాశి. 'r' విలువ మాత్రమే మారుతుంది. అన్ని సమస్యలకు, అన్ని పరిస్థితులకు ఒక్కొక్కసారి స్థిరరాశి ఒకే విలువను కలిగి ఉండాలనే నియమం లేదు. పరిస్థితులలో వచ్చే మార్పును బట్టి స్థిరరాశి విలువలో కూడా మార్పులు వస్తాయి. స్థిరరాశులను a, b, c అనే ఆంగ్ల అక్షరాలలో సూచిస్తాము.

1.2 ప్రమేయము (Function):

మనకు డిమాండ్ న్యాయం గురించి తెలుసు, వస్తువు ధర పెరిగితే దాని డిమాండ్ తగ్గుతుందని, ధర తగ్గితే దాని డిమాండ్ పెరుగుతుందని. అనగా డిమాండ్ న్యాయం వస్తువు యొక్క ధరకు, డిమాండ్‌కు మధ్య గల సంబంధాన్ని తెలియపరుస్తుందన్న మాట దీనినే సంకేతాలుపయోగించి గణిత శాస్త్ర ప్రకారం

D = f (P) గా వ్రాయవచ్చు ------------------------(1)

ఇక్కడ 'D' అనగా డిమాండని, P అనగా ధర అని అర్థం. f ప్రమేయమవుతుంది. దీనిని డిమాండ్ ధర యొక్క ప్రమేయమని చదువుతాం.

(1)లో D, f మరియు P యొక్క లబ్దం కాదు. ' f ' Dకి Pకి మధ్య గల గణాత్మక సంబంధాన్ని మాత్రమే తెలియజేస్తుంది. దీనినే మనం డిమాండ్ ప్రమేయం అంటాం.

కాని ఖచ్చితమైన నిర్ణయాలు తీసుకోవటానికి ఇటువంటి సందిగ్ధ మరియు అనిర్దిష్ట (general) సంబంధం ఉపయోగపడదు. నిర్దిష్టమైన అసందిగ్ధమైన సంబందాన్ని తెలియజేసే ప్రమేయం కావాలి. ఉదా. 'x' అనే వస్తువు యొక్క డిమాండ్ ప్రమేయం.

D = 10 - 3P ---------------------(2)

పైన ఇచ్చిన సంబంధాన్నువయోగించి యిచ్చిన P యొక్క ఏ విలువనైననూ Dని కనుగొనవచ్చు. అంటే D యొక్క విలువలు P యొక్క విలువల పై ఆధారపడి ఉంటుంది. అందుకని D ని అస్వతంత్ర చలరాశని (Dependent Variable), P ని స్వతంత్ర చలరాశని (Indipendent Variable) అంటారు. దీనిని బట్టి ప్రమేయాన్ని చలరాశుల మధ్య సంబందాన్ని సూచించే నియమంగా కూడా పరిగణించవచ్చు. ఒక ప్రమేయంలో స్వతంత్ర చలరాశికి ఇచ్చిన విలువలచే ఏర్పడే సమితి (Set)ని ప్రదేశం (Domain) అని, వీటికి అనుగుణంగా అస్వతంత్ర చలరాశి యొక్క విలువలతో ఏర్పడే సమితిని రేంజ్ (Range) అని అంటారు.

1.3 ప్రమేయాలలోని రకాలు (Types of Functions):

1. ఏక చలరాశి ప్రమేయం: ఒక ప్రమేయంలోని అస్వతంత్ర చలరాశి విలువలు ఒకే ఒక్క స్వతంత్ర చలరాశి పై ఆధారపడి ఉంటే దానిని ఏక-చలరాశి ప్రమేయం అంటాం (Single Varibale function).

ఉదా - D = f (P) ఇక్కడ 'D' విలువలు ఒక్క 'P' విలువల మీద మాత్రమే ఆధారపడి ఉంటాయి.

2. ద్వి చలరాశి ప్రమేయం (Two Variable Function): ఒక ప్రమేయంలో అస్వతంత్ర చలరాశి విలువలు, రెండు స్వతంత్ర చలరాశి వులవల పై ఆధారపడి వుండే దానిని ద్వి - చలరాశి ప్రమేయం అంటాం.

ఉదా: లాభం ప్రమేయం (Profit Function)

$\pi = TR - TC = f(R, C)$ రాబడి మీద మరియు వ్యయం మీద ఆధారపడి ఉంటుంది.

3. బహు చలరాశి ప్రమేయం(Maltiple Variable Function): అస్వతంత్ర చలరాశి యొక్క విలువ, అనేక స్వతంత్ర చలరాశుల విలువల పై ఆధారపడి ఉంటే, అటువంటి ప్రమేయాన్ని బహుచలరాశి ప్రమేయం అంటారు.

ఉదా - వస్తువు యొక్క డిమాండు ఆ వస్తువు ధర మీదే కాక, వినియోగదారుని ఆదాయం మీద, అతని అభిరుచి మొ॥ వాటి మీద ఆధారపడి వుంటుందని మనకు తెలుసు.

D = f (P, I, T,..............) బహుచలరాశి ప్రమేయం

4. సందిగ్ధ ప్రమేయం (Implicit Function): x, y అనే రెండు చలరాశులు ఒక దానిపై మరొకటి ఆధారపడి ఉండి f (c, y) = 0 అనే సంబంధాన్ని కలిగి వుంటే దానిని సందిగ్ధ ప్రమేయం అని అంటాము. అలాకాకా Y = f (x) అనే ఒక నిర్దిష్టమైన సంబందాన్ని కలిగి ఉంటే దానిని అసందిగ్ధ ప్రమేయం (Explicit Function) అంటారు.

5. స్థిర ప్రమేయం (Constant Function): ఒక ప్రమేయంలో స్వతంత్ర చలరాశి యొక్క ఏ విలువకైనా అస్వతంత్ర చలరాశి ఒకే స్థిరమైన విలువను గ్రహిస్తుంటే దానిని స్థిర ప్రమేయం అంటాం.

ఉదా - f (x) = 4 ఇక్కడ x = 1 అయినా, x = 2 అయినా, f (x) యొక్క విలువ 4. ఇది మాత్రం స్థిరం.

6. ఏకదిష్ట ఆరోహణ ప్రమేయం (Monotomically Increasing Funtion): f ఒక ప్రమేయం అయివుండి, x_1, x_2 లు స్వతంత్ర చలరాశి యొక్క రెండు వేర్వేరు విలువలై మరియు $x_1 > x_2$ అయినప్పుడు, $f(x_1) \geq f(x_2)$ అయిన, f ని ఏకదిష్ట ఆరోహణ ప్రమేయం అంటాం. ఒక వేళ $f(x_1) > f(x_2)$ అయితే ' f ' ని ఖచ్చితమైన ఏకదిష్ట ఆరోహణా ప్రమేయం అంటాం.

7. ఏకదిష్ట అవరోహణ ప్రమేయం: f ఒక ప్రమేయం అయివుండి, x_1, x_2 లు స్వతంత్ర చలరాశి యొక్క రెండు వేర్వేరు విలువలై, $x_1 > x_2$ అయినపుడు $f(x_1) \leq f(x_2)$ అయితే, ' f ' ఏకదిష్ట అవరోహణా ప్రమేయం అంటాము. ఒక వేళ $f(x_1) < f(x_2)$ కనుక అయితే ' f 'ను ఖచ్చితమైన ఏకదిష్ట అవరోహణా ప్రమేయం అని అంటాము.

ఉదా: $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)$, x సహజ సంఖ్య. ఈ ప్రమేయం ఏకదిష్ట అరోహణా ప్రమేయం.

$f(x) = \frac{1}{x}, x > o$ ఈ ప్రమేయం ఏకదిష్ట అవరోహణా ప్రమేయం.

8. ఏకఘాత ప్రమేయం (Linear Function): ఒక ప్రమేయంలోని స్వతంత్ర చలరాశి యొక్క ఘాతం ఒకటి అయితే దానిని ఏక ఘాత ప్రమేయం అంటాము. ఉదాహరణకు f (x) = a + bx ఏక ఘాత ప్రమేయం. ఇందులో ' x ' స్వతంత్ర చలరాశి. దీని యొక్క ఘాతం (Power) ఒకటి.

ఉదా: y = 5 + 3x (ఏక ఘాత, ఏక చలరాశి ప్రమేయము)

9. (Non-Linear Function): ఒక ప్రమేయంలోని స్వతంత్ర చలరాశి యొక్క ఘాతం ఒకటి కన్నా ఎక్కువ అయిన దానిని ప్రమేయం అంటాము.

ఉదా: $y = 6 + 5x + 5x^2$

ఇందులో 'x' అనే స్వతంత్ర చలరాశి యొక్క ఘాతం '2' అందుచే దీనిని ప్రమేయం అని అంటారు.

10. బహుపది ప్రమేయం (Polynorrial Function): ఈ క్రింది రూపంలో ఉన్న ప్రమేయాన్ని బహుపది అంటాం.

$y = f(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + a_3x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_nx + a_{n+1}$

ఈ ప్రమేయంలో $a_1, a_2 \ldots\ldots\ldots\ldots a_{n+1}$ స్థిర సంఖ్యలు మరియు x ఒక సహజ సంఖ్య.

ఒక బహుపదిలో n = 1 అయితే అది ఏకఘాత ప్రమేయం అవుతుంది. n = 2 అయినట్లయితే అది వర్గ ప్రమేయం అవుతుంది.

ఉదా - $y = a + a_1x$ ఒక ఏకఘాత ప్రమేయం

$y = a + a_1x^2$ ఒక వర్గ ప్రమేయం

11. ఘాత ప్రమేయం (Exponential Function): ఒక ప్రమేయంలో స్వతంత్ర చలరాశి ఘాతంగా వుంటే దానిని ఘాతప్రమేయం అంటారు. ఘాత ప్రమేయాలు ఈ కింద చూపిన విధంగా ఉంటాయి.

1. $y = a^x$ a ధన వాస్తవ సంఖ్య మరియు $a \pm 1$. ఇక్కడ x, 'a' కు ఘాతంగా వ్రాయబడింది కావున ఇది ఘాత ప్రమేయం అంటారు. ఘాత ప్రమేయం యొక్క మరికొన్ని రూపాలు.

$$y = f(x) = Ca^x \quad a \neq 1$$
$$y = f(x) = Ca^{bx} \quad a \neq 1$$
$$y = f(x) = Ce^x$$

a, b, c and e లు స్థిరరాశులు. మరియు 'a' పైన చెప్పిన విధంగా ధన వాస్తవ సంఖ్య. ఘాత ప్రమేయాన్ని ముఖ్యంగా అస్వతంత్ర చలరాశిలోని వేగ పూరితమైన (Sharp) మార్పులు సూచించటానికి ఉపయోగిస్తారు.

12. సంవర్గమాన ప్రమేయం (Logarthamic Function): ఒక సంవర్గమాన ప్రమేయాన్ని కింది విధంగా వ్రాస్తాము. **a** ఒక ధన వాస్తవ సంఖ్య అయివుండి మరియు ఒకటికి సమానం కాకుండా ఉండి $y = f(x) = \log_a^x$ ని సంవర్గమాన ప్రమేయం అంటాము. దీనిని y ఈక్వల్ టు లాగ్ x టు బేస్ a అని చదువుతాము.

$y = \log_a^x$ అనే సంవర్గ ప్రమేయాన్ని ఈ క్రింది విధంగా కూడా వ్రాయవచ్చు.

$$x = a^y.$$

గమనిక:- $y = a^x$ అనే ఘాత ప్రమేయం నుండి చలరాశులు తయారు చేయటం ద్వారా $x = \log_a^y$ అనే ఒక సంవర్గమాన ప్రమేయాన్ని వ్రాయవచ్చు.

కావున సంవర్గమాన ప్రమేయం ఘాత ప్రమేయానికి విలోమం అవుతుంది.

సంవర్గమాన ప్రమేయాలు రెండు విలువలు ఎక్కువగా ఆధారంగా కలిగి ఉంటాయి, ఒకటి "10" రెండవది $'e' \cong 2.7182$

10 ఆధారంగా కల్గిన సంవర్గమాన ప్రమేయాన్ని సామాన్య సంవర్గమానమని 'e' ఆధారంగా కలిగిన సంవర్గమాన ప్రమేయాన్ని సహజ సంవర్గమానమని పిలుస్తాము.

ఉదా: $y = \log_{10}^x$ సామాన్య సంవర్గమానం

$y = \log_e^x$ సహజ సంవర్గమానం

సంవర్గమాన ప్రమేయాల ధర్మాలు: $y = \log_e^x$ ఒక సంవర్గమాన ప్రమేయం అయితే దాని కొన్ని ముఖ్యమైన ధర్మాలు ఈ కింది విధంగా ఉంటాయి.

1. $\log 1 = 0$
2. $\log e = 1$

x, y లు రెండు చలరాశులు అయితే

3. $\log (xy) = \log x + \log y$

4. $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$

5. $\log (x)^n = n \log x$

6. $\log_e^{10} = \frac{1}{\log_{10}^e}$

7. $\log_e^x = \left(\log_e^{10}\right)\log\left(\log_{10}^x\right)$

8. శూన్యానికి మరియు ఋణాత్మక విలువలకు సంవర్గమాన ప్రమేయం నిర్వచించబడలేదు.

13. అకరణీయ ప్రమేయం (Rational Function): f (x) మరియు g (x) లు రెండు బహుపద ప్రమేయాలయివుండి మరియు $g(x) \neq 0$ అయితే ఈ ప్రమేయాల ద్వారా ఏర్పడే

$y = \frac{f(x)}{g(x)}$ అనే ప్రమేయాన్ని అకరణీయ ప్రమేయం అంటారు.

ఉదా: $y = \frac{2x}{3+5x^2}$ ఒక అకరణీయ ప్రమేయం.

14. అవర్తిత ప్రమేయం (Perodic Function): x చలరాశి యొక్క ప్రతి విలువకూ f (x) అనే ప్రమేయం f (x + P) కి సమానం అవుతుంటే దానిఇన అనువర్తిత ప్రమేయం అంటాము. ఇక్కడ P, f (x) యొక్క అవర్తనమౌతుంది.

15. సమఘాత ప్రమేయం (Homogeniaes Function): z = f (x, y), x, y లలో n వ తరగతి ప్రమేయం అయితే

$f(kx, ky) = k^n f(x, y)$ అయితే z ను 'n'వ తరగతి సమఘాత ప్రమేయం అంటారు.

ఉదా: $x^2 + 2xy + y^2$ రెండవ తరగతి సమ ఘాత సమీకరణము ఎందుకనగా

$$\begin{aligned} f(kx, ky) &= (kx)^2 + 2(kx)(ky) + (ky)^2 \\ &= k^2x^2 + 2k^2xy + ky^2 \\ &= k^2(x^2 + 2xy + y^2) \\ &= k^2(f(x)) \end{aligned}$$

16. విలోమ ప్రమేయం (Inverse Function): y = f (x) అయితే, ఇచ్చిన x యొక్క విలువకు ఒకే ఒక్క y విలువ నిర్వచించబడుతుంది. కొన్ని సందర్భాలలో ఇచ్చిన ప్రతి y విలువకు దానిని $x = f^{-1}(y)$ అని వ్రాయవచ్చు. దీనినే విలోమ ప్రమేయమని అంటారు.

ఉదా: y = ax + b అయితే

x విలువ y లో వ్రాయగా

$x = \frac{y-b}{a}$ అవుతుంది.

$= \frac{y}{a} - \frac{b}{a}$

$Ky + S$

$k = \frac{1}{a}\ S = -\frac{b}{a}$ అవుతాయి.

ఇప్పుడు $\underline{x = f(y)}$ ఇది పైన ఇవ్వబడిన ప్రమేయానికి విలోమ ప్రమేయం అవుతుంది.

1.4 ప్రమేయాలను రేఖా చిత్రాల ద్వారా తెలియజేయుట:

ఇచ్చిన ఒక ప్రమేయాన్ని రేఖా చిత్రం ద్వారా చూపటాన్ని ఈ విభాగంలో నేర్చుకుంటాము.

$y = f(x)$ ఒక ప్రమేయం అయిన x చలరాశికి వేర్వేరు విలువలు ఆపాదించి దానికి అణుగుణమైన y విలువలు లెక్కించి, x విలువ దానికి అణుగుణమైన y విలువను బిందు నిరూపకాలుగా తీసుకొని రేఖా చిత్రము గీస్తాము. దీనినే ప్రమేయం యొక్క రేఖా చిత్రం అంటాము.

ఉదాహరణకు $y = f(x)$ ప్రమేయంలో $x_1, x_2..............x_n$ లు x యొక్క n విలువలు అయితే, ఈ విలువలకు అనుగుణంగా y యొక్క విలువలు

$y_1 = f(x_1)$, $Y_2 = f(x_2)$ .... $y_n = f(x^n n)$ అవుతాయి. ఇప్పుడు (x_1, y_1) (x_2, y_2)............(x_n, y_n) లు ప్రమేయాన్ని రేఖా చిత్రంగా గీయటానికి బిందు నిరూపకాలౌతాయి. ఇప్పుడు x - అక్షము మీద x -విలువలు, Y అక్షం మీద Y విలువలు సూచిస్తూ పై బిందువులను ఒక గ్రాఫ్ మీద సూచించి ఆ బిందువులను కలపగా ఏర్పడే రేఖా చిత్రమే ప్రమేయం యొక్క రేఖా చిత్రమౌతుంది.

ఉదా - $y = 2 + 3x$ యొక్క రేఖా చిత్రాన్ని గీయండి.

సాధన: ముందుగా x కు కొన్ని విలువలు ఇవ్వండి. అవి 0, 1, 2, 3, 4 .... అనుకుందాం. ఇప్పుడు పైన ఇవ్వబడిన ప్రమేయాలలో x విలువలు వ్రాయగా తదనుగుణమైన y విలువలు వస్తాయి.

x = **0** అయితే y = 2 + 3 X 0 = 2

x = **1** అయితే y = 2 + 3 X 1 = 5

x = **2** అయితే y = 2 + 3 X 2 = 8

x = **3** అయితే y = 2 + 3 X 3 = 11

x = **4** అయితే y = 2 + 3 X 4 = 14

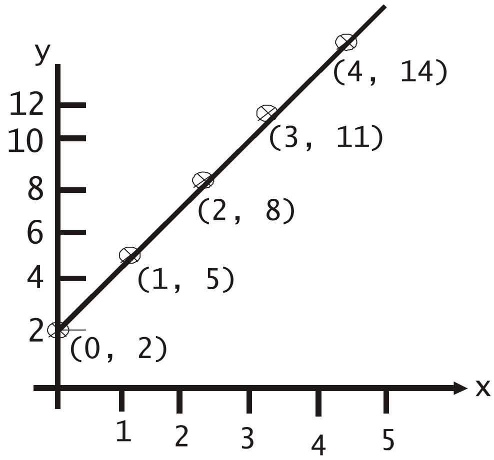
....

....

ఈ విలువలను పట్టిక రూపంలో చూపగా

x	0	1	2	3	4	....
$y = f(x)$	2	5	8	11	14	.....

ఒక గ్రాఫ్ పేపరు తీసుకొని దాని పై x- అక్షం మీద x విలువలు y - అక్షం మీద Y విలువలు తీసుకొనండి.



పైన చూపిన విధంగా బిందువులు గుర్తించి వాటిని కలపగా $y = 2 + 3x$ యొక్కరేఖా చిత్రం వస్తుంది.

ఉదా - $y = ka^x$ యొక్క రాఖా చిత్రం

$a > 1,\ k > 0$ అయినట్లయితే Fig(1) లో చూపిన విధంగా ఉంటుంది.

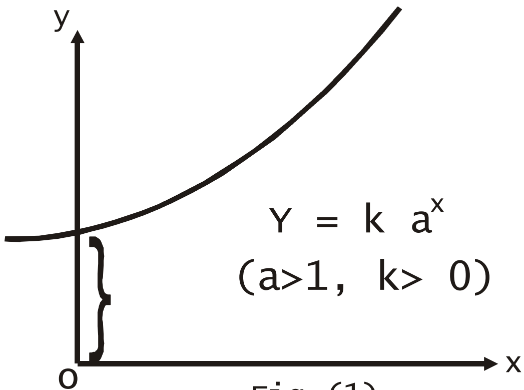


Fig (1)

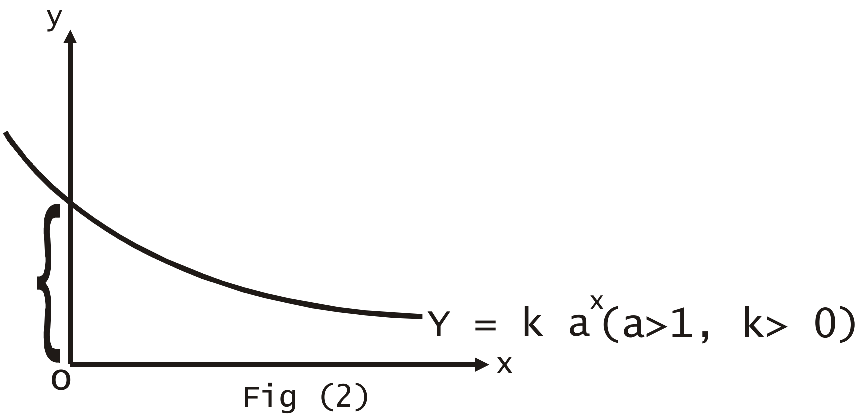
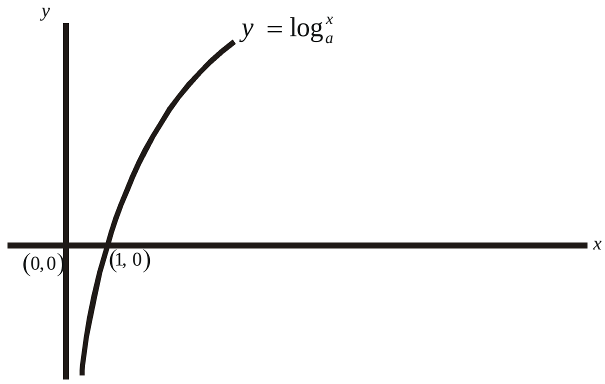


Fig (2)

ఉదా: సంవర్గ ప్రమేయం రేఖా చిత్రం: $y = f(x) = \log_e^x$ యొక్క రేఖా చిత్రం ఈ క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

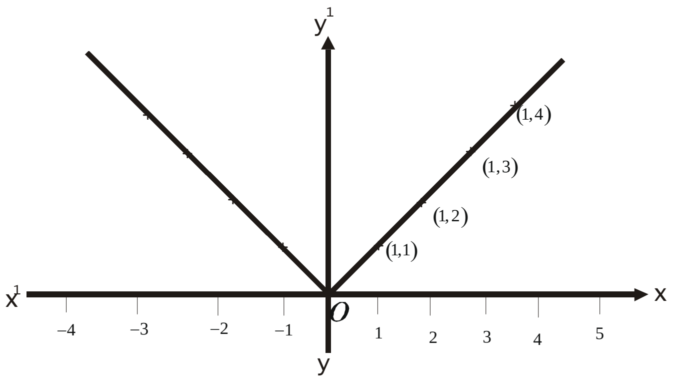


ఉదా: $y = |x|$ **అనే ప్రమేయం యొక్క రేఖా చిత్రాన్ని గీయండి.**

సాధన: y = 1 x 1 ప్రమేయంలో x కు వేర్వేరు విలువలుయిస్తూ y యొక్క విలువలు కనుగొనవచ్చు.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	---
y = 1 x 1	4	+3	2	1	0	1	2	3	4	---

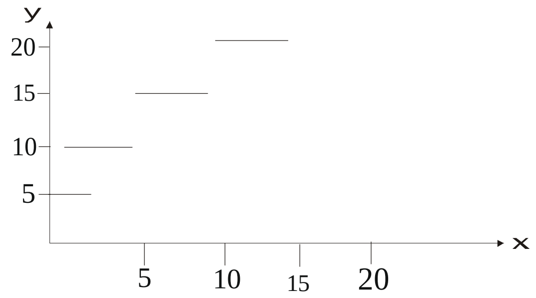
పై పట్టికలోని విలువలు గ్రాఫ్ పేపరు మీద గుర్తించగా



ఉదా: ఈ క్రింది యివ్వబడిన ప్రమేయాన్ని రేఖా చిత్రం ద్వారా చూపండి.

$$y = f(x) = \begin{cases} 10 \text{ if } 0 \le x \le 10 \\ 15 \text{if } 10 \le x \le 15 \\ 20 \text{if} 15 \le x \le 20 \end{cases}$$

సాధన: పైన యిచ్చిన ప్రమేయం ప్రకారం x విలువ 0 కి మరియు 10 కన్నా తక్కువ ఉన్నప్పుడు y విలువ 10 వద్ద స్థిరంగా ఉంది. అలాగే x విలువ 10 మరియు 15 కు మధ్య ఏ విలువ తీసుకున్నను y విలువ 15 గా ఉంది. ఇటువంటి ప్రమేయాన్ని సోపాన ప్రమేయం అంటారు. (Step Function) దీనిని గ్రాఫ్ పేపరు పై గీయగా.

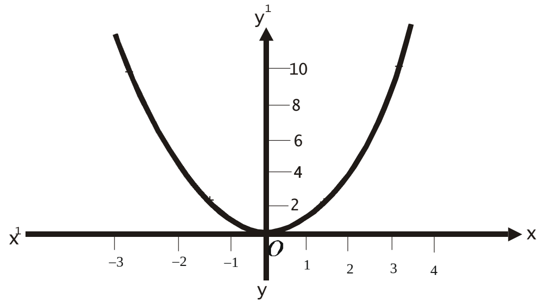


ఉదా: $y = 2x^2$ **అనే ప్రమేయాన్ని రేఖా చిత్రం ద్వారా చూపండి.**

సాధన: x విలువలు తదనుగుణంగా వచ్చే y విలువలు క్రింది పట్టికలో చూపబడినవి.

x	-2	-1	0	1	2	......
$y = 4x^2$	8	2	0	2	8	....

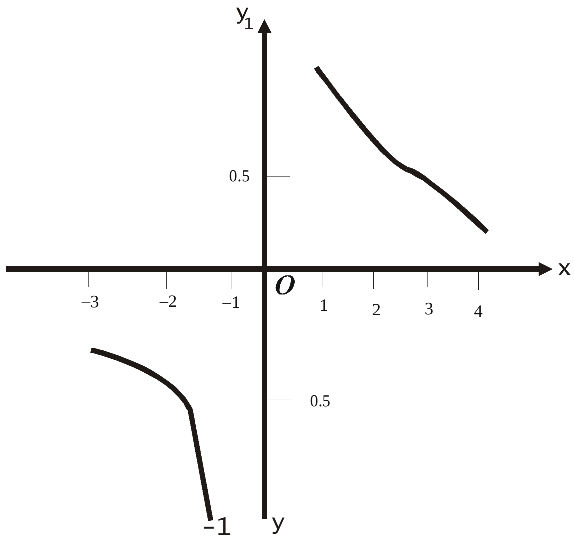
x విలువ x - అక్షం పై, y విలువ y అక్షం పై గుర్తించగా



ఉదా: $y = \frac{1}{x}(x \neq 0)$ **అనే ప్రమేయాన్ని రేఖా చిత్రం ద్వారా చూపండి.**

సాధన: ఈ ప్రమేయం x = 0 వద్ద నిర్వచించబడలేదు.

x	-3	-2	-1	1	2	3	-----
y = 1/x	-0.33	-0.5	-1	1	0.5	0.33	-----



1.5 అర్థశాస్త్రంలో ప్రమేయాలు:

మనం మొదట్లో చెప్పుకున్న విధంగా అర్థశాస్త్రంలో కొన్ని చలరాశులను పరిమాణాత్మకంగా చూపవచ్చు. ఉదా - ధరలు, వడ్డీరేట్లు ఆదాయం పరిమాణం మొ॥. అర్థశాస్త్రంలో ఇటువంటి కొన్ని చలరాశుల మధ్య గణిత శాస్త్ర పద్ధతిలో ప్రమేయాలుగా చూపవచ్చు. ఉదాహరణకు డిమాండ్ ప్రమేయం (Demand Function), సప్లయి ప్రమేయం (Supply function), రాబడి ప్రమేయం (Revenue Function), వ్యయ ప్రమేయం (Cost Function), ఉత్పత్తి ప్రమేయం (Production Function) మొ॥వి.

డిమాండ్ ప్రమేయం: పరిపూర్ణ పోటీ మార్కెట్‌లో (Perfect Competition) ఒక వస్తువు యొక్క డిమాండ్ అనేక అంశాల పై ఆధారపడి ఉంటుంది. విశ్లేషణను సులభతరం చేయటానికి ఈ కింది అంశాలు స్థిరంగా ఉంటాయి అనుకొందాం. అవి

1. వినియోగదారుల సంఖ్య
2. వినియోగదారుని ఆసక్తి
3. వినియోగదారుని ఆదాయం
4. మిగిలిన వస్తువుల ధరలు

ఇటువంటి సందర్భాలలో వస్తువు యొక్క డిమాండ్ ఆ వస్తువు యొక్క ధర పైన మాత్రమే ఆధారపడి ఉంటుంది. దాని ధర మారినప్పుడు డిమాండ్ కూడా మారుతూ ఉంటుంది. కాబట్టి ఒక వస్తువు యొక్క ధరకు, దాని డిమాండ్‌కు సంబంధం ఉందన్నమాట. సంకేతాలునుపయోగించి గణిత శాస్త్ర పద్ధతిలో ఈ రెండింటి మధ్య సంబంధాన్ని ఈ విధంగా వ్రాయవచ్చు.

p ధర, q డిమాండ్ అయితే $q = f(p)$ దీనినే డిమాండ్ ప్రమేయం అంటారు.

ఇందులో q అస్వతంత్ర చలరాశి (Dependent Variatle), P స్వతంత్ర చలరాశి (Independent Variable). అర్థశాస్త్ర నియమాల ననుసరించి ఒక సహజ వస్తువు (Normal Good) యొక్క ధర (P) పెంచినప్పుడు దాని డిమాండ్ (q) తరుగుతుంది. ధర తగ్గినపుడు డిమాండ్ (q) పెరుగుతుంది.

ఉదా: ఒక వస్తువు డిమాండ్ ప్రమేయం

$q = 120 - 3p$ అయిన $p = 1$, $P = 2$, $p = 3$ వద్ద ఆ వస్తువు డిమాండ్ కనుగొనుము, దానిని రేఖా చిత్రం ద్వారా చూపండి.

సాధన: ఇచ్చిన డిమాండ్ ప్రమేయం $q = 120 - 3p$ లో యిచ్చిన p విలువలు ప్రతిక్షేపించగా దాని కనుగుణమైన డిమాండ్ విలువలు

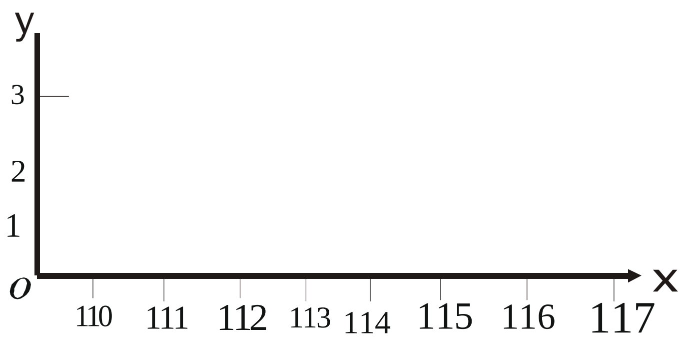
వస్తాయి.

p = 1 అయితే q = 120 - 3 x 1 = 117

p = 2 అయితే q = 120 - 3 x 2 = 114

p = 3 అయితే q = 120 - 3 x 3 = 111

డిమాండ్ ప్రమేయాన్ని రేఖాచిత్రం ద్వారా తెలియజేయటానికి గ్రాఫ్ పేపర్ పై Y- అక్షము మీద p ని, x - అక్షం మీద q ని సామాన్యంగా కొలుస్తుంటాము. P విలువ దానికనుగుణమైన q విలువలను ఒక బిందువు యొక్క విరూపాలుగా స్వీకరిస్తూ డిమాండ్ ప్రమేయాన్ని రేఖా చిత్రం ద్వారా చూపవచ్చు.



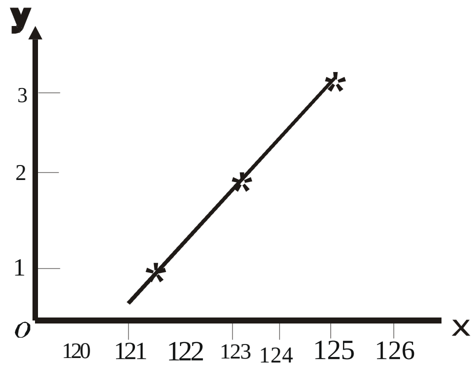
సప్లయ్ ప్రమేయం: ఒక నిర్ణీత ధర వద్ద, ఒక నిర్ణీత కాలం వద్ద ఒక విక్రయదారుడు అమ్మకం కోసం సిద్ధం చేసిన వస్తువు యొక్క పరిమాణంను ఆ ధర వద్ద వస్తువు యొక్క సప్లయి అంటాము. ఒక వస్తువు యొక్క సప్లయి, ఆ వస్తువు యొక్క ధర, సప్లయి చేసే సంస్థ లక్ష్యాలు, సాంకేతిక పరిజ్ఞానం, ఉత్పత్తి సాధనాల ధరలు, మీకూ వస్తువుల ధరల మీద ఆధారపడి ఉంటుంది. విశ్లేషించటానికి అనువుగా ఆ వస్తువు ధర తప్ప మిగతావన్ని స్థిరంగా వున్నాయని భావిస్తాం. ఒక వస్తువు యొక్క సప్లయ్ పరిమాణమును s తోను, దాని ధరను p తో సూచిస్తే ఆ వస్తువు సప్లయికి ధరకు గల మధ్య సంబంధ ప్రమేయాన్ని s = f (p) చే సూచిస్తాము. దీనిని సప్లయి ప్రమేయం అంటారు. సాధారణంగా ఒక సహజ వస్తువు యొక్క సప్లయి ఆ వస్తువు ధర పెరిగితే పెరుగుతుందని తగ్గితే తగ్గుతుందని భావిస్తారు. ఉదాహరణకు s = 120 + 2p ఒక సప్లయి ప్రమేయం అవుతుంది.

ఉదా: ఒక వస్తువు యొక్క సప్లయి ప్రమేయం s = 120 + 2p అయితే p=1, p=2, p=3 వద్ద సప్లయి పరిమాణం కనుక్కొని ఆ సప్లయి ప్రమేయానికి రేఖా చిత్రాన్ని గీయండి.

సాధన: ఇచ్చిన ధరల వద్ద సప్లయి విలువలు కనుక్కోటానికి ఈ క్రింది పట్టిక తయారు చేద్దాం.

ధర (p)	సప్లయి పరిమాణం
p = 1	120 + 2 x 1 = 122
2	120 + 2 x 2 = 124
3	120 + 2 x 3 = 126

పై పట్టిక ఆధారంగా రేఖా చిత్రాన్ని క్రింది విధంగా చేయవచ్చు.



రాబడి ప్రమేయం: ఒక వస్తువు యొక్క డిమాండ్ P అనే ధర వద్ద x కనుక అయితే R = P x ను ఆ ధర వద్ద రాబడి అంటాము. మనకు డిమాండ్ x. P యొక్క ప్రమేయం p = Q(x) అయితే రాబడి ప్రమేయానికి $R = X\varphi(x)$ అని కూడా వ్రాయవచ్చు. ఉదాహరణకు x = 120 - 2p డిమాండ్ ప్రమేయమైతే రాబడి ప్రమేయం R = P (120 - 2P) అవుతుంది. రాబడి ప్రమేయం లక్షణం డిమాండ్ పెరుగుతుంటే మొదట రాబడి పెరిగి, ఒక గరిష్ట విలువ చేరుకుని, అక్కడ నుండి డిమాండ్ పెరిగినా రాబడి తగ్గుతుంది.

వ్యయ ప్రమేయం: ఒక వస్తువును ఉత్పత్తి చేయటానికి ఒక ఉత్పత్తి సంస్థ కొన్ని ఉత్పత్తి కారకాలు ఉపయోగిస్తుందని మనకు తెలుసు. ఈ ఉత్పత్తి కారకాలలో కొన్నింటిని ఆ సంస్థ స్థిర పరిమాణంలో వాడుతున్నదనుకుంటే వాటి కయ్యే వ్యయం కూడా స్థిరంగా ఉంటుంది. దీనినే స్థిర వ్యయం అంటారు. మిగిలిన ఉత్పత్తి కారకాలను విచలిత పరిమాణాలలో వినియోగిస్తుందని అనుకుంటే ఈ విచలిత ఉత్పత్తి కారకాలకయ్యే వ్యయాన్ని విచలిత వ్యయం(Variable Cost) అంటాము. ఉత్పత్తి చేసే సాంకేతిక పరిజ్ఞానం స్థిరంగా ఉంది అనుకుంటే ఆ సంస్థ x అనే ఉత్పత్తిని పొందటానికి వీలయినంత తక్కువ వ్యయం అయ్యేలా ఈ విచలిత ఉత్పత్తి కారకాలు వాడుతుంది. కావున ఉత్పత్తి మారితే దానికయ్యే వ్యయం కూడా మారుతుంటుంది. అంటే ఉత్పత్తి వ్యయంకు ఉత్పత్తి పరిమాణానికి సంబంధముంటుంది. సంకేతాలలో

C = వ్యయం

X = ఉత్పత్తి పరిమాణం

C = A + f (x) అని వ్రాయవచ్చు.

ఈ ప్రమేయాన్ని వ్యయ ప్రమేయం అంటారు. ఇందులో C ని x ఉత్పత్తికయ్యే మొత్తం వ్యయం అంటాము.

f (x) విచలిత వ్యయం

A స్థిర వ్యయం అవుతాయి.

సాధారణంగా ఉత్పత్తి పెరుగుతూ ఉంటే వ్యయం కూడా పెరుగుతుంది.

ఉత్పత్తి ప్రమేయం: పైన చెప్పినట్లు ఒక సంస్థ ఒక వస్తువును ఉత్పత్తి చేయటానికి కొన్ని ఉత్పత్తి కారకాలు ఉపయోగిస్తుంది. ఉత్పత్తి కారకాలు విచలిత పరిమాణంలో పొందుతుంటే తదనుగుణంగా ఉత్పత్తి పరిమాణంలో కూడా మార్పులు వస్తూ ఉంటాయి. అనగా ఉత్పత్తి పరిమాణానికి ఉత్పత్తి కారకాల పరిమాణాలకు మధ్య సంబంధం వుందన్నమాట. ఈ సంబంధం మ్రేయాన్ని ఉత్పత్తి ప్రమేయం అంటారు. సాధారణంగా ఒక వస్తువు ఉత్పత్తిలో పెట్టుబడి (Capital) మరియు పనివారలు (Labour)లను ఉత్పత్తి కారకాలుగా పరిగణిస్తారు. ఉత్పత్తిని Qతో, పెట్టుబడిని Kతో, పనివారి సంఖ్య h తోనూ సూచిస్తే

Q = f (k, L) ను ఉత్పత్తి మ్రేయం అంటారు.

కాబ్ - డగ్లస్ ఉత్పత్తి ప్రమేయం (Cobb - Douglas Production Function**):** Z ఉత్పాదిత చలరాశి, K, Y లు ఉత్పాదకపు చలరాశులు అనుకుంటే పైన వివరించినట్లుగా Z = f (K, Y) ఒక ఉత్పత్తి ప్రమేయమవుతుంది. ఈ ఉత్పత్తి ప్రమేయాల్లో

$Z = A.K^{\alpha}L^{\beta}$ ను కాబ్ - డగ్లస్ ఉత్పత్తి ప్రమేయం అంటారు. ఇందులో α, β లు స్థిరరాశులు.

1.6 ప్రమేయాల సమీకరణాలు సాధించుట(Solutions of Functions):

Y = f (x) ఒక ప్రమేయం అయితే x చలరాసి యొక్క ఏ విలువకైతే f (x) శూన్యం (0) అవుతుందో ఆ x యొక్క విలువను f(x) కి మూలాలు అంటాం. ఉదాహరణకు Y = F (x) = ax + b అనే ఏక ఘాత ప్రమేయంలో $x = -\frac{b}{a}$ ప్రతిక్షేపించగా f (x) = ax + b ప్రమేయం సున్నాకి సమానం అవుతుంది. అందుచే $x = -\frac{b}{a}$ ని y = f (x) యొక్క మూలం అవుతుంది. అలాగే y = f (x) ఒక వర్గ ప్రమేయం అయితే అనగా $y = ax^2 + bx + c^1$ y యొక్క మూలకాలు తెలుసుకోటానికి $ax^2 + bx + c^1 = 0$ అనే సమీకరణాన్ని సాధించాలి. ఈ విభాగంలో ఏక ఘాత మరియు వర్గ సమీకరణములు సాధించే విధానాలు గురించి నేర్చుకుందాం.

1. సమకాలిక ఏక ఘాత సమీకరణములు (Sinear Simul Tenious Equations):

$\begin{bmatrix} a_{11}x + q_R y = b_1 \\ a_{24}x + a_{22}y = b_2 \end{bmatrix}$ $\begin{matrix} a_1 x_q + b_1 y = 1 \\ a_2 x + b_2 y = 2 \end{matrix}$ రూపంలో ఉంటే రెండు ఏక ఘాచ సమీకరణ వ్యవస్థను x, y లలో సమకాలీన ఏకఘాత సమీకరణాలు అంటారు.

అలాగే $\begin{matrix} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{matrix}$

రూపంలో ఉండే మూడు ఏక ఘాత సమీకరణాలను x, y, Z లో లేక మూడవ ఆర్డర్ (order) సమకాలీన ఏకఘాత సమీకరణాలు అంటారు.

సమకాలీన రెండు ఏక ఘాత సమీకరణము సాధించే పద్దతులు: రెండు ఏకఘాత సమీకరణములను మూడు విభిన్న పద్దతులునుపయోగించి సాధించవచ్చు.

అవి (ఎ) ప్రతిక్షేపణ పద్దతి (Method of substitation)
(బి) తొలగించు పద్దతి (Method of Elimination)
(సి) అడ్డగుణకార పద్దతి (Mehtod of Cross Multipication)

(ఎ) ప్రతిక్షేపణ పద్దతి:

$$\begin{matrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{matrix}$$

అనే ఏక ఘాత సమకాలీన సమీకరణాలను ప్రతిక్షేపణ పద్దతిని ఎలా సాధించాలో నేర్చుకుందాము. మొదట ఇచ్చిన రెండు సమీకరణాలను

$a_1x + b_1y = c_1 \longrightarrow (1)$ చే

$a_2x + b_2y = c_2 \longrightarrow (2)$ చే సూచిద్దాము.

సమీకరణము (1)లో x పదము మాత్రమే = కు ఒక వైపు ఉంచి మిగిలిన పదాలు = కు వేరొక వైపుకు మార్చగా

$a_1x = c_1 - b_1y$ అవుతుంది.

$\Rightarrow x = \dfrac{c_1 - b_1y}{a_1}$ అవుతుంది. $\longrightarrow (3)$

x యొక్క ఈ విలువ (2) సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించగా

$a_2\left(\dfrac{e_1 - b_1y}{a_1}\right) + b_2y = c_2$ దీనిని సూక్ష్మీకరించి సాధించగా $y = -\dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

y యొక్క ఈ విలువను (3)లో వ్రాయగా $x = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ అవుతుంది. దీనినే ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి అంటాము.

ఈ క్రింది సమీకరణాలు

ఉదా : $3x + 4y = 31$

$2x + 3y = 22$ సాధించండి.

సాధన : మొదటగా $3x + 4y = 31 \longrightarrow (1)$

$2x + 3y = 22 \longrightarrow (2)$

సమీకరణము (1) నుండి $3x = 31 - 4y \quad \therefore x = \dfrac{31 - 44}{3}$

x యొక్క ఈ విలువను (2)వ సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించగా $2.\dfrac{(31-4y)}{3} + 3y = 22$

$62 - 8y + 9y = 66$

y యొక్క ఈ విలువని $x = \dfrac{31-4y}{3}$ లో ప్రతిక్షేపించగా $x = \dfrac{31-4\times4}{3} = \dfrac{15}{3} = 5$

$\therefore x = 5,\ y = 4$ లు పైన యిచ్చిన సమీకరణాలను సంతృప్తి పరుస్తాయి.

(బి) తొలగించు పద్ధతి: ఈ పద్ధతిలో రెండు సమీకరణాల నుండి ఏ చలరాశినైతే తొలగించాలనుకుంటామో ఆచలరాశి యొక్క గుణకాలు సమానం చేయాలి. ఆ తరువాత ఒక సమీకరణం నుండి వేరొక సమీకరణాన్ని రెండు గుణకాలు ఒకే గుర్తు కలిగి వుంటే తీసివేయటం, రెండు గుణకాలు ఒకే గుర్తు కలిగి వుంటే తీసివేయడం, రెండు గుణకాలు వేర్వేరు గుర్తులు కలిగివుంటే కూడగా ఆ చలరాశి యిచ్చిన రెండో సమీకరణముల నుండి తొలగిపోతుంది. అందుకని ఈ పద్ధతిని తొలగించు పద్ధతి అని అంటాము.

ఉదా : ఈ క్రింది సమాకాలీన సమీకరణాలను తొలగించు పద్ధతిలో సాధించండి.

$5x + 2y = 12$

$3x+7y=13$

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణాలను

$$5x+2y=12 \longrightarrow (1)$$

$3x+7y=13 \longrightarrow (2)$ అనుకుందాము. ఈ సమాకాలీన సమీకరణాల నుండి xను తొలగిద్దాం అందుకుగాను ముందుగా రెండు సమీకరణములలోని x గుణకాలు సమానం చేయాలి.

$$3\times 1 \Rightarrow 3\times 5x+3\times 2y=3\times 12$$

$$15x+6y=36 \longrightarrow (4)$$

$$5\times(2) \Rightarrow 5x+35y=65 \longrightarrow (5)$$

(3) మరియు (4) సమీకరణాల నుండి xను తొలగించి (3) - (4)

$$-29y=-29 \quad \therefore y=\frac{-29}{-20}=1$$

y యొక్క విలువ $y=1$ సమీకరణము (1)లో కాని (2)లో కాని ప్రతిక్షేపించగా, x విలువ వస్తుంది. ఈ సమస్యలో $y=1$ మొదటి సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించగా

$$5x+2\times 1=12 \Rightarrow 5x=10$$

$$\therefore x=2$$

కావున యిచ్చిన సమీకరణాలు సాధించగా $x=10, y=1$

ఉదా : ఈ క్రింది సమీకరణాలు సాధించండి.

$$\frac{4}{x}+\frac{10}{y}=2; \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{19}{20}$$

సాధన : యిచ్చిన సమీకరణాలలో $\frac{1}{x}$ బదులుగా a $\frac{1}{y}$ కి బదులుగా b వ్రాయగా. అవి

$$4a+10b=2 \longrightarrow (1)$$

$$3a+2b=\frac{19}{20} \longrightarrow (2)$$

(2) సమీకరణాన్ని 5 చే గుణించగా

$$(2)\times 5 \Rightarrow \quad 15a+10b={}^{19}\!/_{4}$$

$$4a+10b=2$$

తీసివేయగా $11a=\frac{19}{4}-2=\frac{11}{4}$

a విలువ సమీకరణము 1లో ప్రతిక్షేపించగా $4\times\frac{1}{4}+10b=2$

$$10b=2-1\Rightarrow b=\frac{1}{10}$$

కానీ మనం ముందుగా తీసుకున్న assumption ప్రకారం

$x=\frac{1}{a},\ y=\frac{1}{b}$ ఇక్కడ a,b విలువలు ప్రతిక్షేపించగా $x=\frac{1}{1/4}\Rightarrow x=4$

$$y=\frac{1}{1/10}\Rightarrow y=10$$

(సి) అడ్డగుణకార పద్ధతి (Method of Cross Multiplication)**:**

$$a_1x+b_1y+c_1=0\longrightarrow(1)$$

$a_2x+b_2y+c_2=0\longrightarrow(2)$ రెండు ఏకఘాత సమీకరణములైతే మొదట సమీకరణమును a_2 చేత రెండవ సమీకరణము a_1 చేత గుణించగా మనకు

$$a_1a_2\ x+ab_1y+a_2c_1=0\longrightarrow(3)$$

$a_1a_2\ x+ab_2y+a_2c_2=0\longrightarrow(4)$ లు వస్తాయి. వీటిని (3) లో నుండి (4) తీసివేయగా

$$(a_2b_1-a_1b_2)y+(a_2c_1-a_1c_2)=0$$

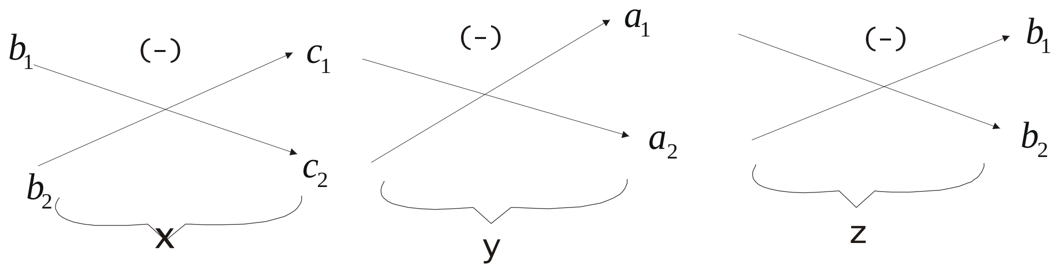
అనగా $\frac{y}{a_2c_1-a_1c_2}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$

అలాగే (1)వ సమీకరణంగాని b_2 చేత (2)వ సమీకరణాన్ని b_1 చే గుణించగా మరియు తీసివేయగా

$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{a_2c_1-a_1c_2}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$ వస్తాయి. దీనినే అడ్డగుణకార పద్ధతి అంటాము.

గమనిక : సూక్ష్మంగా ఈ క్రింది విధంగా చేయవచ్చు. యిచ్చిన సమీకరణాలలోని గుణకాలు ఈ వరుసలో వ్రాయండి.

y గుణకము స్థిరపదము x గుణకము y గుణకము



$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - b_1a_2}$$

ఉదా : క్రింద యివ్వబడిన రెండు ఏకఘాత సమీకరణాలను అడ్డగుణకార పద్ధతిలో సాధించండి.

$$2x+3y=12$$
$$7x+2y=25$$

సాధన :

y గుణకాలు	స్థిరసంఖ్య	x గుణకాలు	y గుణకాలు
3	- 12	2	3
2	- 25	7	2

$$\therefore \frac{x}{3\times25+2\times12} = \frac{y}{-12\times2\times25} = \frac{1}{2\times2-7\times3} \quad \therefore \frac{x}{-75+24} = \frac{1}{4-21} \Rightarrow x=3$$

అదేవిధంగా $\dfrac{y}{-84+50} = \dfrac{1}{4-21} \Rightarrow y=2$

వర్గ సమీకరణము - సాధించే పద్ధతులు: x ఒక చలరాశి, $a \neq 0, b, c$ వాస్తవ సంఖ్యలైతే $ax^2+bx+c=0$ అనే సమీకరణాన్ని వర్గసమీకరణము అంటారు. వర్గసమీకరణాన్ని సంతృప్తిపరచగల x యొక్క విలువలను ఆ సమీకరణము యొక్కమూలాలు అంటాము. సాధారణంగా ఒక వర్గ సమీకరణానికి రెండు మూలాలుంటాయి. పైన యివ్వబడిన $ax^2+bx+c=0$ అనే వర్గ సమీకరణానికి రెండు మూలాలు ఈ విధంగా వుంటాయి.

$$x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \Rightarrow x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ఈ విలువలను α, β లో గుర్తింగా $\alpha = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

1.7 ఆర్థిక అనువర్తాలు (Economic Applications):

భాగంలో మనం అనేక ఆర్థిక ప్రమేయాలు డిమాండ్ ప్రమేయం, సప్లయి ప్రమేయం, వ్యయ ప్రమేయం మొదలగు వాటి

గురించి చర్చించాము. ఈ భాగంలో ఆ ప్రమేయాలు ఏ విధంగా నిర్మించాలి వాటిని ఎలా సాధించి విలువలు కనుగొనాలో ఉదాహరణాల ద్వారా తెలుసుకుందాము.

వ్యయ ప్రమేయం (Cost Function):

ఉదా : ఒక పరిశ్రమలోని ఒక ఉత్పత్తి స్థిర వ్యయం రూ. 5000లు. ఇది ఉత్పత్తి పరిమాణంలోని మార్పులకు లోనుకాదు. విచలిత ఉత్పత్తి కారకవ్యయం ఒక్కొక్క యూనిట్ ఉత్పత్తికి 10 రూపాయలు అయితే ఆ ఉత్పత్తి యూనిట్ యొక్క వ్యయ ప్రమేయం కనుగొనండి. ఈ కర్మాగారంలో 200 యూనిట్లు ఉత్పత్తి అయితే మొత్తం వ్యయం ఎంత ?

సాధన : ఉత్పత్తి చేసే యూనిట్ యొక్క స్థిర వ్యయం = 5,000

ఒక వేళ ఈ కర్మాగారం 'x' పరిమాణం ఉత్పత్తి చేస్తుంది. అనుకుంటే విచలిత వ్యయం

= ఒక్కొక్క యూనిట్‌కు అయ్యే వ్యయం × x

$= 10 \times x$

కాబట్టి కర్మాగారము యొక్క మొత్తం వ్యయ ప్రమేయం C = స్థిర వ్యయం + విచలిత వ్యయం $= 5000 + 10x$

ఈ కర్మాగారంలో 200 యూనిట్లు ఉత్పత్తి చేస్తే అప్పుడు అయ్యే మొత్తం వ్యయం = $5000 + 10 \times 200$

$= 5000 + 2000 = 7000$

రాబడి ప్రమేయం: ఒక కర్మాగారంలో ఉత్పత్తి పరిమాణంతో ముడిపడి లేనటువంటి వ్యయం రూ. 3000లు. ఒక ఉత్పత్తి యూనిట్ ఉత్పత్తి చేయటానికి ఈ కర్మాగారం 25 రూపాయలు వ్యయం చేస్తుంది. మార్కెట్‌లో ఒక్కొక్క ఉత్పత్తి ధర రూ. 100 అయిన ఎడల, కర్మాగారం యొక్క వ్యయప్రమేయాన్ని నిర్మించండి మరియు 200 యూనిట్ల ఉత్పత్తి లాభమా ? నష్టమా ?

సాధన : ఇచ్చిన దత్తాంశము ప్రకారం ఈ కర్మాగారంలో ఉత్పత్తి పరిమాణంలో సంబంధము లేని వ్యయం = 3,000/-

ఒక్కొక్క యూనిట్‌కి అయ్యే ఉత్పత్తి వ్యయం రూ. 25లు, ఈ కర్మాగారం 'x' యూనిట్లును ఉత్పత్తి చేస్తుందనుకుందాము. మరియు ఉత్పత్తి చేసిన యూనిట్లన్నియు అమ్ముడుబోయినాయి అనుకుంటే.

'x'త యూనిట్లు ఉత్పత్తి చేయటానికి అయ్యే వ్యయం = 25 × x = 25 x

కాబట్టి కర్మాగారం యొక్క మొత్తం వ్యయం = స్థిర వ్యయం + విచలిత వ్యయం = 3000 + 25 x

$\therefore$ కర్మాగారం వ్యయ ప్రమేయం C = 3000 + 25 x

రాబడి ప్రమేయం: ఒక్కొక్క యూనిట్ ధర రూ. 100లు అయిన 'x' యూనిట్లు అమ్మగగా వచ్చిన రాబడి = 100 × x = 100 x

ఉత్పత్తి 200 యూనిట్లయితే : కర్మాగారం యొక్క వ్యయం = 3,000 + 25 × x = 8,000

కర్మాగారం యొక్క రాబడి = 100 × 200 = 20,000

కర్మాగారం యొక్క లాభము ప్రమేయం = మొత్తం రాబడి - మొత్తం వ్యయం

= 20,000 - 8,000 = 12,000/-

అనగా కర్మాగారం 200 యూనిట్లు ఉత్పత్తి చేసినట్లయితే దానికి 12,000 లాభం వస్తుంది.

మరికొన్ని ఉదాహరణలు : ఒక కంపెనీ రోజుకు x యూనిట్లను యూనిట్ రూ. 60/- చొప్పున అమ్ముతుంది. ఒక్కొక్క యూనిట్ ఉత్పత్తి చేసి మరియు మార్కెట్ చేయటానికి ఒక్కొక్క యూనిట్‌కు రూ. 35 చొప్పున ఖర్చు చేయాల్సి వుంటుంది. అంతేకాక రోజుకు స్థిరంగా రూ. 1,000 స్థిర వ్యయం అవుతుంది. అయితే ఈ కంపెనీ లాభప్రమేయాన్ని కనుగొనండి. మరియు ఈ కంపెనీ 500 యూనిట్లు ఉత్పత్తి చేస్తుంటే కంపెని పరిస్థితిని విశ్లేషించండి ?

సాధన : కంపెనీ యొక్క స్థిరవ్యయం రోజుకు రూ. 1,000.00

ఒక్కొక్క యూనిట్‌కి రోజుకి ఖర్చు రూ. 35లు

కంపెనీ 'x' యూనిట్లు ఉత్పత్తి చేస్తుంది.

అప్పుడు 'x' యూనిట్ల ఉత్పత్తికి గాను అయ్యే ఖర్చు = $35 \times x = 35x$

కావున కంపెనీ ఒక రోజు వ్యయం : $1,000 + 35x$ అవుతుంది.

x యూనిట్లు అమ్మగా వచ్చిన రాబడి = $60x$

కంపెనీ లాభం ప్రమేయం $\pi = 60x \times (1,000 + 35x)$

$= 60x - 35x - 1000$

$= 25x - 1000$

కంపెనీ 500 యూనిట్లను ఉత్పత్తి చేస్తే, కంపెనీ యొక్క లాభం పై ప్రమేయంలో x బదులుగా 500 ప్రతిక్షేపిస్తే తెలుస్తుంది.

కాబట్టి 500 యూనిట్లు ఉత్పత్తి చేస్తే లాభం = $25 \times 500 - 1,000 = 12,500 - 1,000 = 11,500$

ఉదా : 2 ఒక వస్తువు మార్కెట్ సప్లయి ప్రమేయం $q = 100 + 6p$ q సప్లయి పరిమాణం, p ధరను తెలియజేస్తున్నాయి. ఒక్కొక్క యూనిట్ ఉత్పత్తి వ్యయం రూ. 5 అయితే, ఈ ఉత్పత్తిని ఒక్కొక్క యూనిట్ ఎంత ధరకు అమ్మితే 500 రూపాయలు లాభం వస్తుందో కనుక్కోండి ?

సాధన : సప్లయి ప్రమేయం $q = 100 + 6p$

రాబడి ప్రమేయం $pq = (100+6p)p = 100p + 6p^2$

వ్యయం ప్రమేయం $q\times$ ఒక్కొక్క ఉత్పత్తి వ్యయం

$= q \times 5 = (100+6p)5 = 500 + 30p$

కాబట్టి లాభం ప్రమేయం = రాబడి ప్రమేయం - వ్యయం ప్రమేయం

$= (100p + 6p^2) - (500 + 30p)$

$= 70p + 6p^2 - 500 - 30p \quad = 6p^2 + 70p - 500$

ఇక్కడ సమస్య లాభం రూ. 500/- రావాలంటే ధర ఎంత ? అనగా $500 = 6p^2 + 70p - 500$

ఇది p లో వర్గసమీకరణము. దీనిని సాధించుట ద్వారా p యొక్క విలువలు కనుక్కోవచ్చు.

$$6p^2+70p-1000=0$$

$$p=\frac{-70\pm\sqrt{(70)^2-4\times6\times(-1000)}}{2\times6}=\frac{-70\pm\sqrt{4900+24000}}{12}=\frac{-70\pm170}{12}$$

కావున $p=\frac{100}{12}\ or\ \frac{-240}{12}$ అవుతుంది.

ధర ఎప్పుడూ ఋణాత్మకంగాదు కాబట్టి $p=\frac{100}{12}$ ఈ విషయంలో సరైన ధర అవుతుంది. కాబట్టి ధర 8.33గా నిర్ణయించిన ఈ సంస్థకు 300 లాభం వస్తుంది.

ఉదా : ఒక వ్యక్తి వార్త పత్రికలను ఒక్కొక్కటి 5 రూపాయలకు కొంటాడు. వాటిని ఒక్కొక్కటి 6 రూ॥ల చొప్పున అమ్ముతాడు. ఒక వేళ వారపత్రిక అమ్ముడు పోకపోతే వాటిని పత్రికాధికారు ఒక్కొక్కదానికి 4 రూ॥ల చొప్పున యిస్తారు. అయితే ఆ వ్యక్తి యొక్క లాభప్రమేయాన్ని రూపొందించండి.

సాధన : ఈ వ్యక్తి 'x' వారపత్రికలు కొన్నాడనుకుందాము. ఆ వ్యక్తి యొక్క వ్యయప్రమేయం = x × ఒక వారపత్రిక ధర

= x × 5 = 5x

'x' వారపత్రికలలో 'a' వారపత్రికలు అమ్మివేశాడనుకోండి. అప్పుడు అతని రాబడి. a × వారపత్రిక అమ్మక ధర = ba

మిగిలిన వారపత్రికలు ($x-a$) వీటిని ఈ వ్యక్తి పత్రికాఫీసులో అమ్మేశాడు. దీనివలన అతని రాబడి ($x-a$) × 4

ఈ వ్యక్తి యొక్క మొత్తం రాబడి $6a+(x-a)4-5x$

లాభం ప్రమేయం = $6a+(x-a)4-5x$

= $6a+4x-4a-5x$

$=2a-x$

ఉదా : 4 - ఒక పరిశ్రమలో ఉత్పత్తి అయిన వస్తువు యొక్క డిమాండ్ ప్రమేయము $pq=50$, ఇందులో p ధరను, q పరిమాణాన్ని తెలియజేస్తుంది. సప్లయి ప్రమేయం $10+4p=q$ అయితే సమతుల్య ధరను పరిమాణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన : డిమాండ్ ప్రమేయం $pq=50$ ---- (1)

సప్లయి ప్రమేయం $10+4p=q$ ---- (2)

q యొక్క విలువ (1) లో ప్రతిక్షేపించగా

$p(10+4q)=50$

$10p+4p^2=50$

$4p^2+10p-50=0$

p విలువలకై సాధించగా $p=\dfrac{-10\pm\sqrt{(10)^2-4\times50\times4}}{2\times4}$

$=\dfrac{-10\pm\sqrt{100+800}}{8}$ $=\dfrac{-10\pm\sqrt{900}}{8}$ $=\dfrac{-10\pm30}{8}$

$p=+\dfrac{20}{8}\ or\ -\dfrac{40}{8}=-5$

p విలువ ఋణాత్మకం కాదు కాబట్టి $p=\dfrac{20}{8}$

మొదట సమీకరణంలో $p=\dfrac{20}{8}$ వ్రాయగా

$\dfrac{20}{8}\times q=50\Rightarrow q=\dfrac{50\times8}{20}=20$

$\therefore$ సమతౌల్య ధర $\dfrac{20}{8}:\dfrac{10}{4}$ పరిమాణం **20**

ఉదా : ఒక పరిపూర్ణ పోటీ మార్కెట్‌లో ఒక వస్తువు యొక్క డిమాండ్ ప్రమేయం $D=30-5p-p^2$ మరియు సప్లయి ప్రమేయం $S=5p-1$ అయితే సమతుల్య ధరను, పరిమాణాన్ని కనుగొనుము.

సాధన : డిమాండ్ ప్రమేయం $D=30-5p-p^2$

సప్లయి ప్రమేయం $S=5p-1$

ఒక పరిపూర్ణ మార్కెట్‌లో సమతుల్య ధర, పరిమాణము. మార్కెట్‌లో డిమాండ్ మరియు సప్లయి సమానమైనప్పుడు తెలుస్తాయి. కావున డిమాండ్ ప్రమేయాన్ని సప్లయి ప్రమేయాన్ని సమానం చేయగా

$30-5p-p^2=5p-1$

$30-5p-p^2-5p+1=0$

$p^2+10p-29=0$

p విలువలకై సాధించగా

$$p=\frac{-10 \pm \sqrt{(10)^2-4\times1\times-29}}{2\times1} \qquad =\frac{-10 \pm \sqrt{100+116}}{2}$$

$$\frac{-10\pm\sqrt{216}}{2}=\frac{-10\pm14.69}{2} \quad =\frac{4.69}{2} \; or \; \frac{-24.69}{2}$$

$\therefore$ సమతౌల్య ధర **2.345**

సమతౌల్య పరిమాణము : $s = 5\times2.345 - 1 = 10.725$

ఉదా : ఒక వస్తువు యొక్క సప్లయి మరియు డిమాండ్ ప్రమేయాలు ఈ విధంగా యివ్వబడ్డాయి.

$q_s = p - 1$ మరియు $q_d = \frac{12}{p}$

$q_s =$ సప్లయి చేసిన పరిమాణము $q_d = \frac{12}{p}$

q_s =సప్లయి చేసిన పరిమాణము q_d = డిమాండ్ పరిమాణము అయితే ఆ వస్తువు యొక్క సమతౌల్య ధర కనుక్కోండి.

సాధన : సమతుల్యం $q_s = q_d$ అయినప్పుడు వస్తుంది. కాబట్టి q_s, q_d లను సమానం చేయగా $p-1=\frac{12}{p}$

$p^2 - p = 12 \Rightarrow p^2 - p - 12 = 0$ ఇది ధరలలో వర్గసమీకరణము దీనిని p విలువల కొరకై సాధించగా

$$p=\frac{+1\pm\sqrt{(1)^2-4\times1\times-12}}{2\times1} \quad =\frac{+1\pm\sqrt{1+48}}{2} \quad =\frac{1\pm\sqrt{49}}{2} \quad =\frac{1\pm7}{2}$$

$$p = -\frac{6}{2}, \quad \frac{8}{2}=4$$

ఉదా : ఒక వస్తువు యొక్క డిమాండ్ ప్రమేయం $D = 100 - 10p$ అయిన ఆ వస్తువుకు అత్యధిక ధరను కనుక్కోండి. మరియు ఆ వస్తువు డిమాండ్ లేని (Free good) అయినప్పుడు దాని డిమాండ్ కనుక్కోండి.

సాధన : డిమాండ్ ప్రమేయం $D = 100 - 10p$

ఒక వస్తువు యొక్క అత్యధిక ధర వద్ద ఆ వస్తువు యొక్క డిమాండ్ '0' అవుతుంది. కాబడి పైన యివ్వబడిన డిమాండ్ ప్రమేయంలో $D=0$ వ్రాయుగా $o = 100 - 10p \Rightarrow p = 10$

$\therefore$ ఆ వస్తువు యొక్క అత్యధిక ధర $Rs.10$ అవుతుంది. ఆ వస్తువు ఫ్రీ గూడ్ అయినప్పుడు ఆ వస్తువుకు ధర ఏదీ వుండదన్న మాట. అంటే $p=0$ అవుతుంది. పైన యివ్వబడిన డిమాండ్ ప్రమేయంలో $p=0$ ప్రతిక్షేపించగా ఆ వస్తువు యొక్క డిమాండ్ మనకు తెలుస్తుంది.

$$D = 100 - 10 \times 10 \quad = 100$$

అంటే ఆ వస్తువు ఫ్రీ గూడ్ అయినప్పుడు దాని డిమాండ్ 100 యూనిట్లుంటుంది.

1.8 సారాంశము:

ఈ పాఠంలో ప్రమేయం రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ చలరాశుల మధ్య సంబంధాన్ని తెలిపే సూత్రం అని తెలుసుకున్నాం మరియు అనేక ప్రమేయాలు గురించి కూడా చర్చించాం. అంతేకాక అర్ధశాస్త్రంలో ప్రమేయం దాని వుపయోగాలు గురించి, ప్రమేయాలు సమీకరణాలు సాధించే పద్దతులును గూర్చి నేర్చుకున్నాం. ఒక ప్రమేయాన్ని రేఖాచిత్రం ద్వారా ఎలా చూపాలన్నది కూడా ఈ భాగంలో నేర్చుకున్నాం.

1. ప్రమేయం అనగా చలరాశుల మధ్య సంబంధాన్ని తెలియజేసే సూత్రం.
2. $y = f(x)$ అనే ప్రమేయంలో y ని అస్వతంత్ర చలరాశని, x ని స్వతంత్ర చలరాశి అని పిలుస్తారు.
3. $y = f(x)$ అనే ప్రమేయాన్ని రేఖాచిత్రం ద్వారా చూపాలంటే x కు వివిధ విలువలు యిచ్చి, ప్రమేయంలో దానికి అనుగుణమైన y విలువలు కనుక్కొని, వాటి ద్వారా ఏర్పడిన విలువలను బిందు నిరూపకాలుగా భావించి x అక్షము పై x- విలువలు, y అక్షము పై y- విలువ కొలుస్తూ బిందువులు గుర్తించాలి. ఈ బిందువులు కలపగా వచ్చిన రేఖా చిత్ర ప్రమేయం యొక్క రేఖా చిత్రం.
4. డిమాండ్ ప్రమేయం : ఇతర విషయాలు స్థిరంగా ఉన్నప్పుడు ఒక వస్తువు యొక్క ధరకు, డిమాండ్ పరిమాణానికి మధ్య గల సంబంధాన్ని తెలియజేస్తుంది.
5. వ్యయప్రమేయం : ఒక పరిశ్రమలో ఉత్పత్తి చేసే ప్రక్రియలో మొత్తం వ్యయానికి స్థిర మరియు విచలిత ఉత్పత్తి పై అయిన వ్యయానికి మధ్య సంబంధాన్ని తెలియజేస్తుంది.
6. ఉత్పత్తి ప్రమేయం : ఒక ఉత్పత్తి సంస్థలో ఉత్పత్తికి మరియు ఉత్పత్తి కారకాలకు మధ్య గల సంబంధాన్ని తెలియజేస్తుంది.
7. సమకాలీన రెండు ఏకఘాత సమీకరణాలను ప్రతిక్షేపణ పద్దతి, తొలగించు పద్దతి మరియు అడ్డగుణకార పద్దతుల ద్వారా సాధించవచ్చు.
8. $ax^2 + bx + c = 0$ అనే వర్గ సమీకరణానికి రెండు మూలాలుంటాయి. అవి.

$$\alpha - \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \beta - \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

9. p ధర, q : డిమాండ్ అయితే రాబడి ప్రమేయం $p \times q$
10. లాభం : మొత్తం రాబడి - మొత్తం వ్యయం : $p \times q$ [స్థిర వ్యయం + విచలిత వ్యయం]

1.9 స్వయం సమీక్షా ప్రశ్నలు:

1. ప్రమేయం అనగా నేమి. అర్ధశాస్త్రంలో ప్రమేయాల ప్రాముఖ్యతను వివరించండి.
2. వివిధ రకాల ప్రమేయాలును విశదీకరించండి.
3. $y = 2x + 5$ అనే ప్రమేయాన్ని రేఖాచిత్రం ద్వారా చూండి.
4. ఈ క్రింది సమీకరణాలను సాధించండి.

   $5x + 4y = 6$

   $9x + 5y = 23$
5. $5q + 9p = 54$ మరియు $q = 9p - 18$ ఒక వస్తువు యొక్క డిమాండ్ మరియు సప్లయి ప్రమేయాలయిన సమతుల్య ధర మరియు సమతుల్య పరిమాణము కనుక్కోండి. p = ధర, q = పరిమాణము.

6. ఒక సంస్థలో ఒక్కొక్క వస్తువు ఉత్పత్తి వ్యయం 10 రూపాయలు. ఉత్పత్తి పరిమాణంతో సంబంధం లేని వ్యయం 6,000 రూపాయలు అయితే ఆ సంస్థ యొక్క వ్యయం ప్రమేయాన్ని నిర్మించండి. మరియు ఒక్కొక్క వస్తువును 18 రూపాయలకు అమ్మితే రాబడి ఎంత ?
7. ఒక పరిశ్రమలో తయారయ్యే వస్తువుల డిమాండ్ ప్రమేయం $pq=100$. ఇందులో 'p' ధరను q పరిమాణాన్ని సూచిస్తున్నాయి. అయితే సప్లయి ప్రమేయం $q=10+2p$ అయిన ఎడల ఆ వస్తువు యొక్క సమతుల్య ధర, మరియు పరిమాణం కనుక్కోండి.
8. $y=2x^2+3x+5$ అనే ప్రమేయాన్ని రేఖా చిత్రం ద్వారా చూపండి.
9. $q=200-8p$ అనే ప్రమేయానికి రేఖా చిత్రం గీసి ధర 'p' 15 అయినప్పుడు డిమాండ్ ఎంత వుంటుందో డిమాండ్ 40 ఏ ధర వద్ద వుంటుందో రేఖా చిత్రం ద్వారా కనుక్కోండి.
10. ఒక ఉత్పత్తి సంస్థ యొక్క వ్యయ ప్రమేయం $c=200x^3-11x^2+40x+2000$ అయితే, ఇందులో విచలిత వ్యయాన్ని, స్థిర వ్యయాన్ని కనుగొనండి. ఉత్పత్తి పరిమాణం 10 అయితే వ్యయం ఎంత ? ఉత్పత్తి పరిమాణం 10 వద్ద సగటు విచలిత వ్యయం కనుగొని దాని రేఖా చిత్రం ఏ ఆకారంలో వుంటుందో తెలపండి.

1.10 చదవవలసిన పుస్తకాలు:

1. R G D Allen	:	Mathematical Analysis for Economists
2. G.S. Monga	:	Mathematics and Statistics for Economics
3. Mehta & Madani	:	Mathematics for Economists

పాఠం - 2

అవధులు

విషయ క్రమం

2.1 ఉద్దేశం:

ఈ పాఠ్యభాగం చదివిన తరువాత మీరు ఈ క్రింది అంశాలను గురించి తెలుసుకోగలరు.

* ఒక ప్రమేయానికి అవధి అనగానేమి.
* అవధుల యొక్క లక్షణాలు
* ప్రమేయాలకు అవధులు గణించటంలో పద్ధతులు
* అవిచ్ఛిన్నత, దాని ధర్మాలు, మొదలగునవి.

2.1 పరిచయం:

మొదటి పాఠంలో మనం వివిధ రకాల ప్రమేయాలను గురించి వాటి యొక్క జ్యామితీయ ప్రాతినిధ్యం గురించి (Graphical Representation) తెలుసుకుని అర్థశాస్త్రంలో ప్రమేయాల విశిష్టతను ఉపయోగాన్ని పరిశీలించాం. ప్రమేయమనగా ముఖ్యంగా అర్థశాస్త్రంలో, వివిధ అర్థచలరాశులకు మధ్య సంబంధముగా తెలుసుకున్నాం. $y = f(x)$ అనే ప్రమేయంలో y ని పరతంత్ర చలరాశని x ని స్వతంత్ర చలరాశని, y, x మీద ఆధారపడి వుంటుందని గ్రహించాము. కాబట్టి స్వతంత్ర చలరాశి x విలువలు మారుతూ వుంటే పరతంత్ర చలరాశి y విలువలు కూడా దానికి అనుగుణంగా మారుతూ వుంటాయి. ఈ చలరాశుల విలువలు ఒక నిర్ణీతమైన పద్ధతిలో వుంటే ఆ విలువలకు గల సంబంధాన్ని అర్థ చేసుకోటానికి 'అవధి' అనే భావనుపయోగపడుతుంది. ప్రమేయాలకు అవిచ్ఛిన్నత అనే యింకొక లక్షణం కూడా కలదు. అవిచ్ఛిన్నత అనే యింకొక లక్షణం కూడా కలదు. అవిచ్ఛినతా లక్షణం కలిగిన ప్రమేయం యొక్క వక్రరేఖ, మధ్యలో ఎక్కడా విచ్ఛిన్నతలేకుండా వుంటుంది. ఈ భాగంలో ప్రమేయానికి అవధి అనే విషయం గురించి, అవధుల వివిధ లక్షణాల గురించి, మరియు ప్రమేయం యొక్క అవిచ్ఛినత గురించి తెలుసుకుందాం.

ఒక ప్రమేయానికి అవధి గురించి తెలుసుకునేముందు సామీప్యం (Neighbourhood) అనే వేరొక భావన గురించి తెలుసుకోవలసిన ఆవశ్యకత ఎంతో ఉంది. అంతరం (Interval) అనే భావనను గూర్చి కూడా ఈ సందర్భంలో తెలుసుకుంటాం.

2.2 అంతరం (Interval) మరియు సామీప్యం (Neighbourhood):

a,b లు రెండు వాస్తవ సంఖ్యలయితే మరియు $a<b$ అయి $\left\{\frac{x}{a}<x<b\right\}$ అనే సమితి (set)ని వివృతాంతరము అని అంటారు. దీనిని (a,b) అని వ్రాస్తారు. ఈ సమితిలో a,b ల మధ్య వుండే అన్ని వాస్తవ సంఖ్యలు మూలకాలు (element)గా వుంటాయి. ఉదాహరణకు (2, 3) అనే వివృంతాంతరములో 2.001, 2.002,. . ., 2.3. . . 2.4. . .2.9. . . . 2.99. . . . మొదలగు వాస్తవసంఖ్యలు అన్నీ మూలకాలుగా వుంటాయి. అలాగే $\left\{\frac{x}{a}\leq x\leq b\right\}$ అనే సమితిని సంవృతాంతరము (closed interval) అని అంటారు. ఇందులో a,b మధ్యలో వున్న వాస్తవ సంఖ్యలే కాక a,b లు కూడా వుంటాయి. దీనిని $[a,b]$ అని సంకేతాలలో వ్రాస్తాము. δ ఒక ధనాత్మక వాస్తవసంఖ్య అయినట్లయితే $[a-\delta,\ a+\delta]$ అనే సంవృతాంతారాన్ని 'a'కు δ సామిప్య (δ - neighbourhood) అని అంటాము. $[a-\delta,\ a+\delta]$ అనే సమితిలోని ఏ సంఖ్య అయినా a కు సమీపంగా వుంటుంది.

అవధి: ఒక ప్రమేయానికి అవధి అనే భావనను అర్థం చేసుకోటానికి క్రింది ఉదాహరణలను గమనిద్దాం.

$f(x)$ అనే ప్రమేయాన్ని $\frac{x^2-4}{x-2}$ చే నిర్వచించాం అనుకోండి. అనగా $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$

x యొక్క విభిన్న విలువలకు $f(x)$ యొక్క విలువలు ఈ క్రింది పట్టికలో గమనించండి.

x	1.95	1.96	1.98	1.99	2.01	2.001	. . .
$f(x)$							

$x=2$ వద్ద $f(x)$ నిర్వచించబడలేదు. అయినప్పటికీ x, 2, ను సమీపిస్తున్నప్పుడు $f(x)$ ప్రమేయం 7కు సమీపిస్తుంది.

వేరొక ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాం:

$f(x)=x^2$ అనే ప్రమేయంలో x యొక్క విభిన్న విలువలకు $f(x)$ విలువలు దిగువ పట్టికలో గమనించండి.

x	1.96	1.98	1.99	2.01	2.001	2.0001	. . .
$f(x)$	3.8416	3.92	3.96	4.04	4.004	4.0004	. . .

x విలువలు 2కు దగ్గరగా తీసుకున్న ప్రతిసారి $f(x)$ విలువలు 4కు దగ్గరగా వస్తున్నాయి.

పై ఉదాహరణలో, ప్రమేయాలలో బయల్పడిన లక్షణాలన్ని ఈ క్రింది విధంగా నిర్వచించవచ్చు.

నిర్వచనం : 'a' యొక్క విసర్జిత సామీప్యంలో $f(x)$ అనే ప్రమేయాన్ని నిర్వచించబడవంది. L ఒక వాస్తవ సంఖ్య అనుకుంటే ప్రతి $\in>0$ కు అనుగుణంగా $0<|x-a|<d \Rightarrow |f(x)-l|<\in$ అయ్యేటట్లు $\delta>0$ వ్యవస్థితమైతే L ను a వద్ద $=f(x)$కు అవధి అంటాం. $(Limit\ of\ \ f(x)\ at\ x=a)$ దీనినే సంకేతాలలో $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ అని వ్రాస్తాం. అంటే x ను 'a'కు తగినంత దగ్గరగా తీసుకోవటం ద్వారా $f(x)$ ను L కు కోరినంత దగ్గరగా తీసుకురావటం అనే భావాన్ని లలో $\in, \delta$ లలో వర్ణించబడింది. అవధి నిర్వచనంలో $x-a$

వద్ద $f(x)$ విలువ ప్రస్తావనే లేదని గమనించండి.

పైన ఉదాహరించిన రెండు ఉదాహరణను గమనించినట్లయితే మొదట ఉదాహరణలో x విలువ 2 కు 0.05 సామీప్యంలో వున్నాయి. ఇదే విషయం x విలువలను 2కు మరి యే యితర సామీప్యంలో తీసుకున్నా వర్తిస్తుంది. కాబట్టి

$\lim_{x \to \alpha} \left[\frac{x^2-4}{x-2} \right] = 4$ అని గమనించవచ్చు.

కాని యిక్కడ $f(x)$ కు $x=2$ వద్ద అర్థం లేదు. రెండవ ఉదాహరణను గమనించినట్లయితే $x, 2$ కు సామీప్యంలో 0.04 విలువలు తీసుకున్నప్పుడు $f(x)$ విలువలు 4 కు 0. . . సామీప్యంలో వున్నాయని గమనించవచ్చు. ఇదే విధంగా x విలువలు 2 కు ఏ యితర సామీప్యం తీసుకున్నా $f(x)$ విలువలు 4కు ఏదో ఒక సామీప్యంలో వుంటాయని గమనించవచ్చు. కాబట్టి

$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$ అని వ్రాయవచ్చు.

యిక్కడ ఒక విషయం గమనించండి. $f(x)=x^2$ అయినపుడు $f(x)$ యొక్క అవధి $x=2$ అయినపుడు 4.

సంకేతాల్లో $\lim_{x \to a} f(x) = L$ వ్రాస్తారు.

గమనిక: $f(x)$ అనే ప్రమేయానికి a వద్ద కుడివైపు నుంచి అవధి, ఎడమవైపు నుంచి అవధి రెండూ ఒకటే అయితే a వద్ద $f(x)$ కు అవధి వుంటుంది. ఈ రెండింటిలో యే ఒక్కటి లేకపోయిన, రెండూ వుండి వేర్వేరు విలువలు కలిగివున్నా a వద్ద $f(x)$ కు అవధి వుండదు.

అవధులు గణించటం (Evaluating the Limits**):** ఇప్పటి వరకు ప్రమేయానికి అవధి కుడి, ఎడమ వైపు నుంచి అవధులు గురించి తెలుసుకున్నాం. ఈ విభాగంలో నుంచి అవధులు గురించి తెలుసుకున్నాం. అవధులు గణించటంలో ఈ క్రింది సిద్ధాంతాలు చాలా ఉపయోగపడతాయి.

1. $\lim_{x \to a} f(x) = l, \lim_{x \to a} g(x) = m$ అయితే

   (a) $\lim_{x \to a} \left[f(x) \pm g(x) \right] = l \pm m$ (b) $\lim_{x \to a} \left[k\, f(x) \right] = k\, l$ (k ఒక స్థిరసంఖ్య)

   (c) $\lim_{x \to a} \left[f(x)\, g(x) \right] = l.m$ (d) $\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{l}{m} \, (m \neq 0)$ అవుతాయి.

2. $f(x)=k$ (k ఒక స్థిర సంఖ్య) అయితే $\lim_{x \to a} f(x) = k$
3. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ (n ఒక వాస్తవ సంఖ్య)
4. $\lim_{x \to a} \left[\frac{x^n - a^n}{x-a} \right] = n.\, a^{n-1}$ (n ఒక వాస్తవ సంఖ్య)

పై సిద్ధాంతాలనుపయోగించి ప్రమేయాల అవధులు ఎలా గణించాలో క్రింది ఉదాహరలనల ద్వారా తెలుసుకుందాము.

ఉదా : $\dfrac{x^3+1}{x^2+7}$ యొక్క అవధి $x \to 1$ వద్ద గణించండి.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3+1}{x^2+7} = \frac{\lim\limits_{x\to1}\left[x^3+1\right]}{\lim\limits_{x\to1}\left[x^2+7\right]} = \frac{\lim\limits_{x\to1}x^3+\lim\limits_{x\to1}1}{\lim\limits_{x\to1}x^2+\lim\limits_{x\to1}7}$$

$$=\frac{(1)^3+1}{(1)^2+7}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

ఉదా : $x\to2$ వద్ద $\dfrac{3x^2+5}{4x^3+3x}$ కు అవధి కనుక్కోండి.

$$\lim_{x\to2}\frac{3x^2+5}{4x^3+3x}=\frac{\lim\limits_{x\to2}\left(3x^2+5\right)}{\lim\limits_{x\to2}\left(4x^3+3x\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to2}3x^2+\lim\limits_{x\to2}5}{\lim\limits_{x\to2}4x^3+\lim\limits_{x\to2}3x}$$

$$=\frac{3.\lim\limits_{x\to2}x^2+5}{4.\lim\limits_{x\to2}x^3+3\lim\limits_{x\to2}x}=\frac{3\times(2)^2+5}{4(2)^3+3\times2}=\frac{17}{38}$$

ఉదా : $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=?$

సాధన : $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-2^3}{x-2}$ (4వ సిద్ధాంతమునుసరించి)

$$=3.\ 2^{3-1}=3.\ 2^2=12$$

ఉదా : $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(3x+2)\left(x^3+1\right)}{x^2+4x+5}$ **= ?**

సాధన : $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(3x+2)\left(x^3+1\right)}{x^2+4x+5}=\dfrac{\lim\limits_{x\to2}(3x+2)\times\lim\limits_{x\to2}\left(x^3+1\right)}{\lim\limits_{x\to2}x^2+4x+5}$

$$=\frac{\left[\lim\limits_{x\to2}3x+\lim\limits_{x\to2}2\right]\times\left[\lim\limits_{x\to2}x^3+\lim\limits_{x\to2}1\right]}{\lim\limits_{x\to2}x^2+\lim\limits_{x\to2}4x+\lim\limits_{x\to2}5}$$

$$=\frac{\left[3\lim\limits_{x\to2}x+2\right]\times\left[(2)^3+1\right]}{2^2+4\times2+5}\qquad=\frac{[3\times2+2]\times[8+1]}{[4+8+5]}=\frac{72}{17}$$

ఉదా : $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-9}$

సాధన : పైన చేసిన విధంగానే యిక్కడ అవధి గణిస్తే $\dfrac{0}{0}$ వస్తుంది. దీని అర్థం $(x-3)$లవము లోనూ హారములోనూ ఒక గుణకముగా వుందన్నమాట. అందుకని ముందుగా లవమునకు, హారమునకు గుణకాలు కనుక్కోండి.

$$\begin{aligned} x^2+2x-15 &= (x-3)(x+5) \\ &= x^2+5x-3x+15 \\ &= x(x+5)-3(x+5) \\ &= (x-3)(x+5) \end{aligned}$$

$$x^2-9 = x^2-3^2 = (x-3)(x+3)$$

కాబట్టి $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+5)}{(x-3)(x+3)}$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(x+5)}{(x+3)} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}(x+5)}{\lim\limits_{x\to 3}(x+3)} \quad = \frac{\lim\limits_{x\to 3} x + \lim\limits_{x\to 3} 5}{\lim\limits_{x\to 3} x + \lim\limits_{x\to 3} 3}$$

$$= \frac{3+5}{3+3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

ఉదా : $x\to 0$ అయినప్పుడు $\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ యొక్క అవధి కనుక్కోండి.

సాధన : ఈ సమస్యలో కూడా మామూలు పద్ధతిలో అవధి కనుక్కోంటే $\dfrac{0}{0}$ వస్తుంది. కావున యిచ్చిన సమస్యను విలువ మారకుండా కొన్ని మార్పులు చేసి అప్పుడు అవధి కనుక్కోవాలి.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ లో హారములో x కు 1 కలిపి, మరలా తీసివేయగా

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{(1+x)-1}$ అవుతుంది. అలాగే $x\to 0$ అవుతుంటే $(x+1)\to 1$ అవుతుంది.

అనగా $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{(x+1)-1} = \lim\limits_{x+1\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{(x+1)-1}$

$$= \lim_{x+1\to 1} \frac{(x+1)^{1/2} - 1^{1/2}}{(x+1)-1} \qquad \text{(4వ సిద్ధాంతము ఆధారంగా)}$$

$$= \frac{1}{2} 1^{1/2} = \frac{1}{2}$$

ఉదా : $\frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{5-x}}{x^2-1}$ యొక్క అవధి $x \to 1$ వద్ద కనుక్కోండి.

సాధన : $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{5-x}}{x^2-1}$ ను మామూలు పద్ధతిలో సాధిస్తే హారములో '0' వస్తుంది. '0' తో భాగించటం నిర్వహించబడలేదు. కావున లవమును హారమున $\sqrt{3+x} + \sqrt{5-x}$ చే గుణించగా

$$\lim_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt{3+x} - \sqrt{5-x}\right)\left(\sqrt{3+x} + \sqrt{5-x}\right)}{(x^2-1)\left[\sqrt{3+x} + \sqrt{5-x}\right]} = \lim_{x\to 1} \frac{(3+x)-(5-x)}{(x-1)(x+1)\left[\sqrt{3+x} + \sqrt{5-x}\right]}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{3+x-5+x}{(x-1)(x+1)\left[\sqrt{3+x} + \sqrt{5-x}\right]} = \lim_{x\to 1} \frac{2x-2}{(x-1)(x+1)\left[\sqrt{3+x} + \sqrt{5-x}\right]}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)\left[\sqrt{3+x} + \sqrt{5-x}\right]} = \lim_{x\to 1} \frac{2}{(x+1)\left[\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}\right]} = \frac{2}{(2)\left[\sqrt{4} + \sqrt{4}\right]} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

ఉదా : $\frac{x^4-16}{x^3-8}$ యొక్క అవధి $x \to 2$ వద్ద కనుగొనుము.

సాధన : $\lim_{x\to 2} \frac{x^4-16}{x^3-8} = \lim_{x\to 2} \frac{x^4-2^4}{x^3-2^3}$

లవమును, హారమును $(x-2)$ చే భాగించగా

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\frac{x^4-2^4}{x-2}}{\frac{x^3-2^3}{x-2}} = \frac{\lim_{x\to 2} \frac{x^4-2^4}{x-2}}{\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2^3}{x-2}} = \frac{4.2^{4-1}}{3.2^{3-1}} = \frac{4.2^3}{3.2^2} = \frac{8}{3}$$

ఉదా : $x \to 4$ వద్ద $\frac{x^2-2x-8}{x^2-16}$ యొక్క అవధి కనుగొనుము.

సాధన : $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-2x-8}{x^2-16}$ మామూలు పద్ధతిలో అవధి కనుక్కోంటే ఇక్కడ $\frac{0}{0}$ వస్తుంది. అంటే $(x-4)$ లవము, హారములోనూ ఒక కారణాంకము అన్నమాట. కాబట్టి x^2-2x-8 కు x^2-16 కు కారణాంకాలు వ్రాయగా

$$x^2-2x-8 = x^2-4x+2x-8 = (x-4)\,(x+2)$$

$$x^2-16 = (x-4)(x+4)$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+2)}{(x-4)(x+4)} = \lim_{x\to 4}\frac{x+2}{x+4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

ఉదా : $x\to 5$ వద్ద $\frac{x^2-2x-15}{x^2-3x-10}$ యొక్క అవధి కనుగొనుము.

సాధన : పై ఉదాహరణలో చేసినట్లుగానే యిక్కడ కూడా ప్రమేయంలోని లవమును, హారమునకు కారణాంకాలు కనుక్కోవాలి.

$$x^2-2x-15 = x^2-5x+3x-15 = (x-5)(x+3)$$

$$x^2-2x-10 = x^2-5x+2x-10 = (x-5)(x+2)$$

కాబట్టి $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-2x+15}{x^2-3x-10} = \lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+3)}{(x-5)(x+2)} = \lim_{x\to 5}\frac{x+3}{x+2} = \frac{8}{7}$

ఉదా : $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x}$ కనుగొనుము.

సాధన : $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x}$

లవమును, మరియు హారమును $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}$ చే గుణించగా

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right]\left[\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right]}{x\left[\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right]} = \lim_{x\to 0}\frac{\left\{(1+x^2)-(1-x^2)\right\}}{x\left[\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left[1+x^2-1+x^2\right]}{x\left[\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right]} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x\left[\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\times 0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-2}} = \frac{0}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = 0$$

ఉదా : $\dfrac{x^{-5}-a^{-5}}{x^{-2}-a^{-2}}$ యొక్క అవధి $x \to a$ కనుగొనుము.

సాధన : $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^{-5}-a^{-5}}{x^{-2}-a^{-2}}$ $\quad (x-a)$ చే లవము హారములను భాగించగా

$$= \lim_{x\to a} \frac{\dfrac{x^{-5}-a^{-5}}{x-a}}{\dfrac{x^{-2}-a^{-2}}{x-2}} = \frac{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^{-5}-a^{-5}}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^{-2}-a^{-2}}{x-a}}$$

$$= \frac{-5.\,a^{-5-1}}{-2.\,a^{-2-1}} = \frac{5a^{-6}}{2a^{-3}} = \frac{5}{2a^3}$$

ఉదా : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{a+x^2}-\sqrt{a-x^2}}{x^2} = ?$

సాధన : లవమును హారమును $\sqrt{a+x^2}+\sqrt{a-x^2}$ చే గుణించగా

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left[\left(\sqrt{a+x^2}-\sqrt{a-x^2}\right)\left(\sqrt{a+x^2}+\sqrt{a-x^2}\right)\right]}{x^2\left[\sqrt{a+x^2}+\sqrt{a-x^2}\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(a+x^2-\left(a-x^2\right)\right)}{x^2\left(\sqrt{a+x^2}+\sqrt{a-x^2}\right)} \qquad = \lim_{x\to 0} \frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(\sqrt{a+x^2}+\sqrt{a-x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{\left(\sqrt{a+x^2}+\sqrt{a-x^2}\right)} \qquad = \frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{a}} = \frac{2}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

అనంత అవధులు (Infinite Limits): $f(x)$ ఒక ప్రమేయమైతే $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ అనే దానికి అర్థం మనం పైన భాగాలలో చదివాం. కాని యిందులో a కాని, L కాని లేక రెండూ కాని అనంతం (Infinite) అయినప్పుడు ఆ అర్థం వర్తించదు. అనంతం అనే పదాన్ని $\propto$ అనే గుర్తులో గుర్తిస్తారు. అనంతం అనేది ఒక పదమే కాని అది ఒక సంఖ్య కాదు. $x \to \propto$ అంటే x అనంతమైన విలువను సమీపిస్తుంది. అనగా యే హద్దు లేకుండా పెరుగుతున్న విలువను కలిగివున్నదని అర్థం.

నిర్వచనం : $f(x)$ ఒక ప్రమేయం అయి, L ఒక సంఖ్య అయితే ప్రతి $\in > 0$ కు అనుగుణంగా $x \geq \delta$ అయినప్పుడు $|f(x) - L| < \in$ అయ్యేటట్లు ఒక $\delta > 0$ వుంటే x అనంతమైనప్పుడు $f(x)$, L ని సమీపిస్తుంది అంటాం. దీనినే $x \to \propto$ అయినప్పుడు $f(x)$ కు అవధి అనికూడా అంటారు. సంకేతాల్లో దీనిని $\lim\limits_{x\to\propto} f(x) = L$ అని వ్రాస్తారు.

గమనిక : $\frac{1}{x}$ ను, x కు వ్యుత్క్రమం (resiprical) అంటారు. x విలువ పెరుగుతూ వుంటే $\frac{1}{x}$ విలువ తరుగుతూ వుంటుంది. అంటే $x \to \alpha$ (x విలువ అనంతాన్ని సమీపిస్తుంటే) అయినప్పుడు $\frac{1}{x} \to 0$ అనగా దాని వ్యుత్క్రమం విలువ 0కి సమీపిస్తుంది.

$x \to \propto$ అయినప్పుడు అవధులు కనుక్కోవటం:

ఉదా : $\lim_{x \to \propto} \frac{ax^2+bx+c}{dx^2+5} = ?$

సాధన : x^2 చేత లవమును హారమును భాగించగా

$$\lim_{x \to \propto} \frac{\frac{ax^2+bx+c}{x^2}}{\frac{dx^2+5}{x^2}} = \lim_{x \to \propto} \frac{a + b \cdot \frac{1}{x} + \frac{c}{x^2}}{d + \frac{5}{x^2}}$$

$$x \to \alpha \Rightarrow \frac{1}{x} \to 0 \text{ కావున } \underset{\frac{1}{x} \to 0}{Lim} \frac{a + b \times \frac{1}{x} + c\frac{1}{x} \times \frac{1}{x}}{d + \frac{5}{x} \times \frac{1}{x}} = \frac{a}{d}$$

ఉదా : $\frac{5x^2+2x+7}{x^2+1}$ అనే ప్రమేయము యొక్క అవధి $x \to \propto$ వద్ద కనుగొనుము.

సాధన : $\lim_{x \to \propto} \frac{5x^2+2x+7}{x^2+1}$ లవమును, హారమును x^2 చే భాగించగా

$$= \lim_{x \to \propto} \frac{\frac{5x^2+2x+7}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \lim_{x \to \propto} \frac{5 + \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$x \to \propto$ అయితే $\frac{1}{x} \to 0$ అవుతుంది కాబట్టి

$$\lim_{\frac{1}{x} \to 0} \frac{5 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \lim_{\frac{1}{x} \to 0} \frac{5 + 2 \times \frac{1}{x} + 7 \times \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}} = \frac{5}{1} = 5$$

ఉదా : $\frac{5x^2+2x+7}{x^2+1}$ యొక్క అవధి $x \to \propto$ వద్ద ఎంతో కనుక్కోండి.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+2x+7}{x^2+1}$ లవమును, హారమును x^2 చే భాగించగా

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^2+2x+7}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$x\to\infty$ అయితే $\frac{1}{x}\to 0$ అవుతుంది కాబట్టి

$$\lim_{\frac{1}{x}\to 0}\frac{5+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \lim_{\frac{1}{x}\to 0}\frac{5+2\times\frac{1}{x}+7\times\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}} = \frac{5}{1} = 5$$

ఉదా : $f(x)=\dfrac{x^5+x^3+5}{x^3+9}$ యొక్క అవధి $x\to\infty$ వద్ద ఎంతో కనుక్కోండి.

సాధన : లవమును, హారమును x^5 చే భాగించగా

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^5+x^3+5}{x^5}}{\frac{x^3+9}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^5}{x^5}+\frac{x^3}{x^5}+\frac{5}{x^5}}{\frac{x^3}{x^5}+\frac{9}{x^5}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^5}}{\frac{1}{x^2}+\frac{9}{x^5}}$$

$x\to\infty$ అయితే $\frac{1}{x}\to 0$ అవుతుంది కాబట్టి

$$=\lim_{\frac{1}{x}\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^5}}{\frac{1}{x^2}+\frac{9}{x^5}}=\frac{1}{0} = \infty$$

ఉదా : $f(x)=\dfrac{\sqrt{5x^4+6x^2+4x+1}}{2x^2}$ యొక్క అవధి $x\to\infty$ దగ్గర కనుక్కోండి.

సాధన : $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{5x^4+6x^2+4x+1}}{2x^2}$ లవమును, హారమును x^2 చే భాగించగా

$$= \lim_{x\to\propto} \frac{\frac{\sqrt{5x^4+6x^2+4x+1}}{x^4}}{\frac{2x^2}{x^2}} \quad = \lim_{x\to\propto} \frac{\sqrt{\frac{5x^4}{x^4}+\frac{6x^2}{x^4}+\frac{4x}{x^4}+\frac{1}{x^4}}}{2}$$

$x \to \propto$ అయితే $\frac{1}{x}\to 0$ అవుతుంది కాబట్టి

$$= \lim_{\frac{1}{x}\to 0} \frac{\sqrt{5+6\frac{1}{x^2}+4\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}}{2} \quad = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

గమనిక : $= f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^n$ ప్రమేయమైతే

$$\lim_{n\to\propto} f(x) = e$$

$$\lim_{n\to\propto} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad (x \text{ వాస్తవ సంఖ్య})$$

అవిచ్ఛిన్నత (*Continuity*): కుడివైపు నుంచి అవధి, ఎడమ వైపు నుంచి అవధి గురించి చర్చించేటప్పుడు, అవధి గురించి చర్చించేటప్పుడు ఒక ప్రమేయానికి $f(x)$కు ఒక సంఖ్యా వద్ద అవధి వుండవచ్చు లేకపోవచ్చు అని యింతకు ముందు భాగాలలో వివరించాము. అంతేకాక ఒక $f(a)$ అనగా a వద్ద ప్రమేయం విలువకు సమానం కానక్కర లేదని కూడా వివరించాము. అంతే కాక ఒక $f(x)$ ప్రమేయానికి $x\to a$ వద్ద అవధి ఉన్నప్పటికి అది $f(a)$ అనగా a వద్ద ప్రమేయం విలువకు సమానం కానక్కర లేదని కూడా వివరించాము. ఒక వేళ $f(x)$ యొక్క అవధి $x\to a$ వద్ద వుండి అది $f(a)$ విలువకు సమానం అయినప్పుడు $f(x)$ను అవిచ్ఛిన ప్రమేయం అంటారు. అవిచ్ఛినతను ఈ క్రింది విధంగా నిర్వచిస్తారు.

నిర్వచనం : $f(x)$అనే ఒక ప్రమేయం a సామిప్యలో నిర్వచించబడి $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ అయితే, ఆ ప్రమేయం $f(x)$ a వద్ద అవిచ్ఛినమైనది అంటాం. $[\,f(x)$ *is continious at* $a\,]$ ఒక $[a, b]$ అనే అంతరంలో $f(x)$ నిర్వచించబడి, ప్రతి $C \in [a,b]$ వద్ద $f(x)$ అవిచ్ఛినమైతే, $[a, b]$ మీద $f(x)$ అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం అంటారు. లేక సూక్ష్మంగా $f(x)$ను అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం అంటారు.

ఒక ప్రమేయం అవిచ్ఛిన ప్రమేయమవటానికి, a వద్ద అవిచ్ఛన్నమవటానికి తేడాను జాగ్రత్తగా గమనించండి. a వద్ద $f(x)$ అవిచ్ఛిన్నం కాకపోతే, a వద్ద ఆ ప్రమేయం $f(x)$ విచ్ఛిన్నమైతే, ఆ ప్రమేయాన్ని విచ్ఛిన్న (Discountinious) ప్రమేయం అంటారు.

ఉదా: $f(x) = 3x$ ఒక a వద్ద అవిచ్ఛిన్నమవటమే కాకుండా ప్రతి a వద్ద కూడా అవుతుంది. అందుచే ఈ ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం అవుతుంది.

$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}\ (x \neq 2)$ ఈ ప్రమేయానికి $x\to 2$ వద్ద అవధి **4** అని చూపాం కానీ $f(2)$ నిర్వచించబడలేదు. అంటే

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} \neq f(2)$ కాబట్టి ఈ ప్రమేయం 2 వద్ద విచ్ఛిన్నమైనది.

పైన వివరించిన విషయాలననుసరించి ఒక ప్రమేయం $f(x)$ a వద్ద విచ్ఛిన్నమవటానకి $\lim_{x\to a} f(x)$ వుండి $f(a)$లు లేక పోవటమైనా కావచ్చు కదా ! అవధి లేని కారణంగా అయినా అయివుండవచ్చు.

అవిచ్ఛిన ప్రమేయాలకు కొన్ని సిద్ధాంతాలు యిప్పుడు పరిశీలిద్దాం.

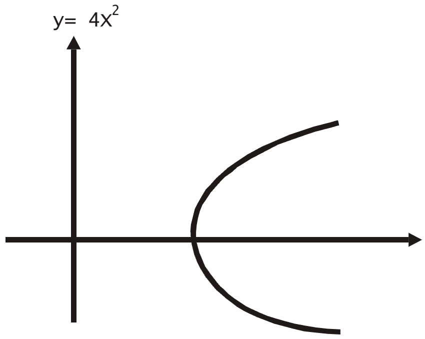
1. $f(x), g(x)$ అనే రెండు ప్రమేయాలు a వద్ద అవిచ్ఛినమైతే ఈ క్రింది ప్రమేయాలు కూడా 'a' వద్ద అవిచ్ఛిన్నమౌతాయి.

1. $f(x)\pm g(x)$ 2. $k\,f(x)$ (k ఒక స్థిర సంఖ్య) 3. $f(x)\times g(x)$ 4. $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$

2. $[a,\ b]$ అనే అంతరం మీద $f(x)$ అవిచ్ఛిన్నమై $f(a)\neq f(b)$ అయితే, $f(a),\ f(b)$ల మధ్య ప్రతి విలువను $f(x)$ ఒక్కసారైనా తీసుకుంటుంది. అనగా $f(a), f(b)$ల మధ్య s ఏదైనా ఒక సంఖ్య అయితే $[f(a)<s<f(b)]$ గాని $f(b)<s<f(a)$ గాని కావచ్చు $f(c)=s$ అయినట్లు ఒక $c\in(a,b)$ వుంటుంది.

ఈ సూత్రం లేక సిద్ధాంతం ప్రకారం $f(x)$ అనే ప్రమేయం $f(a), f(b)$ ల మధ్య విలువలను కనీసం ఒకసారైనా తీసుకుంటుంది. అంటే $f(a), f(b)$ ల మధ్య $f(x)$ తీసుకునే విలువలో ఎటువంటి లంఘనలు కాని, అఘాతాలు కాని వుండవు. $f(x)$ కు గీసిన వక్రములో ఎక్కడా అవిచ్ఛినత గోచరించదు.

ఒక అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం యొక్క రేఖాచిత్రం ఈ క్రింది విధంగా వుంటుంది.



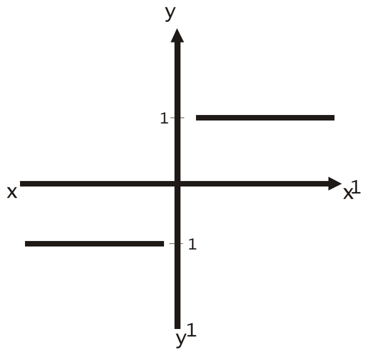
ఒక విచ్ఛిన్న ప్రమేయం యొక్క రేఖాచిత్రం ఈ క్రింది విధంగా వుంటుంది. $f(x)=\frac{|x|}{x}$ $x\neq 0$. $f(x)=0$ $x=0$ అయినప్పుడు

$x>0$ అయినప్పుడు $f(x) = 1$ అవుతుంది.

$x=0$ అయినప్పుడు $f(x)=0$ అవుతుంది.

$x<0$ అయినప్పుడు $f(x)=-1$ అవుతుంది.

ఈ ప్రమేయానికి గీసిన రేఖాచిత్రం



ఈ ప్రమేయము $f(x)$ $x = 0$ దగ్గర విచ్చిన్నమైనది.

ఉదా : $\dfrac{x^2-9}{x-3}$ అనే ప్రమేయం $x=3$ వద్ద విచ్ఛిన్నం అని చూపండి.

సాధన : $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$

ఎడమవైపు అవధి

$$= \lim_{x\to 3-h} f(x) \quad = \lim_{h\to 0} f(3-h) \quad = \lim_{h\to 0} \frac{(3-h)^2-9}{3-h+3}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3^2-6h+h^2-9}{-h} = 6$$

కుడివైపు అవధి

$$\lim_{x\to 3+h} f(x) \quad = \quad \lim_{x\to h} f(3+h)$$

$$= \quad \lim_{x\to h} \frac{(3+h)^2 - 9}{3+h - 3} \quad = \lim_{h\to 0} \frac{9+6h+h^2-9}{h} \; = \; 6$$

$f(0) = \dfrac{0}{0}$ నిర్వచించబడలేదు.

$\therefore \lim_{h^+\to 0} f(x) = \lim_{h\to 0} f(x) \neq f(a)$

ఈ ప్రమేయము $x=3$ వద్ద విచ్ఛిన్నమైనది.

ఉదా : $x=2$ వద్ద $f(x)=x^2+3x-1$ అవిచ్ఛిన్నం అని చూపండి.

సాధన : $f(x)=x^2+3x-1$

ఎడమవైపు అవధి

$$\lim_{x\to 2-h} f(x) = \lim_{h\to 0}(2-h)$$

$$= \lim_{h\to 0}(2-h)^2+3(2-h)-1$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\left(4-4h+h^2\right)+6-3h-1\right] \quad \lim_{h\to 0}\left[4-4h+h^2+6-3h-1\right] = 9$$

కుడివైపు అవధి

$$\lim_{x\to 2+h} f(x) = \lim_{h\to 0} f(2+h) \quad \lim_{h\to 0}\left[(2+h)^2+3(2+h)-1\right]$$

$$\lim_{h\to 0}\left[4+4h+h^2+6+3h-1\right] = 9$$

$$f(2) = 2\times 2+3\times 2-1 = 4+6-1 = 9$$

ఇచ్చిన ప్రమేయంలో $x=2$ వద్ద ఎడమవైపు అవధి కుడివైపు అవధి మరియు 2 వద్ద ప్రమేయం యొక్క విలువ సమానం అనగా

$$\lim_{h\to 0} f(2+h) = \lim_{h\to 0} f(2-h) = f(2)$$

కావున యిచ్చిన ప్రమేయము $x=2$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నం అవుతుంది.

ఉదా : ఒక ప్రమేయము ఈ క్రింది విధంగా నిర్వచించబడింది.

$f(x)=\dfrac{6x}{x+2}$, $x<1$ అయితే, $f(1)=2$

$f(x)=\dfrac{x+3}{x}$, $x>1$ అయితే

ఈ ప్రమేయం (-3, 3) అంతరంలో అవిచ్ఛిన్నమో కాదో పరీక్షించండి.

సాధన : $f(x)=\dfrac{6x}{x+2}$ $x<1$ అయినప్పుడు అంటే యిచ్చిన అంతరం $[-3,3]$ ననుసరించి -3 కి 1 మధ్యలో వున్నప్పుడు పైన యివ్వబడిన ప్రమేయం యొక్క రూపాన్ని పరిగణలోకి తీసుకుంటాము. $f(x)=\dfrac{6x}{x+2}$ లో హారము $x=-2$ అయినప్పుడు 0

అవుతుంది. $x=-2$ -3 కి మధ్యలో 1 ఒక బిందువు కాబట్టి $f(x)=\dfrac{6x}{x+2}$ వద్ద విచ్ఛిన్నమైనది.

రెండవ భాగం :

$$f(1)=2 \qquad x=1 \text{ అయినప్పుడు}$$

ఎడమవైపు అవధి $\lim\limits_{x\to 1-h}\dfrac{6x}{x+2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{6(1-h)}{(1-h)+2}=\dfrac{6}{3}=2$

కుడివైపు అవధి =

$$\lim_{x\to 1+h}\frac{x+3}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)+3}{h}=\frac{4}{1}=4$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

యిచ్చిన ప్రమేయము $x=1$ వద్ద విచ్ఛిన్నమయినది.

కాబట్టి పైన యివ్వబడిన ప్రమేయం $x=1$ వద్ద మరియు $x=-2$ వద్ద విచ్ఛినము. మిగిలిన అన్ని విలువలు వద్ద అది అవిచ్ఛినము.

2.8 సారాంశము:

ఈ భాగంలో ఒక ప్రమేయం యొక్క అవధి, దానికి అర్థం, ఈ అవధులకు గల ధర్మాలు, వివిధ ప్రమేయాలకు అవధులను పలు ఉదాహరణల ద్వారా తెలియపరిచాం. స్వతంత్ర చలరాశి అనంతమును సమీపిస్తున్నప్పుడు అవధి ఎలా కనుక్కోవాలి మొ॥ వాటి గురించి తెలుసుకున్నాం. అవిచ్ఛిన్నత ప్రమేయం యొక్క ముఖ్య లక్షణం. మరియు అవిచ్ఛినతకు గల ధర్మాలు, పరిశీలించాము. అంతేకాక విచ్ఛిన్న అవిచ్ఛిన ప్రమేయాల రేఖా చిత్రాలు గురించి కూడా విశదీకరించాము.

2.9 స్వయం సమీక్షా ప్రశ్నలు:

1. అంతరం, సామీప్యం, అవధి, ఎడమవైపు అవధి, కుడివైపు అవధులను నిర్వచించండి.
2. అవిచ్ఛినతకు, అవధికి మధ్యగల సంబంధాన్ని తెలియజేయండి.
3. $f(x)=x^3+6x+9$ అయితే $x\to 0$ వద్ద $f(x)$ అవధి కనుగొనుము.
4. $f(x)=3x^2-2x+4$ అయితే $x\to 2$ వద్ద కుడివైపు అవధి, ఎడమవైపు అవధి కనుగొనండి.
5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-x-10}{x^2-4}$ కనుగొనుము.
6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$ = ?
7. $\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{ax^2+bx+c}{dx^2+f}$ కనుగొనుము.

8. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x+a} - \sqrt{2a}}{x-a}$

9. x^2+6x-3 అనే ప్రమేయం $x=1$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నం అని చూపండి.

10. $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$ అనే ప్రమేయం $x=3$ వద్ద అవిచ్ఛినం అవునో కాదో తెలపండి.

2.10 చదవవలసిన పుస్తకాలు:

1. R.G. Allen : Mathematical Analysis for Economists
2. Mehatha & Madani : Mathematics for Economists
3. G.S. Monga : Mathematics & Statistics for Economics

పాఠం 3 సరళరేఖ, వృత్తము మరియు పరావలయము

ఈ పాఠ్యభాగం చదివిన తరువాత మీరు ఈ క్రింది అంశాలను తెలుసుకోగలరు.

* బిందువు - దాని నిరూపకాలు, బిందువుల మధ్య దూరం ఖండన బిందువు దాని నిరూపకాలు గురించి
* సరళ రేఖ నిర్వచనం, సరళ రేఖ వాలు, సరళ రేఖ సమీకరణం, వివిధ విలువలు యిచ్చిన సరళరేఖ సమీకరణాలు గురించి
* అర్థశాస్త్రంలో సరళ రేఖ సమీకరణము అన్వయించి సమస్యలు సాధించుట
* వృత్తము, వృత్త సమీకరణము, స్పర్శరేఖ, నార్మల్ రేఖ
* పరావలయము సమీకరణము, స్పరశరేఖ, నార్మాల్ రేఖ

పాఠ్య నిర్మాణ క్రమం

3.1 పరిచయం:

వివిధ ధరల వద్ద ఒక వస్తువును కొనుగోలు చేయు పరిమాణమును తెలిపే పట్టికను మార్కెట్ డిమాండ్ పట్టిక అంటారని మనకు తెలుసు. ఈ పట్టికలోని ధరలను Y- అక్షము మీద, పరిమాణము x- అక్షము మీద కొలచి ధర తదనుగుణమైన పరిమాణాన్ని ఒక బిందువు ద్వారా గుర్తించి, అలాంటి బిందువులన్ని కలిపితే వచ్చే రేఖను డిమాండ్ రేఖ అంటారని మనం చదువుకున్నాం. అంటే డిమాండ్ రేఖ అనేక బిందువుల సమూహము అని తెలుస్తుంది. అసలు బిందువును సమతలం పై ఎలా గుర్తిస్తాము. రెండు బిందువుల మధ్య దూరం ఎలా కనుక్కోవాలి. సరళరేఖ అంటే ఏమిటి? సరళరేఖను సమీకరణ రూపంలో ఎలా చూపుతాం, వృత్తాన్ని ఎలా నిర్మిస్తాము, దాని సమీకరణం, పరావలయము దాని సమీకరణము ముఖ్యంగా అర్థశాస్త్రంలో వీటిని ఎలా ఉపయోగిస్తాం మొదలైన వాటి గురించి ఈ భాగంలో నేర్చుకుంటాం.

3.2 బిందువు - దాని నిరూపకాలు (Point-its cordinates):

ఒక సమతలాన్ని X^1OX మరియు YOY^1 అనే రెండు వ్యతిచ్ఛేదక రేఖలు '0' వద్ద లంబంగా ఖండించుకుంటే X^1OX ని X - అక్షము అని, YOY^1 ని Y - అక్షము అని పిలుస్తాము. ఈ రెండింటిని రెండు లంబాక్షాలని, 0 మూలబిందువు (కేంద్రము) అని అంటాం. క్రింద పటంలో చూపిన విధముగా 'P' ఒక బిందువు అనుకుందాం. అయితే P అనే స్థలాన్ని చేరుకోవటానికి కేంద్రం నుండి X అక్షము మీద 'M' వరకు Y అక్షం మీద కేంద్రం నుండి 'N' వరకు ప్రయాణం చేయాలి. అంటే P అనే బిందువు X అక్షము మీద $OM = x_1$ దూరం మరియు Y అక్షము మీద $ON = Y_1$ దూరంలో ఉంది అన్నమాట. అంటే P అనే బిందువును గుర్తించాలంటే మనకు రెండు కొలతలు అవసరము (1) X అక్షం మీద కేంద్రం నుండి దూరం (2) Y అక్షం మీద కేంద్రంనుండి దూరం. ఈ రెండు కొలతలను వరుసగా X నిరూపకం అని, Y నిరూపకం అని అంటాం. వీటిని P బిందువు యొక్క నిరూపకాలు అంటాం. నిరూపకాలను క్రమయుగ్మంగా (X, Y) గా సూచిస్తాం.

3.2.1 రెండు బిందువుల మధ్య దూరం కొలవటానికి సూత్రం: $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ లు రెండు బిందువులు అయితే ఈ రెండు బిందువుల మధ్య దూరాన్ని p_1, p_2 తో లేక D తో సంకేతంగా సూచిస్తాము. D ని కొలవటానికి ఈ క్రింది సూత్రం ఉపయోగిస్తాం.

$$D=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

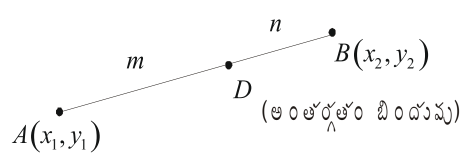
ఉదా: A (2, 3) B (5, 1) అనే రెండు బిందువుల మధ్య దూరాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: A (2, 3) B (5, 1) ఇచ్చిన బిందువులు అయితే సూత్రంలోని సంకేతాలకు అనుసందానిస్తే $x_2 = 2,\ y_1 = 3 \qquad x_2 = 5,\ \ y_2 = 1$

కాబట్టి $D=\sqrt{(5-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{(3)^2+(2)^2} = \sqrt{9}+4 = \sqrt{13}$

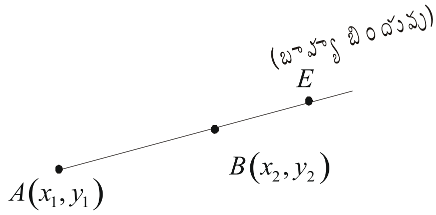
3.2.2 విభజన బిందువు (*Dividing Point*): రెండు బిందువుల మధ్య దూరాన్ని ఇచ్చిన నిష్పత్తిలో ఖండించే బిందువు నిరూపకాలు మనం తెలుసుకోవచ్చు. క్రింది పటంలో చూపిన విధంగా $A(x_1 y_1)$ $B(x_2 y_2)$ అనే బిందువుల మధ్య దూరాన్ని D అనే బిందువు $m:n$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది అనుకోండి. D ని అంతర్గతం బిందువు (*Internal Point*) అంటాము. ఈ బిందువు

యొక్క నిరూపకాలు $\left[\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2-ny_1}{m+n}\right]$ అవుతాయి.



ఈ క్రింది చూపిన పటంలో AB అనే రేఖా ఖండము యొక్క దూరాన్ని 'E' అని బిందువు బాహ్యంగా (*External*) $m:n$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది అనుకుంటే E ని బాహ్య బిందువు అని దాని నిరూపకాలు ఈ క్రింది సూత్రం ఉపయోగించి కనుక్కుంటాం.

$$E\left[\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right]$$



ఉదా(1): A (-1, 2) B (6, -4) బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండాన్ని 3:2 నిష్పత్తిలో అంతర్గతంగాను, $2:3$ నిష్పత్తిలో బాహ్యంగాను విభజించే బిందువుల నిరూపకాలను కనుక్కోండి.

సాధన: $D\ (x, y)$ అనే బిందువు AB రేఖా ఖండాన్ని $3:4$ నిష్పత్తిలో అంతర్గతంగా విభజిస్తుంది అనుకుందాం. అప్పుడు ఇచ్చిన విలువలను సంకేతాలలో సూచిస్తే $m=3, n=4, x_1= -1, y_1=2, x_2=6, y_2= -4$ సూత్రం ప్రకారం D యొక్క X నిరూపకం $\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$

$$=\frac{3\times 6\ -\ 4\times 1}{7}=\frac{14}{7}=2$$

సూత్రం ప్రకారం D యొక్క y నిరూపకం $\frac{my_2+ny_1}{m+n}$

$$=\frac{3\times -4\ +\ 4\times 2}{7}=\frac{-12+8}{7}=\frac{-4}{7}$$

కాబట్టి D నిరూపకాలు $\left(2, \frac{-4}{7}\right)$

$E\left(x^1,\ y^1\right)$ అనే బిందువు ABరేఖా ఖండాన్ని $2:3$ నిష్పత్తిలో బాహ్యంగా విభజిస్తుంది అనుకుంటూ ఇచ్చిన విలువలను సంకేతాలతో సూచించగా $m=2, n=3, x_1= -1, y_1=2, x_2=b, y_2= -4$ అవుతాయి.

సూత్రం ప్రకారం E యొక్క X నిరూపకం: $\frac{mx_2-nx_1}{m-n}\ =\frac{2\times 6-3\times -1}{2-3}=\frac{15}{-1}=-15$

E యొక్క y నిరూపకం : $\frac{my_2-ny_1}{m-n}=\frac{2\times -4\ -\ 3\times 2}{2-3}=\frac{-8-6}{-1}=\frac{14}{1}$

కాబట్టి E నిరూపకాలు (-15, 14)

ఉదా(2): $A(6, -5)$ $B(-7, -15)$బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండాన్ని $R\left(\frac{14}{11}, \frac{-95}{11}\right)$బిందువు ఏ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుందో కనుక్కోండి.

సాధన: ఈ సమస్యలో కావలసిన నిష్పత్తి $\lambda:1$అనుకోండి. ఇచ్చిన విలువలు $x_1=6, y_1= -5, x_2= -7, y_2= -15, m=\lambda, n=1$

AB రేఖా ఖండాన్ని $\lambda:1$ నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువు నిరూపకాలు (x, y) అనుకుంటే $x=\frac{\lambda\times -7+6}{\lambda+1}$ $y=\frac{\lambda(-15)+(-5)}{\lambda+1}$ అవుతాయి.

ఇచ్చిన దత్తాంశాన్ని అనుసరించి $\frac{-7\lambda+6}{\lambda+1}=\frac{14}{11}$

అ.గు.చేయగా $11(-7\lambda+6)=14(\lambda+1)$

$$-77\lambda+66=14\lambda+14$$
$$66-14=77\lambda+14\lambda$$
$$52=91\lambda$$
$$\lambda=\frac{52}{91}=\frac{4}{7}$$

కాబట్టి ఇచ్చిన బిందువు రేఖా ఖండాన్ని $4:7$ నిష్పత్తిలి విభజిస్తుంది.

ఉదా(3): X, Y నిరూపాక్షాలు, $A(5,3), B(-7,-4)$ అనే బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండాన్ని, ఏ నిష్పత్తిలో విభజిస్తాయో కనుక్కోండి.

సాధన: కావల్సిన నిష్పత్తి $\lambda:1$ అనుకుంటే

Y అక్షము AB రేఖా ఖండాన్ని $P(x, y)$ వద్ద ఖండిస్తుంది $\lambda:1$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది అనుకుందాం.

సూత్రం ప్రకారం P యొక్క X నిరూపకం $=\frac{\lambda\times 5+1\times -7}{\lambda+1}=\frac{5\lambda-7}{\lambda+1}$

కాని P యొక్క X నిరూపకం Y అక్షాంశం మీద 0 అవుతుంది.

కనుక

$$\frac{5\lambda-7}{\lambda+1}=0 \quad \Rightarrow \quad 5\lambda-7=0$$
$$\Rightarrow \quad 5\lambda=7$$
$$\lambda=7/5$$

కాబట్టి AB రేఖా ఖండాన్ని Y అక్షము $7:5$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.

అదే విధంగా X అక్షము AB రేఖా ఖండాన్ని $K:1$ నిష్పత్తిలో Q అనే బిందువు వద్ద విభజిస్తుంది అనుకోండి. సూత్రం ప్రకారం Q యొక్క y నిరూపకం $=\frac{k\times 3 \quad 1\times -4}{k+1}=\frac{3k-4}{k+1}$ కాని X అక్షము మీద Y యొక్క నిరూపకము '0' అవుతుంది.

కాబట్టి $\frac{3k-4}{k+1}=0$ అవుతుంది.

అంటే $3k - 4 = 0$

$k = 4/3$ అవుతుంది.

అంటే AB రేఖా ఖండాన్ని X అక్షము $4:3$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది అన్నమాట.

గమనిక: విభజన నిష్పత్తి $1:1$ అయినట్లయితే ఆ బిందువు మధ్య బిందువు అవుతుంది.

3.3 సరళ రేఖ (*Stright Line*):

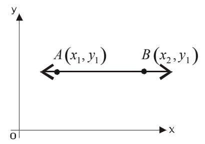
రెండు వేర్వేరు బిందువుల మధ్య అతి తక్కువ దూరాన్ని సరళ రేఖ అంటాము. అనగా సరళరేకను నిర్వచించటానికి రెండు బిందువులు కావాలి. ఆ రెండు బిందువులను A, B అనుకుంటే AB బిందువుల ద్వారా పోయే సరళరేఖను $\overleftrightarrow{AB}$ అని సూచిస్తాము.

సరళరేఖ వాలు (Slope of a Stright Line): $A\left(x_1, y_1\right) B\left(x_2, y_2\right)$ అనే రెండు వేర్వేరు బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖ యొక్క వాలును m^1 సంకేతంతో సూచిస్తాము. m విలువ ఈ క్రింది విధంగా కనుక్కుంటాము.

$$\text{వాలు} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

($\overleftrightarrow{AB}$ అనే సరళ రేఖ యొక్క స్పర్శరేఖ (*tangent*) x అక్షము పై 'θ' (*Theta*) అనే కోణాన్ని ధనాత్మక దిశలో కలిగి ఉంటే $Tan\,\theta$ ని ఆ సరళ రేఖ వాలు అని అంటాము)

1. ఒక సరళ రేఖ X- అక్షమునకు సమాంతరముగా (*Parallel*) ఉంటే దాని వాలు సున్నా అవుతుంది. క్రింది పటము చూడుము.

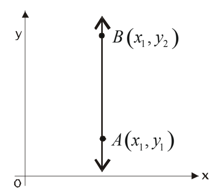


వివరణ: $\overleftrightarrow{AB}$ సరళ రేఖ X అక్షంనకు సమాంతరముగా వుంది. అనగా బిందువు A యొక్క Y- నిరూపకం బిందువు B యొక్క Y- నిరూపకం విలువలు సమానంగా వుంటాయి.

కాబట్టి $\overleftrightarrow{AB}$ వాలు $= m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{0}{x_2 - x_1} \; 0$

కావున ఒక సరళ రేఖ X అక్షంనకు సమాంతరముగా ఉంటే దాని వాలు 'సున్నా' అవుతుందన్నమాట.

2. ఒక సరళ రేఖ Y అక్షమునకు సమాంతరముగా ఉంటే దాని వాలు 'అనంతము' ($\propto$) (అనిర్వచితం) అవుతుంది. క్రింది పటము చూడుము.



వివరణ : ఈ చిత్రంలో $\overline{AB}$ సరళరేఖ Y అక్షమునకు సమాంతరముగానున్నది కావున బిందువు A లో X నిరూపకముల బిందువు B లోని X- నిరూపకముల విలువలు సమానంగా వుంటుంది.

కావున $\overline{AB}$ యొక్క వాలు $=\frac{y_2-y_1}{x_2\ x_1}=\frac{y_2-y_1}{0}=$(అనిర్వచితం)

కాబట్టి ఏదైనా ఒక సరళరేఖ Y అక్షంనకు సమాంతరముగా ఉన్నయెడల దాని వాలు 'అనంతము' అవుతుంది.

గమనిక: 1. రెండు సరళరేఖల వాలులు సమానంగా ఉంటే ఆసరళరేఖలు సమాంతరంగా ఉంటాయి. $m_1 = m_2$

(ఎ). m_1 , m_2 లు వాలులుగా గల రెండు సరళ రేఖలు లంబంగా వుంటె వాటి వాలుల లబ్ధం $(m_1 \times m_2)$ - 1కి సమానం.

సరళరేఖ సమీకరణము (*Equation of a stright Line*): రెండు వేర్వేరు బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖను సమీకరణ రూపంలో కూడా వ్రాయవచ్చు. ఇచ్చినటువంటి దత్తాంశము ఆధారముగా సరళరేఖా సమీకరణము కనుగొనే పద్ధతి మారుతూ వుంటుంది. ఈ విభాగంలో సరళరేఖ వివిధ సమీకరణాల రూపాలలో ఎలా తెలపవచ్చో తెలుసుకుందాం.

3.3.1 (1) రెండు బిందువులు ఇచ్చిన సరళరేఖ సమీకరణం కనుక్కొనటానికి సూత్రం: $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ అనేవి రెండు బిందువులు అయిన ఈ రెండు బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖ సమీకరణం.

$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ అవుతుంది. (లేక) $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_1)}(x - x_1)$అవుతుంది.

దీనిని సరళరేఖ సమీకరణము యొక్క రెండు బిందువుల రూపం అంటాము.

పై వ్రాసిన సమీకరణంలో $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ వాలు (m) అవుతుంది.

దానిని 'm' తో సూచిస్తామని మనకు తెలుసు. అంచేత పై సమీకరణాన్ని $y - y_1 = m(x - x_1)$అని కూడా వ్రాయవచ్చు.

ఉదా: $A(3, 5)$ $B(4, 6)$ అనే బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖ సమీకరణాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: ఇచ్చిన బిందువులు $A(3, 5)$ $B(4, 6)$అనగా $x_1 = 3, y_1=5, x_2 = 4, y_2 =6$ అవుతాయి. సూత్రంలో ఈ విలువలు ప్రతిక్షేపించగా

$y-5=\frac{6-5}{4-3}(x - 3)$

$y - 5 = \frac{1}{1}(x - 3)$

$y - 5 = x - 3$ (లేక)

$y - 5 - x + 3 = 0$ (లేక)

$y - x - 2 = 0$ (లేక)

$x - y + 2 = 0$ A (3,5), B(4,6) బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖ సమీకరణం అవుతుంది.

3.3.2 (2) ఒక బిందువు, వాలు ఇచ్చిన సరళరేఖ సమీకరణం కనుక్కోటానికి సూత్రం: $A(x_1, y_1)$ అనే బిందువు ద్వారా పోతూ *'m'* అనే వాలు కలిగిన సరళ రేఖ సమీకరణం $y - y_1 = m(x - x_1)$ అవుతుంది. దీనిని వాలు, బిందువు రూపం అంటాము.

గమనిక: పై (1) సూత్రంలో $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ కి బదులుగా *'m'* వ్రాయగా ఈ సూత్రం వస్తుంది.

ఉదా: *A (5,9)* బిందువు ద్వారా పోతూ, 5/7 వాలుగా గల సరళరేఖ సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: *A (5,9)* బిందువు, వాలు 5/7 ఇచ్చినారు అనగా $x_1 = 5,\ y_1 = 9,\ m = 5/7$

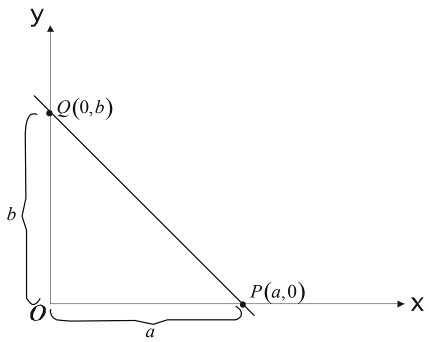
(x_1, y_1) బిందువు గుండా పోతూ m వాలుగా కలిగిన సరళరేఖ సమీకరణ సూత్రం $y - y_1 = m(x - x_1)$ కావున, యిచ్చిన విలువలు ఈ సూత్రంలో ప్రతిక్షేపించగా

అనగా $y - 9 = \frac{5}{7}(x - 5)$

అడ్డ గుణకారము చేయగా

$$7(y - 9) = 5(x - 5)$$
$$7y - 63 = 5x - 25$$
$$7y = 5x - 25 + 63$$
$$7y = 5x - 38 \text{ (లేక)}$$
$$7y - 5x + 38 = 0$$

3.3.3 'అంతరఖండాలు' ఇచ్చినప్పుడు సరళ రేఖ సమీకరణం కనుక్కోవటం: ఒక సరళ రేఖ $\overleftrightarrow{AB}$ x అక్షంను *'P'* బిందువు వద్ద y అక్షమును *'Q'* అనే బిందువు వద్ద ఖండిస్తుంది అనుకోండి. పటం చూడండి.



P యొక్క నిరూపకాలు *(a, 0)*

Q యొక్క నిరూపకాలు *(0, b)* అవుతాయి.

అయితే *'a'* ని *X*- అంతరఖండమని, *'b'* ని *Y* - అంతరఖండమని పిలుస్తాము.

X అంతర్ ఖండము $'a'$, Y అంతర్ ఖండం $'b'$ గా గల సరళ రేఖ సమీకరణము $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ అవుతుంది. ఇది $(a, 0)$ $(0, b)$ బిందువుల ద్వారా పోతుందని గమనించాలి. ఈ సమీకరణ రూపాన్ని 'అంతర్ ఖండాల ' రూపం అంటాము.

ఉదా: X అంతర ఖండము 2, Y అంతర ఖండము 5 గా గల సరళ రేఖ సమీకరణాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: X- అంతర ఖండము అనగా 'a' = 2

Y- అంతర ఖండము అనగా 'b' = 5

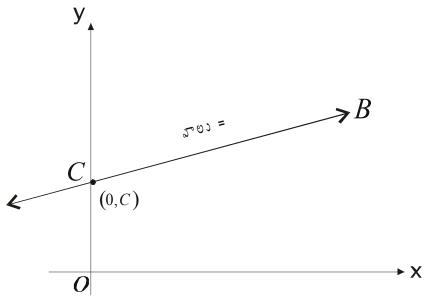
సమీకరణ సూత్రం $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ a, b విలువలు ప్రతిక్షేపించగా $\frac{x}{2}+\frac{y}{5}=1$,

సూక్ష్మీకరించగా $\frac{5x+2y}{10}=1$

$$5x + 2y = 10$$
$$5x + 2y - 10 = 0$$

3.3.4 ఒక అంతర ఖండము వాలు ఇచ్చిన సరళరేఖ సమీకరణంకనుక్కోండి:

సాధన: m వాలుగా, c, Y అంతర్ ఖండముగా గల సరళరేఖ సమీకరణము $y = mx + c$ అవుతుంది.



ఎందుకంటే y అంతర ఖండాన్ని $'c'$ బిందువుగా వ్రాస్తే (o, c) అవుతుంది. ఒక బిందువు వాలు తెలిసిన సరళ రేఖ సమీకరణము $y-y_1=m(x-x_1)$ అవుతుందని మనకు తెలుసు. ఇందులో $y_1 = c$ $x_1 = 0$ వ్రాయగా $y - c = mx$ లేక $y = mx + c$ అవుతుంది. దీనిని సరళ రేఖ సమీకరణము యొక్క వాలు, అంతర్ ఖండ రూపం అంటాము. ఈ రూపానికి ఒక ప్రాముఖ్యత ఉంది. ఎందుకనగా ఈ రూపంలో x యొక్క గుణకము సరళరేఖ వాలు అవుతుంది. కావున సరళరేఖ సమీకరణము తెలిసిన దానిని ఈ రూపంలోకి మార్చి సరళరేఖ వాలును తెలుసుకోవచ్చు.

ఉదా: ఒక సరళ రేఖ y అక్షమున 4 దగ్గర ఖండిస్తుంది. దాని వాలు 3 అయిన ఆ సరళ రేఖ సమీకరణాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: y- అంతర్ ఖండము 4 దీనిని బిందువుగా మార్చితే నిరూపకాలు (0, 4) అవుతాయి. సరళరేఖ వాలు $'m'$ = 3. $x_1 = 0,\ y_1 = 4$ కావున సరళరేఖ సమీకరణము

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 4 = 3(x - 0)$

$y - 4 = 3x$

$y = 3x + 4$

ఉదా: రెండు బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖ సమీకరణము $7x + 3y + 2 = 0$ అయిన సరళ రేఖ వాలు కనుక్కోండి.

సాధన: ఇచ్చిన సమీకరణం ఆధారంగా సరళ రేఖ వాలు కనుక్కోవాలి. అంటే సమీకరణం రూపం, వాలు, అంతర్ ఖండం రూపంలోకి మార్చాలి. దానికై అనుసరించవలసిన సోపానాలు (*Steps*)

1. y కలిగిన పదములను '=' కు ఒక వైపున ఉంచి మిగిలిన పదాలన్ని '=' కు రెండవ వైపుకు మార్చండి.
2. y యొక్క గుణకము 1 అయ్యేలా చూడండి. అనగా y యొక్క గుణకము చేత '=' కు రెండు వైపులా భాగిస్తే y యొక్క గుణకం ఒకటి అవుతుంది.
3. ఇప్పుడు వచ్చిన సమీకరణంలోని x యొక్క గుణకాన్ని గుర్తుతో సహా తీసుకోండి. అదే సరళరేఖ వాలు అవుతుంది.

గమనిక: సరళరేఖ వాలు $= - \dfrac{x \text{ గుణకము}}{y \text{ గుణకము}}$ అవటం గమనించండి.

ఉదా: $5x + 7y - 3 = 0$ అనే సమీకరణంచే సూచించబడే సరళరేఖ వాలును కనుక్కోండి.

సాధన: ఇచ్చిన సరళ రేఖ సమీకరణము

$5x + 7y - 3 = 0$ దీని రూపాన్ని

$y = mx + c$ రూపంలోకి మార్చాలి

1. $5x$, 3ని '=' ఆవలి వైపుకు తీసుకుపోగా $7y = -5x + 3$ అవుతుంది.

2. ' 7' చే '='కి ఇరువైపులా భాగిస్తే

$$\frac{7y}{7} = \frac{-5x + 3}{7}$$

$$y = \frac{-5x}{7} + \frac{3}{7}$$ అవుతుంది.

3. పైన వచ్చిన ఫలితంలో x యొక్క గుణకము గుర్తుతో సహా $\frac{-5}{7}$.

కాబట్టి సరళరేఖ యొక్క వాలు $\frac{-5}{7}$ అవుతుంది. (లేక) వాలు = $= - \dfrac{x \text{ గుణకము}}{y \text{ గుణకము}}$

గమనిక: సరళరేఖ సమీకరణము అంతర్ ఖండ రూపంలో దాని వాలు కనుగొనటానికి ఈ క్రింది సూత్రాన్ని ఉపయోగిస్తాము.

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ సరళరేఖ సమీకరణము అయితే ఈ సరళ రేఖ వాలు $= - \dfrac{y \text{ అంతర్ఖండము}}{x \text{ అంతర్ఖండము}} = -\dfrac{b}{a}$ అవుతుంది.

సమీకరణము ద్వారా సూచించబడే ఒక సరళరేఖ Y అక్షాన్ని X అక్షాన్ని ఎక్కడ ఖండిస్తుందో (అనగా X అంతర్ ఖండము Y అంతర్

ఖండము యొక్క విలువలు) తెలుసుకోవాలంటే ఇచ్చిన సమీకరణాన్ని అంతర్ ఖండ రూపంలోకి మార్చాలి. అప్పుడు X యొక్క హారము X అంతర్ ఖండాన్ని, Y యొక్క హారము Y అంతర్ ఖండాన్ని సూచిస్తాయి. (లేదా) ఇచ్చిన సమీకరణంలో $X = 0$ ప్రతిక్షేపించగా వచ్చే Y విలువ Y అంతర్ ఖండమౌతుంది. అలాగే $Y = 0$ ప్రతిక్షేపించినచో వచ్చిన X విలువ X అంతర్ఖండమౌతుంది.

ఉదా: $3x + 2y - 9 = 0$ అనే సమీకరణం చే సూచించబడే సరళరేఖ యొక్క X మరియు Y అంతర్ ఖండాలు కనుక్కోండి. అంతర్ ఖండాలుపయోగించి వాలు కనుక్కోండి.

సాధన: ఇచ్చిన సమీకరణం $3x + 2y - 9 = 0$ లేక $3x + 2y = 9$-----------(1)

(1) దీనిలో $x = 0$ వ్రాస్తే Y అంతర్ ఖండం విలువ వస్తుంది

$x = 0$ వ్రాయగా $3 \times 0 + 2y = 9$

కాబట్టి $y = \frac{9}{2}$

కావున Y అంతర్ ఖండం 9/2 అన్నమాట. అలాగే సమీకరణంలో (1)లో $y = 0$ వ్రాయగా

$3x + 2 \times 0 = 9$

కాబట్టి $3x = 9$ $\quad x = 9/3 = 3$

కావున X అంతర్ ఖండం 3 అవుతుంది.

$$\text{వాలు} = -\frac{y \text{ అంతర్ఖండము}}{x \text{ అంతర్ఖండము}} = -\frac{9/2}{3} = -\frac{9}{2} \times \frac{1}{3} = -3/2$$

3.3.4 ఇచ్చిన బిందువు ద్వారా పోతూ ఇచ్చిన సరళరేఖకు సమాంతరముగా ఉండే సరళరేఖ సమీకరణము: వాలు గురించి నేర్చుకునేటప్పుడు రెండు సరళరేఖల వాలులు సమానమైతే ఆ సరళరేఖలను సమాంతర సరళ రేఖలని వాటి వాలుల లబ్ధం '-1'కి సమానం అయితే వాటిని లంబరేఖలంటారని తెలుసుకున్నాం. ఆ విషయాన్ని ఈ సమస్య సాధించేటప్పుడు స్ఫురణకు తెచ్చుకుందాం. అలాగే ఈ క్రింది సోపానాలు అనుసరిస్తూ ఈ సమస్యను సాధించవచ్చు.

1. ఇచ్చిన సరళరేఖ సమీకరణం నుండి 'వాలు' కనుక్కోండి. దానిని 'm' అనుకోండి.
2. మనకు కావల్సిన సరళరేఖ ఇచ్చిన సరళరేఖకు సమాంతరముగా ఉంటుంది కాబట్టి ఆ సరళరేఖ వాలు కూడా 'm' అవుతుంది.
3. ఇప్పుడు మనకు కావల్సిన సరళరేఖ వాలు 'm', మరియు అది ఏ బిందువు (x_1, y_1)ద్వారా పోతుందో తెలుసు కాబట్టి

   $y - y_1 = m(x - x_1)$సూత్రాన్ని ఉపయోగించి సరళరేఖ సమీకరణం కనుక్కోవచ్చు.

ఉదా: $3x + 5y + 6 = 0$ అనే సరళరేఖకు సమాంతరముగా ఉంటూ (-3, 2) అనే బిందువు ద్వారా పోయే సరళరేఖ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: ఇచ్చిన సరళరేఖ సమీకరణము

$3x + 5y + 6 = 0 =$ - **దీని వాలు**$= \frac{x \text{ గుణకము}}{y \text{ గుణకము}} = -\frac{3}{5}$ అవుతుంది.

మనం కనుక్కోవలసిన సరళరేఖ. ఇచ్చిన సరళరేఖకు సమాంతరంగా ఉంటుంది కాబట్టి, దాని వాలు కూడా $-\frac{3}{5}$ అవుతుంది. మరియు ఈ సరళరేఖ (-3, 2) అనే బిందువు ద్వారా పోతుంది కనుక $m = \frac{-3}{5}, x_1 = -3, y_1 = 2$ అవుతాయి.

కాబట్టి సరళ రేఖ సమీకరణం

$y - y_1 = m(x - x_1)$ సూత్రాన్ననుసరించి

$$y - 2 = \frac{-3}{5}\left(x - (-3)\right)$$

$$y - 2 = \frac{-3}{5}(x+3)$$

$$5y - 10 = -3x - 9$$

$$5y + 3x - 1 = 0 \text{ (or) } 3x + 5y - 1 = 0$$

గమనిక: పై రెండు సరళరేఖ సమీకరణాలలో భేదం స్థిరపదం (*Constant Term*)లోనే వుందని గమనించడండి. ఒకటి 6, ఇంకొకటి -1 అయింది.

3.3.5 ఇచ్చిన బిందువు ద్వారా పోతూ ఇచ్చిన సరళరేఖకు లంబంగా ఉండే సరళరేఖ సమీకరణం కనుగొనుట: ఇచ్చిన సరళరేఖ వాలు m_1 కనుక్కొని దాని ఆధారంగా కావల్సిన సరళరేఖ వాలు m_2 ఈ విధంగా కనుక్కోవాలి. సరళరేఖలు ఒకదానికొకటి లంబంగా వున్నాయి కాబట్టి వాటి వాలుల లబ్దం '-1'కు సమానం కావాలి కాబట్టి

అంటే $m_1 \times m_2 = -1$ కావాలి. m_1 విలువ తెలుసు కాబట్టి $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ అవుతుంది.

అంటే కావాల్సిన సరళరేఖ వాలు $= -\dfrac{1}{\text{ఇచ్చిన సరళరేఖ వాలు}}$ అవుతుంది.

ఆ తరువాత పై విధంగానే సూత్రానుపయోగించి సరళ రేఖ సమీకరణం కనుకుంటాం.

ఉదా: (5, 2) అనే బిందువు ద్వారా పోతూ $4x + 7y - 3 = 0$ సరళ రేఖకు లంబంగా వుండే సరళ రేఖ సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన : ఇచ్చిన సరళ రేఖ సమీకరణం $4x + 7y - 3 = 0$

కాబట్టి ఇచ్చిన సరళరేఖ వాలు $= -\dfrac{x \text{ గుణకము}}{y \text{ గుణకము}} = -\frac{4}{7}$

కావల్సిన సరళరేఖ వాలు $= -\dfrac{1}{\text{ఇచ్చిన సరళరేఖ వాలు}} = -\frac{1}{4/7} = \frac{7}{4}$ అవుతుంది.

కాబట్టి 7/4 వాలుగా, (5, 2) బిందువు గుండా పోయే సరళ రేఖ సమీకరణం $m = 7/4, \ x_1 = 5, y_1 = 2$

$$y - 2 = \frac{7}{4}(x - 5)$$

అ. గు. చేయగా $4(y - 2) = 7(x - 5)$

సూక్ష్మీకరించగా $4y - 8 = 7x - 35$

$$4y - 8 - 7x + 35 = 0$$

$4y - 7x - 27 = 0$ లేక

$$7x - 4y + 27 = 0$$

3.3.6 రెండు సరళ రేఖల ఖండన బిందువు కనుగొనుట: రెండు సరళరేఖలు P అనే బిందువు వద్ద ఖండించుకుంటే ఆ సరళరేఖల సమీకరణాలు సాధించగా వచ్చిన x విలువ ఖండన బిందువు యొక్క x నిరూపకం, y విలువ y నిరూపకం అవుతాయి.

ఉదా: $5x - 3y - 2 = 0$ $3x + 6y - 9 = 0$ సమీకరణాలచే సూచించబడే సరళరేఖల ఖండన బిందువు నిరూపకాలు కనుక్కోండి.

సాధన: ఇచ్చిన సమీకరణాలు

$$5x - 3y - 2 = 0 \quad i.e., \quad 5x - 3y = 2 \text{ ----------}(1)$$
$$3x + 6y - 9 = 0 \quad i.e., \quad 3x + 6y = 9 \text{ ———— }(2)$$

అనుకుని వాటిని సాధించగా

$$(1) \times 2 \Rightarrow 2 \times 5x - 2 \times 3y = 2 \times 2$$

$$i.e., \; 10x - 6y = 4$$

$$(2) \Rightarrow \quad 3x + 6y = 9$$

కూడగా $13x + 0 = 13$

కాబట్టి $13x = 13$

$$x = 1$$

'$x = 1$', (1)వ సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా

$$5 \times 1 - 3y - 2 = 0$$
$$3 - 3y = 0 \text{ i.e., } -3y = -3, \therefore y = 1$$

కాబట్టి, ఖండన బిందువు నిరూపకాలు (1, 1)

గమనిక: ఖండన బిందువు రెండు సరళరేఖకు చెందిన ఉమ్మడి(*Comman*) బిందువు.

ఇచ్చిన బిందువు, ఇచ్చిన సరళరేఖ పై, ఉందో లేదో తెలుసుకోవటానికి, ఇచ్చిన బిందువు యొక్క నిరూపకాలను సరళరేఖ సమీకరణంలోని x, y లకు బదులుగా ప్రతిక్షేపిస్తే, ఆ సమీకరణం నిజం కావలెను.

ఉదా: (3, 5)అనే బిందువు $3x + 4y = 7$ అనే సరళ రేఖ పై ఉందో లేదో పరీక్షించండి.

సాధన: ఇచ్చిన సరళ రేఖ సమీకరణము $3x + 4y = 7$ ఇచ్చిన బిందువు యొక్క నిరూపకాలు $x = 3, y = 5$ ఇచ్చిన సమీకరణంలో x కి బదులుగా 3, y కి బదులుగా 5 వ్రాయగా

$3 \times 3 + 4 \times 5 = 9 + 20 = 29 \neq 7$

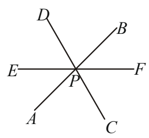
యిచ్చిన సమీకరణంలో ఎడమ ప్రక్క విలువ కుడి ప్రక్క విలువకు సమానం కాదు కావున ఇచ్చిన బిందువు ఇచ్చిన సరళ రేఖ మీద లేదు. (లేక) ఇచ్చిన సరళ రేఖ ఇచ్చిన బిందువు గుండా పోవుట లేదు. ఉదాహరణకు (1, 1) అనే బిందువు పైన ఇవ్వబడిన సరళరేఖ పై వుందో లేదో తెలుసుకుందాం.

సరళరేఖ సమీకరణము $3x + 4y = 7$

$x = 1,\ y = 1$ ప్రతిక్షేపించగా $3\times 1 + 4\times 1 = 7 = 7$

ఎడమ ప్రక్క విలువ, కుడి ప్రక్క విలువలు సమానం కాబట్టి (1, 1) అనే బిందువు $3x + 4y = 7$ అనే సరళ రేఖ పై ఉన్నదని అర్థం.

3.3.7 అనుషక్త బిందువు: మూడు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ సరళరేకలు ఒకే బిందువు ద్వారా పోతున్నపుడు ఆ సరళరేఖలను అనుషక్త సరళరేఖలు , ఆ బిందువును అనుషక్త బిందువు అని అంటారు.



పై పటంలో $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{EF}$ సరళరేకలు అనుషక్త సరళరేఖలవుతాయి. ఎందుకనగా అవి P అనే బిందువు గుండా పోతున్నాయి కాబట్టి ఈ P అనే బిందువే అనుషక్త బిందువు అవుతుంది. మూడు సరళరేఖా సమీకరణాలు ఇచ్చిన ఆ సరళరేఖలు అనుషక్తాలని చూపుటకు మాత్రికలనుపయోగించవచ్చు.

ఇచ్చిన సమీకరణములో x, y గుణకములు మరియు స్థిర పదము వ్రాయగా ఏర్పడే మాత్రిక యొక్క డిటర్మెంట్ (*determent*) విలువ 'శూన్యం' అయినట్లయితే ఆ సరళరేఖలు అనుషక్త సరళరేఖలు అవుతాయి. ఈ ప్రక్రియను క్రింది విధంగా సంకేతాలలో చూపవచ్చు.

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$ ఇచ్చిన సరళ రేఖ సమీకరణాలైతే

x, y గుణకములు మరియు స్థిర విలువలను మాత్రిక రూపంలో వ్రాయగా

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

పై మాత్రిక యొక్క డిటర్మినెంట్ విలువ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \left(b_2 c_3 - b_3 c_2\right) - \left(a_2 c_3 - a_3 c_3\right) + c_1 \left(a_2 b_3 - a_3 b_2\right) = 0$$

అయితే ఇచ్చిన సరళరేఖలు అనుషక్తాలవుతాయన్నమాట, అప్పుడు అనుషక్త బిందువు యొక్క నిరూపకాలు

$\left(\dfrac{b_1 c_2 - c_1 b_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}, \dfrac{c_1 a_2 - a_1 c_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}\right)$ అవుతాయి.

రెండవ పద్ధతి: ఈ పద్ధతిలో ఇచ్చిన మూడు సరళరేఖల సమీకరణాల నుండి ఏదేని రెండు సరళరేఖల సమీకరణాలు తీసుకుని వాటిని సాధిస్తే మనకు ఆ రెండు సరళరేఖల ఖండన బిందువు నిరూపకాలు వస్తాయి. ఈ బిందువు మూడవ సరళ రేఖ పై వుంది అని నిరూపించటం వల్ల ఈ బిందువు ఇచ్చిన మూడు సరళరేఖలకు సమిష్టి బిందువు అవుతుంది. కాబట్టి ఈ మూడు సరళరేఖలు అనుషక్తాలవుతాయి. మరియు ఆ బిందువు అనుషక్త బిందువౌతుంది.

ఉదా: $3x - 5y + 5 = 0, 2x + 3y - 22 = 0, 6x - 3y = 13$ అనే సమీకరణాల చే సూచించబడే సరళరేఖలు అనుషక్తాలని చూపుతూ అనుషక్త బిందువు నిరూపకాలు కనుక్కోండి.

సాధన: ఇచ్చిన సరళ రేఖ సమీకరణాలు

$3x - 5y + 5 = 0$, ----------------(1)

$2x + 3y - 22 = 0$,--------------(2)

$6x - 3y = 13$ -----------------------(3) అనుకొనుము

(ఎ). మాత్రికల పద్ధతిననుసరించి:

గుణకాల మాత్రిక $\begin{bmatrix} 3 & -5 & 5 \\ 2 & 3 & -22 \\ 5 & -3 & -13 \end{bmatrix}$

గుణకాల మాత్రిక డిటర్మినెంట్ విలువ

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 5 \\ 2 & 3 & -22 \\ 5 & -3 & -13 \end{vmatrix} = 3\left(3\times -13 - (-3)\times(-22) - (-5)\left(2(-13) - \left(5\times(-22)\right)\right)\right) + \left[\left(2\times -3\right) - \left(5\times 3\right)\right]$$

$$= 3\left[-39 - 66\right] + 5\left[-26 + 110\right] + 5\left[-6 - 15\right]$$

$$= 3\,[-105] + 5\,[84] + 5\,[-21]$$

$$= -315 + 420 - 105 = -420 + 420 = 0$$

కాబట్టి ఇవ్వబడిన సరళరేఖలు అనుషక్తాలౌతాయి.

అనుషక్త బిందువు

$$\left[\frac{(-5 \times -22) - 3\times 5}{(3\times 3) - (2\times -5)}\ ;\ \frac{(2\times 5) - (3\times -22)}{(3\times 3) - (2\times -5)}\right]$$

$$= \left(\frac{+110 - 15}{9+10}\ ;\ \frac{10+66}{9+10}\right)$$

$= \left(\frac{95}{19}, \frac{76}{19}\right) = (5, 4)$ అవుతుంది

(బి). ఖండన బిందువు పద్ధతి: ఇచ్చిన సమీకరణాలలో (1) మరియు (2) సమీకరణాలు తీసుకొని సాధించగా

$$3x - 5y = -5 \text{ --------- } (1)$$

$$2x + 3y = 22 \text{ ------------- } (2)$$

$(1) \times 2 \quad 6x - 10y = -10$

$(2) \times 3 \quad 6x + 9y = 66$

తీసివేయగా $0 - 19y = -76$

$$y = \frac{-76}{-19} = 4$$

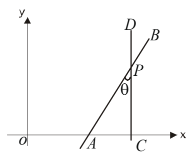
$y = 4$ మొదటి సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించగా x విలువ 5 అవుతుంది. కాబట్టి (1), (2) సరళరేఖల ఖండన బిందువు నిరూపకాలు (5, 4) అవుతాయి.

ఇపుడు ఈ బిందువు యొక్క నిరూపకాలు మూడల సరళరేఖ సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా

$5\times 5 - 3 \times 4 - 13 = 25 - 12 - 13 = 0$ అవుతుంది.

అనగా మూడవ సరళరేక కూడా పై రెండు సరళరేఖల ఖండన బిందువు ద్వారా పోతుంది. కాబట్టి పై మూడు సరళరేఖలు అనుషక్తాలౌతాయి. మరియు (5, 4) నిరూపకాలు అనుషక్త బిందువు నిరూపకాలవుతాయి.

3.3.8 రెండు సరళ రేఖల మధ్య కోణం కనుగొనుట: $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ అనే సరళరేఖలు P అనే బిందువు వద్ద ఖండించుకుంటున్నాయి అనుకుందాం. P దగ్గర ఈ రెండు సరళరేఖల మధ్య కోణం 'θ'తో సూచిస్తే 'θ' విలువ ఈ క్రింది సూత్రం ఆధారంగా తెలుసుకోవచ్చు.



$$\tan\theta = \frac{m_1 \sim m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

$\overleftrightarrow{AB}$ సరళరేఖ వాలు m_1

$\overleftrightarrow{CD}$ సరళరేఖ వాలు m_2 అయితే ఎక్కువసార్లు క్రిందివ్వబడిన పట్టిక ఆధారంగా θ విలువను కనుగొనవచ్చు.

$\tan\theta$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	α
θ	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0

ఉదా: ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన సమీకరణములచే సూచించే రెండు సరళరేఖల మధ్య కోణాన్ని కనుక్కోండి.

$$x + 5y - 9 = 0, \quad 2x - 3y + 2 = 0$$

సాధన: ఇచ్చిన సరళరేఖల మధ్య కోణాన్ని కనుగొనాలంటే మనకు సరళరేఖల వాలులు కావాల్సి వస్తుంది. కాబట్టి ముందుగా వాలులు లెక్కిద్దాం.

మొదటి సరళరేక సమీకరణం $x + 5y - = 0$ అనుకుంటే ఈ సరళ రేఖ వాలు $m_1 = -\frac{x}{y} = -\frac{1}{5}$ అవుతుంది.

రెండవ సరళరేఖ సమీకరణము $2x - 3y + 2 = 0$ అయితే దీని వాలు $m_2 = -\frac{x}{y} = -\frac{2}{(-3)} = \frac{2}{3}$

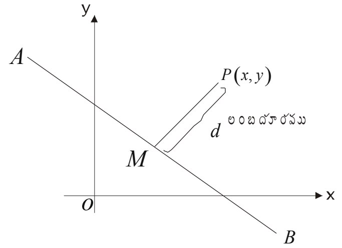
కాబట్టి సూత్రం ప్రకారం

$$tan\ \theta = \frac{2/3 - \left(-\frac{1}{5}\right)}{1+\frac{2}{3}\times-\frac{1}{5}} = \frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{2}{15}}$$

$$= \frac{\frac{10+3}{15}}{\frac{15-2}{15}} \quad \frac{13}{15}\times\frac{15}{13} \quad 1$$

$\tan\theta = 1$ కాబట్టి $\theta = 45^0$

3.3.9 సరళరేఖ బిందువు మధ్య లంబదూరం (*Lenth of Pendicular from a Point*): $\overleftrightarrow{AB}$ అనే సరళ రేఖ ఉందనుకోండి. అదే సమతలం పై $P\left(x_1, y_1\right)$ అనే బిందువు ఉందనుకుంటే ఈ బిందువు నుండి $\overleftrightarrow{AB}$ సరళరేఖ మీదకు లంబదూరం (పటంలో చూపిన విధంగా) ఈ క్రింది సూత్రాన్ని ఉపయోగించి కనుకొంటాము.



$ax + by + c = 0$ సరళరేఖ సమీకరణం అయివుండి, $\left(x_1, y_1\right)$ లు P బిందువు నిరూపకాలైతే

లంబదూరం $d = \pm \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ అవుతుంది.

ఉదా: $3x + 4y - 9 = 0$ ఒక సరళరేఖ సమీకరణమైతే (2, 5) ఒక బిందువు నిరూపకాలైతే సరళరేఖ, బిందువుకు మధ్య లంబదూరం కనుక్కోండి.

సాధన: ఇచ్చిన సరళరేఖ సమీకరణము $3x + 4y - 9 = 0$ ఇందులో $a = 2$, $b = 4$ మరియు $c = -9$ అయినాయి.

ఇచ్చిన బిందువు నిరూపకాలు $x_1 = 2$, $y_1 = 5$ అవుతాయి.

లంబదూరం $= \pm \frac{ax_1 + by_1 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{3\times2 + 4\times5 - 11}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$

$$= \frac{6 + 20 - 11}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{15}{5} = 3$$

3.4 ఆర్థికశాస్త్రంలో సరళరేఖ ఉపయోగాలు (Applications in Economics):

సామాన్యంగా సరళరేఖ సమీకరణాన్ని $ax + by + c = 0$ అని వ్రాస్తూ ఉంటాం. దీనిని ఒకసారి జాగ్రత్తగా పరిశీలిస్తే ఇది x, y అనే చలరాశుల మధ్య ఉన్న ఏకఘాత(*Linear*) సంబంధాన్ని తెలియజేస్తుంది. అంటే రెండు చలరాశుల మధ్య ఉన్న ఏకఘాత సంబంధాన్ని తెలియజేయుటకు సరళరేఖ సమీకరణము ఉపయోగించబడుతుంది. ఈ విభాగంలో అటువంటి కొన్ని సమస్యలు, వాటి సాధన గురించి తెలుసుకుందాం.

ఉదా: ఒక పరిశ్రమలో పెట్టిన రూ॥ 10,000ల పెట్టుబడికి సంవత్సరానికి రూ॥ 600లు రాబడి వస్తుంది. అలాగే రూ॥ 20,000లు పెట్టుబడి పెడితే రూ॥ 2,400లు రాబడి వస్తుంది. అయితే ఈ పరిశ్రమలో రాబడికి, పెట్టుబడికి మధ్య గల ఏకఘాత సంబంధాన్ని తెలుపుతూ రూ॥ 15,000 పెట్టుబడికి రాబడెంతో తెలపండి?

సాధన: పెట్టుబడిని x చే, రాబడిని y అనే సంకేతాలలో సూచిస్తే

$x = 10,000$ అయితే $y = 600$

మరియు $x = 20,000$ అయితే $y = 2,400$ అవుతున్నాయి.

కాబట్టి (10,000 , 600) ఒక బిందువు నిరూపకాలుగా (20,000 , 2,400) వేరొక బిందువు నిరూపకాలుగా తీసుకుని సరళ రేఖ సమీకరణం కనుక్కుంటే

సమీకరణ సూత్రం $y - 600 = \frac{2400 - 600}{20000 - 10000}(x - 10000)$

$$y - 600 = \frac{9}{50}(x - 10000)$$
$$50y - 30,000 = 9x - 90,000$$
$$50y - 30,000 - 9x + 90,000 = 0$$
$$50y - 9x + 60,000 = 0$$

$$y - 600 = \frac{1800}{10,000}(x - 10,000)$$
$$y - 600 = 0.18(x - 10,000)$$
$$y - 600 = 0.18x - 1800$$
$$y = 0.18x - 1200$$

రాబడికి, పెట్టుబడికి మధ్య గల ఏకఘాత సంబంధము, ఈ సమీకరణములో x (పెట్టుబడి)కి బదులుగా 15,000 ప్రతిక్షేపిస్తే

$$y = 0.18 \times 15000 - 1200$$
$$= 2700 - 1200 = 1500$$

అనగా రూ॥ 15,000లు పెట్టుబడికి రూ॥ 1500లు రాబడి వస్తుందన్నమాట.

ఉదా: ఒక ఫ్యాక్టరీలో 200 వస్తువులు తయారు చేయటానికీ అయ్యే ఖర్చు రూ॥ 800లు. 400 వస్తువు తయారీకి అయ్యే వ్యయం రూ॥ 1200 అయితే వ్యయానికీ, వస్తువుల సంఖ్య మధ్య ఏకఘాత సంబంధం ఉందనుకొని వాటి మధ్య సంబంధాన్ని తెలిపే సమీకరణాన్ని కనుగొనండి మరియు ఒక వస్తువు తయారీకి అయ్యే ఖర్చెంతో కనుక్కోండి.

సాధన: వస్తువుల సంఖ్య x, వ్యయం y అనుకుంటే

$x = 200$ అయితే $y = 800$

$x = 400$ అయితే $y = 1200$

ఈ రెంటిని బిందువులుగా సరళరేఖ సమీకరణం

$$y - 800 = \frac{1200 - 800}{400 - 200}(x - 200)$$

$$y - 800 = \frac{400}{200}(x - 200)$$
$$y - 800 = 2(x - 200)$$
$$y - 800 = 2x - 400$$

$y = 2x + 400$ లేక

$y = 400 + 2x$

పై సమీకరణం వ్యయ ప్రమేయాన్ని (*Cost Function*) సూచిస్తుంది.

y మొత్తం వ్యయాన్ని

400 స్థిర వ్యయాన్ని

$2x$ అస్థిర (చర) వ్యయాన్ని సూచిస్తాయి.

పైన తెలుపబడిన సరళరేక వాలు '2' అంటే

ఒక వస్తువును అదనంగా తయారు చేయటానికి 2 రూపాయలు వ్యయం అవుతుందన్నమాట. దీనిని బట్టి వాలు విలువ ఉపాంత వ్యయాన్ని (*Marginal Cost*) సూచిస్తుంది అని తెలుస్తుంది.

గమనిక: సరళరేఖ వాలు, వ్యాకోచత్వమునకు గల సంబంధము

P_0 ధర వద్ద ఒక వస్తువు డిమాండ్ Q_0 అయి

P_1 ధర వద్ద డిమాండ్ Q_1 అయితే

ధర డిమాండ్ వ్యాకోచత్వము $(\eta) = \dfrac{Q_1 - Q_0 \ / \ Q_0}{P_1 - P_0 \ / \ P_0}$ అని మీకు తెలుసు. దీనినే $\dfrac{P_0}{Q_0} \cdot \dfrac{Q_1 - Q_0}{P_1 - P_0}$ -------(1) గా వ్రాయవచ్చు.

ధరలను Y- అక్షము మీద , డిమాండ్ పరిమాణము x- అక్షము మీద కొలిస్తే (P_0, Q_0), (P_1, Q_1) లు రెండు వేర్వేరు బిందువుల నిరూపకాలవుతాయి. ఈ బిందువుల ద్వారా పోయే సరళరేఖ వాలు $m = \dfrac{P_1 - P_0}{Q_1 - Q_0}$ అవుతుంది.

దీనిని బట్టి ధర డిమాండ్ వ్యాకోచత్వాన్ని ఇలా కూడా వ్రాయవచ్చు. $\dfrac{P_0}{Q_0} \times \dfrac{1}{m}$

కొన్ని సమస్యలు సాధించటానికి పైన చర్చించిన విషయం ఉపయోగపడుతుంది.

ఉదా: ఒక వస్తువు ధర, పరిమాణముల మధ్య సంబంధము $4p + 9q = 48$ సమీకరణముచే సూచించబడినది. అయిన (P ధర, q పరిమాణము) ధర **2** రూ॥ అయినప్పుడు ధర డిమాండ్ వ్యాకోచత్వం కనుగొనండి.

సాధన: ఇచ్చిన సమీకరణము $4p + 9q = 48$

దీని వాలు $= -\dfrac{9}{4}$

$P = \mathbf{2}$ అయితే

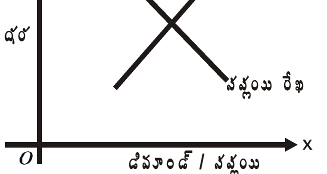
$$4 \times 2 + 9q = 48$$
$$8 + 9q = 48$$
$$9q = 48 - 8 = 40$$
$$q = 40/9$$

$\therefore$ ధర డిమాండ్ వ్యాకోచత్వం $= \dfrac{2}{40/9} \times \dfrac{1}{-9/4}$

$$= \frac{2 \times 9}{40} \times \frac{-4}{9} = -0.2$$

ఉదా: ఒక వస్తువు యొక్క ధర (P) , పరిమాణము (q)తో సూచిస్తూ ఆ వస్తువు యొక్క డిమాండ్ రేఖ సమీకరణము $4q + 9p = 48$ మరియు $q - 9p = -18$ గానూ ఇవ్వబడినాయి. అయిన సమతౌల్య ధర, సమతౌల్య పరిమాణం కనుక్కోండి.

సాధన:



ఏ ఒక వస్తువుకు మార్కెట్‌లో సమతౌల్యం దాని డిమాండ్ సప్లయి సమానమైనప్పుడు కలుగుతుందని తెలుసు. రేఖాపటం లో చూస్తే సప్లయి రేఖ డిమాండ్ రేఖ ఖండించుకునే చోట మార్కెట్ సమతౌల్యంఏర్పడుతుందన్న మాట. ఆ పరిస్థితిలో ధరని సమతౌల్య ధర అని, పరిమాణాన్ని సమతౌల్య పరిమాణం అని అంటారు. కాబట్టి ఇక్కడి డిమాండ్ రేఖ సప్లయి రేఖల ఖండన బిందువు నిరూపకాలు, మనకు సమతౌల్య పరిమాణం, ధరలు యిస్తాయి. కావున డిమాండ్ రేఖ, సప్లయి రేఖ ఖండన బిందువు కనుక్కుందాం.

డిమాండ్ రేఖ సమీకరణము $4q+9p=48$--------(1)

సప్లయి రేఖ సమీకరణము $q - 9p = -18$ --------(2)

కూడగా $5q = 30$

కాబట్టి $q = \frac{30}{5} = 6$

కావున సమతౌల్య పరిమాణం 6. ఈ విలువను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా $4\times6 + 9p = 48$

$24 + 9p = 48$ $\quad 9p = 24$

$$p = \frac{24}{9} = \frac{8}{3} = 2.66$$

కాబట్టి సమతౌల్య ధర 2.66 మరియు పరిమాణం 6 అవుతాయి.

ఉదా: ఒక పరిశ్రమలో ఖర్చు 'y' కొంత స్థిరం గాను, మరి కొంత పని చేసే పనివారుల పైనా ఆధారపడి ఉంటుంది. పరిశ్రమలో 12 మంది ఉంటే ఖర్చు 1040 రూ॥లు. 20 మంది పనివారలుంటే 1600 రూ॥లు అవుతుంది. పనివారలకు, ఖర్చుకు మధ్య ఏకఘాత సంబంధం వుందనుకుంటే ఖర్చు సరళరేఖ సమీకరణము కనుక్కోండి. 10 మంది పనివారలున్నప్పుడు ఖర్చు ఎంతౌతుందో కనుక్కోండి.

సాధన: ఖర్చు రూపాయలలో y చే సూచిస్తే

పని వారల సంఖ్య x చే సూచిస్తే

$x = 12$ అయితే $y = 1040$ $\quad$ (12, 1040)

$x = 20$ అయితే $y = 1600$ $\quad$ (20, 1600)

కావున ఖర్చు రేఖ

$$y - 1040 = \frac{1600 - 1040}{20 - 12}(x - 12)$$

$$y - 1040 = \frac{560}{8}(x - 12)$$

$$y - 1040 = 70(x - 12)$$

$$y - 1040 = 70x - 840$$

$$y = 70x - 840 + 1040$$

$$y = 70x + 200$$

15 మంది పని వారలుంటే ఖర్చు

$$y = 70(15) + 200$$
$$= 1050 + 200 = 1250$$

ఉదా: 500 బొమ్మలు తయారు చేయటానికి అయ్యే ఖర్చు 2,500 రూ॥లు, 700 బొమ్మలు తయారు చేయటానికి అయ్యే ఖర్చు 3,500 రూ॥లు అయితే బొమ్మల సంఖ్యకు వాటి తయారీకి అయ్యే ఖర్చు మధ్య సంబంధము ఏకఘాత సంబంధం అనుకుంటే ఖర్చు సరళరేఖను కనుక్కోండి.

సాధన: బొమ్మల తయారీకి అయ్యే ఖర్చు, మరియు వాటి సంఖ్య మధ్య సంబంధము ఏకఘాత సంబంధము కావున

మరియు	500 బొమ్మల తయారీకయ్యే ఖర్చు	2,500	(500, 2,500)
	700 బొమ్మల తయారీకయ్యే ఖర్చు	3,500	(700, 3,500)

ఖర్చు సరళరేఖ సమీకరణము

$$y - 2500 = \frac{3500 - 2500}{700 - 500}(x - 500)$$

$$y - 2500 = \frac{1000}{200} 5(x - 500)$$
$$y - 2500 = 5x - 2500$$
$$y = 5x$$

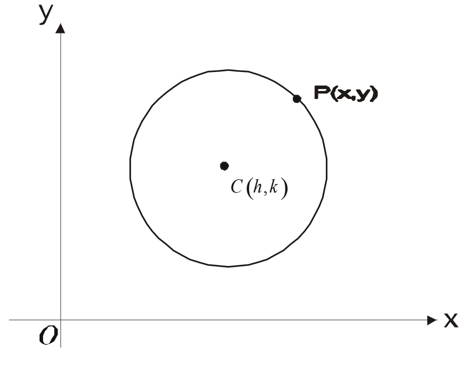
3.5 వృత్తము:

ఇంతకు ముందు విభాగంలో సరళరేఖ వాలు, సరళ రేఖ సమీకరణాలు, సరళరేఖ సమీకరణాలు కనుక్కోటానికి అవసరమైన దత్తాంశము మొదలగు వాటి గురించి తెలుసుకున్నాము. ఈ విభాగంలో వృత్తము దాని సమీకరణము స్పర్శరేఖ, లంబము యొక్క సమీకరణములను కనుగొనుట గురించి తెలుసుకుందాం.

వృత్తము: ఒక సమతలంలో, ఒక స్థిర బిందువు నుండి స్థిర దూరంలో చలించే బిందువు యొక్క బిందుపదాన్ని వృత్తము అంటారు. ఆ స్థిర బిందువును వృత్త కేంద్రమని (*Centre*), స్థిర దూరాన్ని వృత్త వ్యాసార్థమని (*Radius*) అంటారు.

చలించే బిందువు $P(x, y)$, కేంద్రము $c(h, k)$ మరియు వ్యాసార్థము 'r' అనుకుంటే ఆ వృత్త సమీకరణము

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ అవుతుంది.



అనగా $x^2 + h^2 - 2hx + y^2 + k^2 - 2ky - r^2 = 0$

$$x^2 + h^2 - 2hx - 2ky + \left(h^2 + k^2 - r^2\right) = 0$$

దీనిని వృత్తము యొక్క సమీకరణము అంటారు.

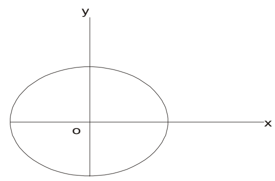
ఉదా: వ్యాసార్థము '5' మరియు (5, 4) అనే బిందువు కేంద్రముగా గల వృత్త సమీకరనాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: వ్యాసార్థము $= r = 5$

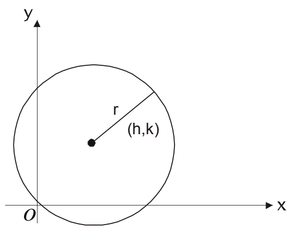
కేంద్ర బిందువు నిరూపకాలు $h = 5,\ k = 4$ సూత్రం ప్రకారం వృత్త సమీకరణము

$$(x-5)^2 + (y-4)^2 = 5^2$$
$$x^2 + 25 - 10x + y^2 + 16 - 16y = 25$$
$$x^2 + y^2 - 10x - 16y + 16 = 0$$

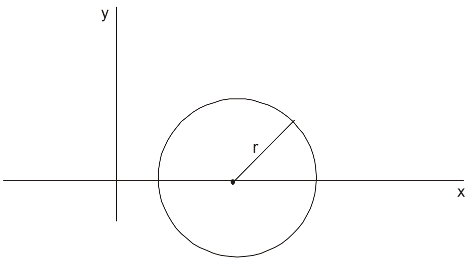
గమనికలు: 1. మూల బిందువు (0, 0) కేంద్రముగా r వ్యాసార్థము గల వృత్త సమీకరణము $x^2 + y^2 = r^2$ అవుతుంది.



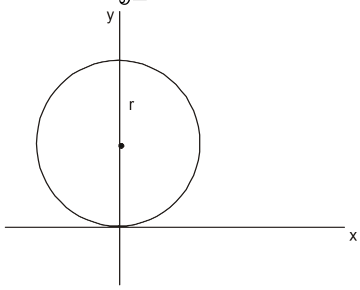
2. మూల బిందువు (0, 0) గుండా పోయే (h, k) కేంద్రము 'r' వ్యాసార్థముగా గల వృత్త సమీకరణము $h^2 + k^2 = r^2$ అవుతుంది.



3. 'r' వ్యాసార్థము గా వుండి కేంద్రము x అక్షము మీద ఉన్న వృత్త సమీకరణము $x^2 + y^2 - 2ry = 0$ అవుతుంది.

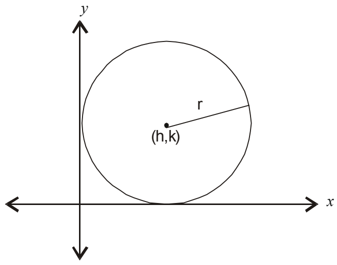


4. 'r' వ్యాసార్థము y అక్షము మీద ఏకంద్రము కలిగిన వృత్త సమీకరణము $x^2 + y^2 - 2ry = 0$ అవుతుంది.



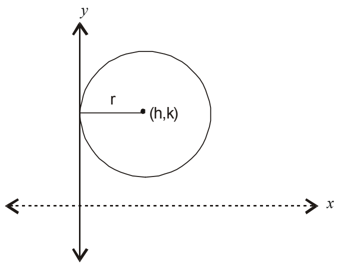
5. 'r' వ్యాసార్థముగా, (h, k) బిందువు కేంద్రముగా x అక్షంను (తాకుతూ) స్పర్శిస్తున్న వృత్త సమీకరణము

$x^2 + y^2 - 2hx - 2ry + h^2 = 0$ అవుతుంది.



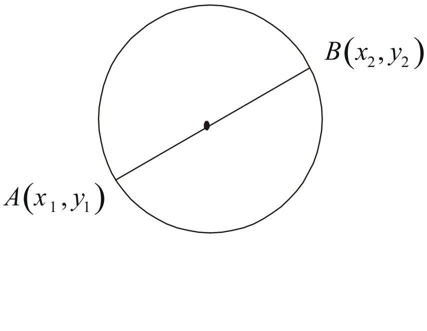
6. 'r' వ్యాసార్థముగా (h, k) బిందువు కేంద్రముగా y అక్షమును తాకుతూ (స్పర్శిస్తూ) ఉన్న వృత్త సమీకరణము

$x^2 + y^2 - 2ry - 2ky + k^2 = 0$ అవుతుంది.



7. $A (x_1, y_1)$, $B (x_2, y_2)$ అనే రెండు బిందువుల రేఖా ఖండము వ్యాసముగా గల వృత్త సమీకరణము

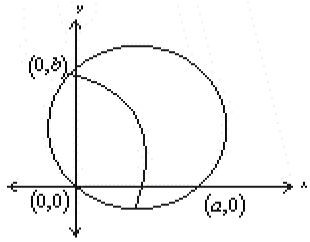
$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$



8. మూల బిందువు (0, 0) గుండా పోతూ, X అక్షము యొక్క అంతర్ ఖండము A గాను, Y అక్షము అంతర్ ఖండము b గాను కల వృత్త సమీకరణము.

$$(x - a)(x - 0) + (y - 0)(y - b) = 0$$

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$



3.5.1 వృత్తము యొక్క సామాన్య సమీకరణము: r వ్యాసార్థముగా గలిగి, (h, k) అనే బిందువు కేంద్రముగా గల వృత్త సమీకరణము $x^2 + y^2 - 2hx + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$ అవుతుందని మనం ఇంతకు ముందే చూపాం. ఈ సమీకరణమును A అనే స్థిరరాశిచే గుణించినా ఆ సమీకరణము వృత్తాన్ని సూచిస్తుంది. అంటే $Ax^2 + Ay^2 - 2Ahx - 2Aky + A\left(h^2 + k^2 - r^2\right) = 0$

ఈ సమీకరణములో $-Ah = G$ గాను, $-Ak = F$ గాను, $A(h^2 + k^2 - r^2) = c$ గాను వ్రాసినట్లయితే

$Ax^2 + Ay^2 - 2Gx - 2Fy + c = 0$ అవుతుంది.

సమీకరణములోని అన్ని పదాలని 'A' యొక్క గుణకము చేత భాగించగా

$x^2 + y^2 + \dfrac{2G}{A}x + \dfrac{2F}{A}y + \dfrac{C}{A} = 0$ అవుతుంది.

$\dfrac{G}{A} = g \quad \dfrac{F}{A} = f \quad \dfrac{C}{A} = c$ అనుకుంటే పై సమీకరణాన్ని $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$గా వ్రాయవచ్చు. దీనినే వృత్తము యొక్క సామాన్య సమీకరణం అంటారు. ఈ సమీకరణం ఆధారంగా వృత్తము యొక్క కేంద్రము $(-g, -f)$, అనగా ($-\frac{1}{2}x$ యొక్క గుణకము, $-\frac{1}{2}y$ యొక్క గుణకము) అవుతుంది. మరియు వ్యాసార్థము $= r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

అనగా $= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\, x \text{ యొక్క గుణకము}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\, y \text{ యొక్క గుణకము}\right)^2 - \text{స్థిరపదము}}$ అవుతుంది.

ఉదా: $2x^2 + 2y^2 + 8x - 12y + 3 = 0$ అనే సమీకరణము చే సూచించబడే వృత్త కేంద్రము, వ్యాసార్థము కనుక్కోండి.

సాధన: ఇచ్చిన వృత్త సమీకరణమును సామాన్య వృత్త సమీకరణ రూపంలో వ్రాయగా అనగా '2' చేత అన్ని పదాల్ని భాగించగా $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3/2 = 0$ అవుతుంది. ఇప్పుడు సామాన్య సమీకరణంతో పోల్చి చూడగా x - గుణకము $= 2g = 4$, y గుణకము $2f = -6$, $C = 3/2$ అవుతున్నాయి.

కావున వృత్త కేంద్రము ($-\frac{1}{2}x$ గుణకము, $-\frac{1}{2}y$ గుణకము)

$$= \left(-\frac{1}{2}\times 4, -\frac{1}{2}(-6)\right)$$
$$= (-2, 3)$$

వ్యాసార్థము $=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\text{x †ðHþÇ‡Hò}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\text{y †ðHþÇ‡Hò}\right)^2-\text{C}}$

$$= \sqrt{(-2)^2 + (3)^2 - \frac{3}{2}} = \sqrt{4+9-\frac{3}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{11}{2}}$$

ఉదా: బిందువు (2, 3) కేంద్రముగా కలిగి, $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 15 = 0$ చే సూచించబడే వృత్త కేంద్రము గుండా పోవు వృత్త సమీకరణము కనుగొనుము.

సాధన: $x^2 + y^2 + 8x + 11y - 15 = 0$ వృత్తము యొక్క కేంద్రము $\left(-\frac{1}{2}x \text{ గుణకము}, -\frac{1}{2}y \text{ గుణకము}\right)$

కావున కేంద్రము యొక్క నిరూపకరాలు (-4, -6) అవుతాయి. ఇప్పుడు, (2, 3) కేంద్రముగా, (-4, -6) బిందువు ద్వారా పోవు వృత్త సమీకరణము కనుగొనుటకు ముందుగా వ్యాసార్థము కనుగొనుము.

వ్యాసార్థము $= \sqrt{(2+4)^2 + (3+6)^2} = \sqrt{36+81} = \sqrt{117}$

కావున వృత్త సమీకరణము $(x-2)^2 + (y-3)^2 = \left(\sqrt{117}\right)^2$

అనగా $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 117$

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 104 = 0$$

ఉదా: (-4, 0) అనే బిందువు గుండా పోతూ (-2, 4) కేంద్రముగా గల వృత్త సమీకరణము కనుగొనుము.

సాధన: ముందుగా వ్యాసార్థము కనుగొందాం.

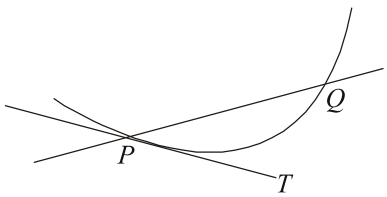
$$r = \sqrt{(-4+2)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

కాబట్టి (-2, 4) కేంద్రముగా $\sqrt{20}$ వ్యాసార్థము గల వృత్త సమీకరణము

$$(x+2)^2 + (y-4)^2 = \left(\sqrt{20}\right)^2$$
$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = 20$$

$x^2 + y^2 + 4x - 8y = 0$

3.5.2 ‹ æ¸ŸöY ="¡ † Ǫ <Œë..˜öY (*Tangent and Normal*): ఒక వక్రము పై వున్న రెండు వేర్వేరు బిందువులను కలుపు సరళరేఖ ఖండాన్ని కార్ట్ (*Chard*) అనియు, సరళరేఖను రెండు వైపులా పొడిగించిన దానిని 'స్కాంటే' (Scant) అని అంటాము. P, Q వేర్వేరు బిందువులయితే $\overline{PQ}$ కార్ట్, $\overleftrightarrow{PQ}$ స్కాంట్ అవుతాయి. Q బిందువు P ని సమీపించినప్పుడు మనకు ఖచ్చితంగా PT అనే సరళరేఖ ఏర్పడుతుంది. దీనిని 'P' అనే బిందువు వద్ద వక్రమునకు స్పర్శరేఖ అని, P ని స్పర్శబిందువు అని అంటాము. PQ వద్ద స్పర్శరేఖకు లంబంగా ఉంటే సరళరేఖను నార్మల్ రేఖ అంటారు.



వృత్తము యొక్క స్పర్శరేఖ సమీకరణము: అనే వృత్తము పై $P(x_1, y_1)$ అనే బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణము.

$$xx_1 + yy_1 + g(x+x_1) + f(y+y_1) + c = 0$$

ఉదా: $x^2+y^2+2x\text{-}8y+15=0$ అనే వృత్తాన్ని (2, 5) అనే బిందువు వద్ద తాకుతున్న స్పర్శరేఖ సమీకరణము కనుక్కోండి.

సాధన: వృత్త సమీకరణము $x^2+y^2+2x-8y+15=0$

స్పర్శ బిందువు నిరూపకాలు (2, 5)

సూత్రం ప్రకారం (x_1, y_1) బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణాలు

$xx_1 + yy_1 + g(x+x_1) + f(y+y_1) + c = 0$ అవుతుంది కదా.

కాబట్టి ఇచ్చిన సమీకరణము, సూత్రం పోల్చి చూస్తే $x_1 = 2, y_1 = 5$ అవుతాయి.

కాబట్టి స్పర్శరేఖ సమీకరణము $2x + 5y + \frac{2}{2}(2+x) - \frac{8}{2}(5+y) + 15 = 0$

సూక్ష్మీకరించగా $2x + 5y + 2 + x - 20 - 4y + 15 = 0$

$$3x + y - 3 = 0$$

వృత్తము యొక్క నార్మల్ సమీకరణము: $P\ (x_1, y_1)$ అనే స్పర్శ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖకు లంబముగా వున్న రేఖను నార్మల్ అంటాము. ఇంతకు ముందు తెలుసుకున్నట్లు

P వద్ద నార్మల్ రేఖ సరళరేఖల వాలుల లబ్దం - '1' సమానం కావాలి అన్నమాట అనగా స్పర్శరేఖ వాలు m అయితే నార్మల్ రేఖ వాలు $\frac{-1}{m}$ అవుతుందన్నమాట.

ఉదా: ప్రక్క పేజీ ఉదాహరణలో స్పర్శరేఖ సమీకరణము $3x + y - 3 = 0$

$$\text{స్పర్శరేఖవాలు} = -\frac{x \text{ గుణ కము}}{y \text{ గుణ కము}} = -\frac{3}{1} = -3$$

కాబట్టి ఇచ్చిన బిందువు వద్ద నార్మల్ రేఖ వాలు $= \frac{1}{3}$ అవుతుంది.

(2, 5) బిందువు గుండా పోతూ $\frac{1}{3}$ వాలు కలిగిన సరళరేఖ సమీకరణము

$$y - 5 = \frac{1}{3}(x - 2)$$
$$3y - 15 = x - 2$$
$$x - 3y + 13 = 0$$

ఇదే నార్మల్ రేఖ సమీకరణము.

ఉదా: (5, 4) వద్ద $x^2+y^2+8x+6y-25=0$ అనే సమీకరణముచే సూచించబడే వృత్తానికి స్పర్శరేఖ మరియు నార్మల్ రేఖ సమీకరణాలు కనుక్కోండి.

సాధన: ఇచ్చిన బిందువు నిరూపకాలు **(5, 4)**

కాబట్టి $x_1 = 5, \; y_1 = 4$ అవుతాయి.

స్పర్శరేఖ సమీకరణము

$$5x + 4y + \frac{8}{2}(x+5) + \frac{6}{2}(y+4) - 25 = 0$$

సూక్ష్మీకరించగా $9x + 7y + 7 = 0$

స్పర్శరేఖ సమీకరణం వాలు $= \frac{-9}{7}$

స్పర్శరేఖకు లంబముగా వుండే నార్మల్ రేఖ వాలు **7/9** అవుతుంది. కాబట్టి **(5, 4)** బిందువు గుండా పోతూ **7/9** వాలుగా కలిగిన నార్మల్ రేఖ సమీకరణము $(y - 4) = \frac{7}{9}(x - 5)$ సూక్ష్మీకరించగా $7x - 9y + 1 = 0$ అవుతుంది.

స్పర్శరేఖ సమీకరణం వాలు రూపంలో: $x^2 + y^2 = a^2$ ఒక వృత్త సమీకరణం అయితే $y = mx \pm \sqrt{1+m^2}$ స్పర్శరేఖల సమీకరణాలౌతాయి. $m =$ వాలు.

ఉదా: $x^2 + y^2 + 10x + 6y - 55 = 0$ సమీకరణంతో సూచించబడే వృత్తానికి $8x + 5y - 34 = 0$ స్పర్శరేఖ సమీకరణం అవుతుందని చూపండి.

సాధన: ఇచ్చిన స్పర్శరేఖ సమీకరణము $8x + 5y - 34 = 0$ x విలువ $\frac{34 - 5y}{8}$ అవుతుంది. ఈ x విలువను ఇచ్చిన వృత్త సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా

$\left(\frac{34 - 5y}{8}\right)^2 + y^2 + 10\left(\frac{34 - 5y}{8}\right) + 6y - 55 = 0$ సూక్ష్మీకరించగా $y^2 - 4y + 4 = 0$ అవుతుంది. $(y-2)^2 = 0$ అంటే ఈ సరళరేఖ వృత్తాన్ని ఏకీభవించే రెండు బిందువుల వద్ద తాకుతుంది. కాబట్టి ఈ సరళరేఖ స్పర్శరేఖ అవుతుంది.

3.6 పరావలయము:

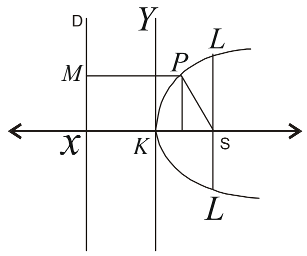
ఒక బిందుపదంలోని ఏ బిందువుకైనా ఒక స్థిర బిందువు నుండి దూరం ఒక సరళరేఖ నుండి దూరంలో ఒక స్థిర నిష్పత్తిలో ఉంటే ఆ బిందు పథాన్ని శాకవం (*Cone*) అని అంటారు. స్థిర బిందువును నాభి (*Focus*) అని స్థిర సరళరేఖను నియత రేఖ (*Directris*) మరియు స్థిర నిష్పత్తిని ఉత్కేంద్రత (*Ecentricity*) అంటారు. సంకేతాలలో S - నాభి, D_x - స్థిర సరళ రేఖ అయితే 'P' బిందుపదంలో ఒక బిందువు అయితే, P నుండి నాభి (S)కు గల దూరం SP, స్థిరరేఖ నుండి P కి గల దూరం PM అనుకుంటే $\frac{SP}{PM} = e$ అవుతుంది.

$e = 1$ అయిన ఆ శాకవాన్ని పరావలయం అని

$e < 1$ ఆయిన ఆ శాకవాన్ని దీర్ఘవృత్తం (*ellepse*) అని

$e > 1$ అయిన ఆశాకవాన్ని అతి పరావలయం (*Hyperabola*) అని అంటారు.

s నాభి గాను, Dx నియత రేఖ గాను ఉన్న పరావలయం కింద చూపిన విధంగా ఉంటుంది.



పరావలయం యొక్క వాభి $S (a, o)$ Dx నియత రేఖ అనుకుందాం. K ని పరావలయము యొక్క శీర్షము అంటారు. KS ని X అక్షము అనుకుని SX మధ్య దూరం $2a$ అనుకుంటే Dx యొక్క సమీకరణము $x = -a$ అవుతుంది.

$P (x, y)$ అనే బిందువు పరావలయం మీద వుందనుకుంటే PM అనే లంబము స్థిర రేఖ మీదకు గీసినట్లయితే నిర్వచనం ప్రకారం $SP = PM$; $SP^2 = PM^2$

$$(x-a)^2 + (y-0)^2 = (x+a)^2$$

సూక్ష్మీకరించగా $y^2 = 4ax$

దీనిని పరావలయము యొక్క సమీకరణము అంటాము.

ఇప్పుడు పరావలయానికి సంబంధించి కొన్ని పదాలను నిర్వచించుకుందాం.

1. **పరావలయ అక్షము (*Axis*):** పరావలయము ఏ సరళరేఖకు సంబందించి సౌష్టవంగా (*Symetrical*) ఉంటుందో ఆ సరళరేఖను పరావలయము యొక్క అక్షము అంటారు.

2. **పరావలయ శీర్షము:** పరావలయము యొక్క అక్షాన్ని ఏ బిందువు వద్ద కలుస్తుందో ఆ బిందువు పరావలయము యొక్క శీర్షము అని అంటాము.

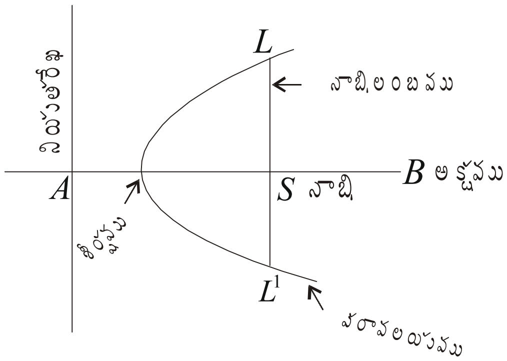
3. **నాభి దూరం (*Focal Distance*):** పరావలయం నాభి నుండి పరావలయం మీద గల ఏదేని ఒక బిందువు మధ్య దూరాన్ని నాభి దూరం అంటారు.

4. **నాభి ఖండము (*Focal Choral*):** పరావలయం నాభి గుండా పోయేటటువంటి ఏదేని ఒక రేఖ ఖండాన్ని నాభి ఖండము అంటాము.

5. **నాభి అక్షము (*Focal Axis*):** పరావలయం యొక్క నాభి ఏ అక్షము పై వుంటుందో దానిని నాభి అక్షము అని అంటాము.

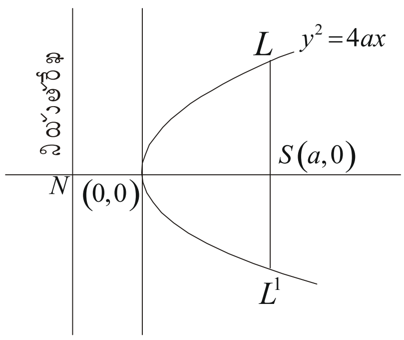
6. **నాభి లంబము (*Latus rectum*):** పరావలయము యొక్క అక్షానికి లంబముగా ఉన్న నాభి ఖండాన్ని నాభి లంబము అని అంటారు.

ఇప్పుడు ఒక పరావలయ చిత్రాన్ని గీసి, దానిలోని భాగాలు గుర్తిద్దాం.



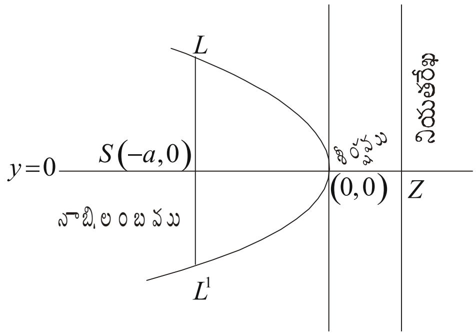
పరావలయము రూపాలు (*Forms of Parabola*):

1. $y^2 = 4ax$ రూపము:



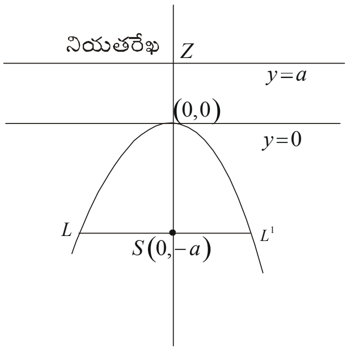
పరావలయము యొక్క శీర్షము (0, 0). దీని నాభి $S (a, 0)$ దీని అక్షము యొక్క సమీకరణము $y = 0$, దీని యొక్క స్పర్శ రేఖ సమీకరణము శీర్షము వద్ద $x = 0$ అవుతుంది. దీని నియత రేఖ సమీకరణము $x = -a$ అవుతుంది. దీని నాభి లంబము $4a$.

2. $y^2 = - 4ax$ రూపము:



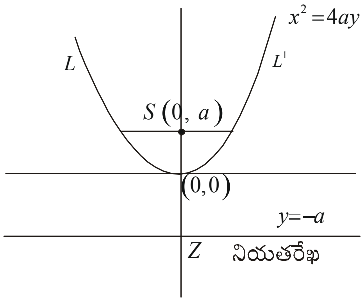
పై సమీకరణము చే వివరించబడే పరావలయము యొక్క రూపము పైన చూపిన విధంగా వుంటుంది. దీని యొక్క నాభి $S (-a, 0)$ శీర్షము (0, 0). ఈ పరావలయము y అక్షమునకు పూర్తిగా ఎడమ వైపున ఉంటుంది. అందువల్ల దీనిని ఎడమవైపు (చేయ) పరావలయము (*Left Handed Parabola*) అంటారు.

3. $x^2 = -4ay$ ఈ సమీకరణము చే వివరించబడే పరావలయ రూపము ఈ క్రింద చూపిన విధంగా ఉంటుంది.



ఈ పరావలయము యొక్క నియత రేఖ X అక్షమునకు సమాంతరముగా వుంటుంది. దీని నాభి నిరూపకాలు $S (0, -a)$, మరియు శీర్షము (0, 0) దీని నియతరేఖ సమీకరణము $y = a$ అవుతుంది. ఈ పరావలయము X అక్షమునకు పూర్తిగా క్రింది వైపున వుంటుంది. దీనిని క్రింది వైపు పరావలయము (*Down Ward Parabola*) అంటాము.

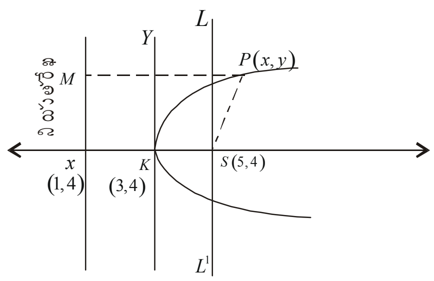
4. $x^2 = 4ay$ అనే సమీకరణముచే వివరించబడే పరావలయము యొక్క రూపం క్రింది పటములో చూపిన విధంగా ఉంటుంది.



ఈ పరావలయము యొక్క నియత రేఖ X అక్షమునకు సమాంతరముగా ఉంటుంది. దీని యొక్క నాభి $S\ (0,\ a)$ X అక్షమునకు పైన వుంటుంది. దీని నియత రేఖ సమీకరణము $y = -a$ అవుతుంది. ఇది పూర్తిగా X అక్షమునకు పై వైపున వుంటుంది కాబట్టి దీనిని పై వైపు (*Upward Parabola*) పరావలయము అంటారు.

ఉదా: (3, 4) నిరూపకాలుగా గల ఒక బిందువు శీర్షముగా గల మరియు (5, 4) నాభిగా గల ఒక పరావలయము యొక్క సమీకరణము కనుక్కోండి.

సాధన: క్రింది పటము చూడండి



నియత రేఖ అక్షమును z వద్ద ఖండిస్తుంది అనుకుంటే పరావలయ నిర్వచనం ప్రకారం శీర్షము *A, SZ* రేఖా ఖండము యొక్క మధ్య బిందువు అవుతుంది. కాబట్టి Z యొక్క నిరూపకాలు (x_1, y_1) అనుకుంటే $3 = \dfrac{x_1 + 5}{2}$ $\quad 4 = \dfrac{y_1 + 4}{2}$ అవుతాయి.

సాధించగా $x_1 = 1,\ y_1 = 4$ అవుతాయి.

$\therefore$ నియత రేక యొక్క సమీకరణము $x = -1$ అవుతుంది.

పరావలయ నిర్వచనం ప్రకారం $P\ (x,\ y)$ పరావలయం బిందుపథము మీద ఒక బిందువు అయినట్లయితే P నుండి నియత రేఖ పైకి గీయబడిన లంబము M అనే బిందువు దగ్గర కలుస్తుంది అనుకుంటే MP మధ్య దూరం మరియు SP మధ్య దూరం

$$SP = PM$$
$$\sqrt{(x-5)^2 + (y-4)^2} = \frac{x-1}{1}$$
$$(x-5)^2 + (y-4)^2 = (x-1)^2$$
$$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 2x + 1$$
$$y^2 - 8x - 8y + 40 = 0$$

ఉదా: $(y - A)^2 = 4a\,(x - B)$ ఒక పరావలయ సమీకరణమైతే పరావలయము యొక్క నాభి , నియత రేఖ, అక్షము, శీర్షము, నాభి లంబము, స్పర్శరేఖ సమీకరణము కనుక్కోండి.

సాధన: ఇప్పటి వరకు మనం నేర్చుకున్న పరావలయమ యొక్క శీర్షము (0, 0), ఈ సమస్యలో శీర్షము యొక్క మిరూపకాలు (0, 0)గా మార్చటానికి వీలుగా కేంద్రమును బదిలి చేయటాని $x = X + B$, $y = y + A$ అనుకుంటే

$X = x - B$

$Y = y - A$ అవుతుంది. ఈ మార్పున ఇచ్చిన పరావలయము సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించగా

$Y^2 = 4aX$ అవుతుంది.

పరావలయము యొక్క సమీకరణము పై విధంగా ఉంటే దాని లక్షణాలు గురించి మనకు ఇంతకు ముందే తెలుసు. ఈ సమీకరణముచే వివరించబడే పరావలయము యొక్క

1. శీర్షము (0, 0)
2. నాభి $(a, 0)$
3. అక్షము యొక్క సమీకరణము $Y = 0$
4. నియత రేఖ యొక్క సమీకరణము $X = -a$
5. శీర్షము వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణము $X = 0$
6. నాభి లంబము $4a$ అవుతాయి.

కావున ఇచ్చిన అసలు అక్షములకు

నాభి $X = (x - B) = a$

$$X - B = a \Rightarrow x = a + B$$

$$Y = y - A = 0 \Rightarrow y = A$$

$\therefore$ నాభి $(a + B, A)$

శీర్షము (0, 0) అనగా

$$x = x - B = 0 \Rightarrow x = +B$$
$$y = y - A = 0 \Rightarrow y \pm A$$

$\therefore$శీర్షము (B, A)

నియత రేఖ సమీకరణము $X = -a$

$$i.e.\ x - B = -a \Rightarrow x = B - a$$

శీర్షము వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణము $X = 0$

$$i.e.\ x - B = O \Rightarrow x = B$$

అక్షము $Y = 0 \quad \Rightarrow y - A = 0 \Rightarrow y = A$

నాభి లంబము $= 4a.$

ఉదా: $y^2 - 4x + 4y - 8 = 0$ చే సూచించబడే పరావలయము యొక్క నాభి, శీర్షము, నాభి లంబము, అక్షము, శీర్షము వద్ద స్పర్శరేఖ మియత రేఖ మొదలగున్నవి కనుక్కోండి.

సాధన: ఇచ్చిన సమీకరణము

$y^2 - 4x + 4y - 8 = 0$

దీనిని ఒక పూర్తి వర్గముగా వ్రాయగా $y^2 + 4y + 4 = 4x + 8$

$$(y+2)^2 = 4(x+2)$$

కేంద్రాన్ని మారుస్తు $y + 2 = Y, x + 2 = X$ అని ప్రతిక్షేపించగా $Y^2 = 4X$ అవుతుంది.

నిర్వచనం ప్రకారం ఈ సమీకరముచే సూచించబడే పరావలయము యొక్క నాభి: **(1, 0)**

$$X = 1 \Rightarrow x + 2 = 1 \Rightarrow x = -1$$
$$Y = 0 \Rightarrow y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2$$

$\therefore$ నాభి **(-1, -2)**

శీర్షము **(0, 0)**

$$i.e, \quad X = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$
$$Y = 0 \Rightarrow y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2$$

$\therefore$ శీర్షము **(-2, -2)**

అక్షము $Y = 0 \Rightarrow y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2$

శీర్షము వద్ద స్పర్శరేఖ $X = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

నియత రేఖ $X = 1 \Rightarrow x + 2 = 1 \Rightarrow x = -1$

నాభి లంబము $= 4$.

3.6.1 పరావలయము యొక్క స్పర్శరేఖ సమీకరణము (*Equation of Tangent of a Parabola*): $y^2 = 4ax$ అనే సమీకరణముచే సూచించబడే పరావలయనకు $P (x, y)$ అనే బిందువు వద్ద గీయబడిన స్పర్శరేఖ సమీకరణము.

$$yy_1 = 2a (x + x_1)$$

ఉదా: $y^2 = 8x$ చే సూచించబడే పరావలయము యొక్క స్పర్శరేఖ సమీకరణము **(5, 5)** బిందువు వద్ద కనుగొనండి.

సాధన: ఇచ్చిన పరావలయము సమీకరణము $y^2 = 8x$ దీనిని సామాన్య పరావలయ సమీకరణముతో పోల్చిచూడగా $a = 2$ అవుతుంది.

ఇచ్చిన బిందువు యొక్క నిరూపకాలు $x_1 = 5, \ y_1 = 5$

కాబట్టి (5, 5) బిందువు వద్ద పరావలయము యొక్క స్పర్శరేఖ సమీకరణము

$$5y = 2\times 2\,(x+5)$$
$$5y = 4(x+5)$$
$$5y = 4x+20$$

3.6.2 పరావలయము యొక్క నార్మల్ సమీకరణము (*Equation of Normal of a Parabola*): $y^2 = 4ax$ ఒక పరావలయము యొక్క సమీకరణము అయితే (x_1 , y_1) బిందువు వద్ద నార్మల్ సరళరేఖ సమీకరణము

$y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)$ అవుతుంది.

ఉదా: $y^2 = 8x$ పరావలయమునకు (5, 5) బిందువు వద్ద నార్మల్ రేఖ సమీకరణము కనుక్కోండి.

సాధన: $y^2 = 8x$ పరావలయమునకు యొక్క సమీకరణమైతే (5, 5) అనే బిందువు వద్ద నార్మల్ రేఖ సమీకరణము

$$y-5 = \frac{-5}{2\times 2}(x-5)$$

$$y-5 = -\frac{5}{4}(x-5)$$

$$4y-20 = -5x+25$$

$$4y+5x = 45$$

3.7 సారాంశం:

1. రెండు వేర్వేరు బిందువులు $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ మధ్య దూరం $d = \overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

2. $A(x_1,y_1), B(x_2 , y_2)$ల మధ్య రేఖా ఖండాన్ని $m : n$ నిష్పత్తిలో అంతర్గతంగా విభజించే 'Q' అనే బిందువు నిరూపకాలు $\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n} , \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$

   బహిర్గతంగా విభజించే P అనే బిందువు నిరూపకాలు $\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n} , \frac{my_2 - ny_1}{m-n}\right)$.

3. $A(x_1 , y_1) , B(x_2 , y_2)$ అనే రెండు బిందువుల ద్వారా పోవు సరళరేఖ సమీకరణము $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

4. $A\ (x_1\ ,\ y_1)$ అనే బిందువు గుండా పోతూ *'m'* వాలుగా గల సరళరేఖ సమీకరణము $y - y_1 = m(x - x_1)$

5. *'a'* x అంతర్ ఖండము, *'b'* y అంతర ఖండము అయిన సరళరేఖ సమీకరణము $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

6. రెండు సరళరేఖలు సమాంతరముగా వుంటే వాటి వాలులు సమానం $(\mathrm{m}_1 = m_2)$

7. రెండు సరళరేఖలు ఒకదానికొకటి లంబంగా వున్న వాటి వాలుల లబ్ధం '-1' కి సమానం $(m_1 \times m_2 = -1)$

8. $a_1x + b_1y + c_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$ అనే రెండు సరళరేఖల ఖండన బిందువు నిరూపకాలు

$$\left(\frac{b_1c_2 - c_1b_2}{a_1b_2 - b_1a_2}, \frac{c_1a_2 - a_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}\right)$$

9. మూడు వేర్వేరు సరళరేఖలు ఒకే ఒక బిందువు గుండా పోతుంటే వాటిని అనుషక్త రేఖలు అని, ఆ బిందువుని అనుషక్త బిందువని అంటారు.

10. $m_1\ ,\ m_2$ వాలులుగా గల రెండు వేర్వేరు సరళరేఖల మధ్య కోణము θ అయితే $\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$

11. $ax + by + c = 0$ అనే సరళరేఖకు $P(x_1\ ,y_1)$ అనే బిందువుకు మధ్య గల లంబదూరము $\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

12. (h,k) కేంద్రముగా , (x,y) బిందువు ద్వారా పోవు *'r'* వ్యాసార్థము గల వృత్త సమీకరణము

$$(\mathrm{x - h})^2 + (y - k)^2 = r^2$$

13. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ వృత్తాన్ని $(x_1\ y_1)$ బిందువు వద్ద తాకుతున్న స్పర్శరేఖ సమీకరణము.

$$xx_1 = yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$$

14. స్పర్శ బిందువు దగ్గర స్పర్శరేఖకు లంబముగా వున్న రేఖను నార్మల్ రేఖ అంటాము.

15. $(a, 0)$ నాభిగాను, y అక్షము నియత రేఖగా కల పరావలయము యొక్క సమీకరణము $y^2 = 4ax$

3.8 అభ్యాస ప్రశ్నలు:

1. (3, -5) (2, -6) అనే బిందువుల ద్వారా పోవు సరళరేఖ సమీకరణాన్ని కనుగొనుము.
2. $4x + 7y + 9 = 0$ అనే సమీకరణముచే సూచించబడే సరళరేఖ 'వాలు' అంతర్ ఖండ విలువలు కనుగొనుము.
3. $2x - 3y + 7 = 0,\ x + 3y - 19 = 0$ మరియు $3x - 4y + 8 = 0$ అనే మూడు సరళరేఖలు అనుషక్తాలా? కావా? అనుషక్తాలైతే వాటి అనుషక్త బిందువు నిరూపకాలు కనుగొనండి.

4. $x - 7y + 25 = 0$ మరియు $3x - 4y - 25 = 0$ అనే సరళరేఖల ఖండన బిందువు ద్వారా పోతూ, $5x + 4y = 19$ సరళరేఖకు సమాంతరముగా వుండే సరళరేఖ సమీకరణము కనుగొనండి.
5. $7x + 5y = 13$ సరళరేఖకు (-3, -4) అనే బిందువుకు మధ్య గల లంబ దూరాన్ని కనుక్కోండి.
6. $2x - 5y + 14 = 0$, $3x + 7y - 37 = 0$ అనే రెండు సరళరేఖల మధ్య కోణాన్ని కనుక్కోండి.
7. ఒక పరిశ్రమలో రూ॥ 5000లు పెట్టుబడి పెడితే రూ॥ 200లు లాభం వస్తుంది. రూ॥ 10,000లు పెట్టుబడి పెడితే రూ॥ 350 లాభం వస్తుంది. అయితే ఈ పరిశ్రమలో పెట్టుబడికి లాభానికి గల సంబందాన్ని ఏకఘాత సంబంధం అనుకుంటూ ఆ సంబందాన్ని తెలిపే సరళరేక సమీకరణాన్ని కనుగొనండి.
8. 'P' ధర అయి 'Q' పరిమాణాన్ని సూచించే సంకేతాలు అయితే ఒక వస్తువు యొక్క ధరకు, పరిమాణానికి మధ్య గల సంబంధము $2p + q = 20$ అయిన ధర $P =$ రూ॥ 2లు వద్ద ధర డిమాండ్ వ్యాకోచత్వం కనుక్కోండి.
9. (3, 4) కేంద్రబిందువు గాను 5 వ్యాసార్థంగా గల వృత్తము యొక్క సమీకరణము కనుగొనుము.
10. $x^2 + y^2 + 3x - 8y + 17 = 0$ వృత్తమునకు (-2, 5) అనే బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ మరియు నార్మల్ రేఖ సమీకరణము కనుగొనుము.
11. (3, 5) నాభి గాను (4, 5) శీర్షముగా గల పరావలయము యొక్క సమీకరణము కనుగొనుము.
12. $y^2 = 16x$ అనే పరావలయము యొక్క స్పర్సరేఖ మరియు నార్మల్ రేఖ యొక్క సమీకరణము (3, 3) బిందువు వద్ద కనుగొనుము.

3.9 చదవవలసిన గ్రంథాలు:

1. *Sanche D.C., Kapoor, V.K.* - *Business Mathematics, Sultan Chand & Sons*
2. *R.G.D. Allen* - *Mathematical Analysis for Economics*
3. *R. Movely* - *Mathematics for Modern Economits*
4. *Metha & Madami* - *Mathematics For Economists*
5. *G.S. monga* - *mathe,atics & Statistics for Economists.*

పాఠం - 4

అవకలనం (DIFFERENTIATION)

విషయ క్రమం:

4.0 ఉద్దేశాలు:

ఈ పాఠం చదివిన తరువాత ఈ క్రింది అంశాలపై మనకు అవగాహన ఏర్పడుతుంది.

అవకలనం - నిర్వచనం

అవకలనంలోని రకాలు సూక్ష్మ అర్థశాస్త్రంలో అవకలనంను ఉపయోగించటం

4.1 అవకలనం - నిర్వచనం:

అర్థశాస్త్రంలో మనము వివిధ ఆర్థిక చలరాశుల మధ్య గల సంబంధాలను అధ్యయనం చేస్తూ ఉంటాం. ఉదాహరణకు ఒక వస్తువు యొక్క డిమాండుకు (Demand) దాని ధరకు (price) గల సంబంధము మనము సూక్ష్మ అర్థశాస్త్రములో అధ్యయనం చేస్తూ ఉంటాము. దానిని డిమాండ్ ప్రమేయము అంటారు.

ఈ ప్రమేయాలలో ఒక చలరాశిని స్వతంత్ర చలరాశియని (indipendent variable) మరోక దానిని పరితంత్ర చలరాశియని (dependent variable) పేర్కొనటం రివాజు. ఉదాహరణకు డిమాండు ప్రమేయంలో y ని ఒక వస్తువు యొక్క డిమాండు పరిమాణంగాను,

xని ఆ వస్తువు యొక్క ధరగాను భావిస్తే $y = f(x)$అనే సమీకరణం ద్వారా డిమాండు ప్రమేయాన్ని సూచించవచ్చు. ఇందులో xస్వతంత్ర చలరాశిలో మార్పు జరిగితే, yపరితంత్ర చలరాశిలో కూడ మార్పులు జరగడము సహజము. ఈ మార్పులలో వచ్చే గతిరీతులను అవకలనం ద్వారా కనుగొనవచ్చును.

$y= f(x)$అనే ప్రమేయం, ఒక నిర్ణీత అవధులలో అవిచ్ఛిన్నమయి, xలో Δx అనే మార్పు జరిగితే, దాని వలన yలో Δy అనే మార్పు జరిగితే క్రింద చూపిన విధంగా అవధిని () గనుక కనుగొనగల్గినట్లు అయితే, ఆ అవధిని అవకలని(derivative)అని అంటారు.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ఈ అవకలనాన్ని కొంతమంది అవకలన గుణకము (differential coefficient) అని కూడ అంటారు. దీనిని $\frac{dy}{dx}, f^1(x), y^1$ అనిగాని వ్రాస్తారు.

కొన్ని ముఖ్య అవకలనలు:

1. $y = x^n$ అయితే $\frac{dy}{dx} = n.x^{n-1}$
2. $y = e^x$ అయితే $\frac{dy}{dx} = e^x$
3. $y = \log x$ అయితే $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$
4. $y = a^x$ అయితే $\frac{dy}{dx} = a^x \log x$
5. $y = c$ స్థిర సంఖ్య అయితే $\frac{dy}{dx} = 0$

4.2. అవకలన సిద్ధాంతాలు:

అవకలన సిద్ధాంతాలు నేర్చుకునే ముందు ఒక ప్రమేయానికి ముందు స్థిర గుణకముండే అవకలనని కనుగొనటం ఏలా అన్నది నేర్చుకుందాం. $y = c.f(x)$ అనే రూపంలో ప్రమేయముండీ c అన్నది స్థిరరాశి, $f(x)$అనేది ప్రమేయము.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = c.\frac{d}{dx}(f(x))$$

$$= c.f^1(x)$$

అందేచేత ఒక ప్రమేయానికి స్థిరగుణకము ఉన్నప్పుడు, దానిని బయటకు తీసేసి, ఆ మిగిలిన ప్రమేయానికి అవకలనిని కనుగుంటే సరిపోతుంది.

ఉదాహరణ : $y = f(x) = 4x^3$

$$\frac{dy}{dx}=4.\frac{d}{dx}\left(x^3\right)$$

$$=4.3\,x^{3-1}$$

$$=4.\ 3\,x^2$$

$$=12\,x^2$$

4.2.1 మొత్తం నియమం (Sum rule): రెండు గాని అంతకంటే ఎక్కువ గాని ప్రమేయాల మొత్తం అవకలని, ఆయా వేర్వేరు ప్రమేయాల అవకలనిల మొత్తానికి సమానం.

$y = u + v + w$ అనుకుందాం

అప్పుడు $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(u+v+w) = \frac{d}{dx}(u)+\frac{d}{dx}(v)+\frac{d}{dx}(w)$

అలానే $y=u+v-w$ అయితే

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(u)+\frac{d}{dx}(v)-\frac{d}{dx}(w)$$

ఉదాహరణ : క్రింది ప్రమేయాలకు అవకలనిలు కనుగొనండి.

1. $y=4x^2+x+8$

$$\frac{dy}{dx}=4.\frac{d}{dx}\left(x^2\right)+\frac{d}{dx}(x)+\frac{d}{dx}(8)$$

$$=4.2\,x+(1)+0$$

$$=8x+1$$

2. $y=\frac{5}{4}x^3-\frac{6}{7}x^5+3x^{-2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{4}\frac{d}{dx}\left(x^3\right)-\frac{6}{7}\frac{d}{dx}\left(x^5\right)+3.\frac{d}{dx}\left(x^{-2}\right)$$

$$=\frac{5}{4}3x^{3-1}-\frac{6}{7}5.x^{4-1}+3.\ -2\,x^{-2-1}$$

$$=\frac{5}{4}3x^2-\frac{6}{7}5.x^3-6x^{-3}$$

$$=\frac{15}{4}x^2-\frac{30}{7}.x^3-6\,x^{-3}$$

అభ్యాసం: ఈ క్రింది ప్రమేయాలకు $\frac{dy}{dx}$ లను కనుక్కోండి.

1. $y = x^3 + x^4$
2. $y = 2x^2 + 3x^4$
3. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$
4. $y = x + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^y} + 5^x$
5. $y = e^x + x^3 - x^{-5} + 4^x$

జవాబులు:

1. $3x^2 + 4x^3$
2. $4x + 12x^3$
3. $\frac{-1}{2} x^{-3/2}$
4. $1 - \frac{4}{x^2} - \frac{14}{x^8} + 57 \log 5$
5. $e^x + 3x^2 + 5x^{-6} + 4^x \log 4$

4.2.2 లబ్దపు నియమం (**Product rule**): $y = u, v$ లో u, v లు x లో ప్రమేయాలనుకుందాం. అప్పుడు

$$\frac{dy}{dx} = u.\frac{d}{dx}(v) + v\frac{d}{dx}(u)$$

అలానే $y = u, v, w$ అయితే

$$\frac{dy}{dx} = uv.\frac{d}{dx}(w) + u\,v\frac{d}{dx}(v) + v\,w\frac{d}{dx}(u)$$

ఉదాహరణ :

$$y = \left(3x^2 + 1\right)\left(x^2 + 3x\right)$$

$y = u, v$ రూపంలో ఉంది. అందుచేత

$$\frac{dy}{dx} = u.\frac{d}{dx}(v) + v.\frac{d}{dx}(u)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \left(x^2 + 1\right)\frac{d}{dx}\left(x^2 + 3x\right) + \left(x^2 + 3x\right)\frac{d}{dx}\left(x^2 + 1\right)$$

$$=\left(x^2+1\right)(2x+3)+\left(x^2+3x\right)(2x)$$

$$=2x^3+3x^2+2x+3+2x^3+5x^2$$

$$=4x^3+7x^2+2x+3$$

అభ్యాసం: ఈ క్రింది ప్రమేయాలకు $\frac{dy}{dx}$ లను కనుగొనండి

1. $y=(x+a)(x+b)$
2. $y=x(x+2)(x+3)$
3. $y=x^5\left(2x^2+1\right)$
4. $y=\left(x^5+x^2\right)\left(x^3+x\right)$
5. $y=\left(ax^2+bx\right)\left(cx^4+dx^3\right)$

జవాబులు:

1. $2x+a+b$
2. $3x^2+4x+9$
3. $4x^2\left(x^4+2x^2+1\right)$
4. $\left(x^5+x^2\right)\left(3x^2+1\right)+\left(x^3+x\right)\left(5x^4+2x\right)$

4.2.3 విభక్త నియమం (Quotient rule): $y=\frac{u}{v}$ లో u, v లు x లో ప్రమేయాలనుకుందాం అప్పుడు $\frac{dy}{dx}=\frac{v.\frac{d}{dx}(u)-u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$

ఉదాహరణ : $y=\frac{x^3-1}{2x^2+1}$ ఇది $y=\frac{u}{v}$ అనే రూపంలో ఉంది. అందుచేత $\frac{dy}{dx}=\frac{v.\frac{d}{dx}(u)-u.\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\left(2x^2+1\right)\frac{d}{dx}\left(x^3-1\right)-\left(x^3-1\right)\frac{d}{dx}\left(2x^2+1\right)}{\left(2x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{\left(2x^2+1\right)\left(3x^2\right)-\left(x^3-1\right)(4x)}{\left(2x^2+1\right)^2}$$

$$\frac{6x^4+3x^2-4x^4+4x}{\left(2x^2+1\right)^2}=\frac{2x^4+3x^2+4x}{\left(2x^2+1\right)^2}$$

అభ్యాసం : క్రింది ప్రమేయాలను $\frac{dy}{dx}$ లను కనుగొనండి.

1. $y=\frac{a-x}{a+x}$ 2. $y=\frac{x^3}{1+x^2}$ 3. $y=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ 4. $y=\frac{(x+1)(2x-1)}{x-3}$ 5. $y=\frac{3x+2}{4x^2+3}$

జవాబులు:

1. $\frac{2a}{(a+x)^2}$ 2. $\frac{x^2(3+x^2)}{(1+x^2)^2}$ 3. $\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$ 4. $\frac{2(x^2-6x+1)}{(x-3)^2}$ 5. $\frac{-(12x^2+16x-9)}{(4x^2+3)^2}$

4.2.4 గొలుసు నియమం (Chain rule): y అనే చలరాశి u లో ప్రమేయమయి, u, x లో ప్రమేయమయితే $y=f(u), u=\phi(x)$ అయితే అది ప్రమేయములో ప్రమేయమవుతుంది.

అప్పుడు $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ అవుతుంది.

ఉదాహరణ :

$y=\sqrt{4x^3+7}=\left(4x^3+7\right)^{\frac{1}{2}}$

$4x^3+7=u$ అనుకోండి

అప్పుడు $y=4^{1/2}$, $u = 4x^3+y$ అవుతుంది.

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$

$\frac{du}{dx}=12x,\ \frac{dy}{du} = \frac{1}{2}, u^{-1/2} = \frac{1}{2}\left(4x^3+7\right)^{-1/2}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(4x^3+7\right)^{-1/2}12x = \frac{6x}{\sqrt{4x^3+7}}$

అభ్యాసం: ఈ క్రింది ప్రమేయాలను $\frac{dy}{dx}$ లను కనుగొనండి.

1. $y=\left(x^2+2x+3\right)^5$ 2. $y=e^{2x+5}$ 3. $y=\sqrt{3x-4}$ 4. $y=\frac{1}{\sqrt{2-3x}}$ 5. $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-2x}}$

జవాబులు:

1. $10\left(x^2+2x+3\right)^4(x+1)$ 2. $2.e^{2x+5}$ 3. $\frac{3}{2}.\frac{1}{\sqrt{3x-4}}$ 4. $\frac{3}{2}\ \frac{1}{\sqrt{2-3x}}$ 5. $\frac{3}{2}\ \frac{1}{\sqrt{1+x}\ (1-2x)^3}$

4.2.5 సంవర్గమాన అవకలనం (): ఏదైనా ఒక ప్రమేయము $y=f(x)$ అనే రూపంలో ఉంటే, సంవర్గమాన అవకలనం ద్వారా $\frac{dy}{dx}$ ను కనుగొనవచ్చును. పైన ఉదహరించిన ప్రమేయానికి కిరువైపులా (సహజ) సంవర్గమానాలు తీసుకుంటే

$\log y=\phi(x).\log f(x)$ ఎడమ వైపునున్న y,x లో ప్రమేయము కాబట్టి, $\log y$ యొక్క అవకలని $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$ (ఎంచేతనంటే, $\log y$ అవకలని $\frac{1}{y}$ కాబట్టి, y,x లో ప్రమేయము కాబట్టి గొలుసు నియమము ప్రకారము y యొక్క అవకలని $\frac{dy}{dx}$) కుడి వైపునున్న ప్రమేయాన్ని, లబ్దపు అవకలనం ద్వారా అవకలనిని కనుగొనవలెను.

$$\therefore \frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx} = \phi(x)\frac{1}{f(x)}\ f^1(x) + \log f(x)\ \phi^1(x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = f(x)^{\phi(x)}\left[\phi(x).\ \frac{f^1(x)}{f(x)} + \log f(x).\phi^1(x)\right]$$

ఉదాహరణ :

$y=x^{2x+3}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

ఈ ప్రమేయానికి రెండు వైపులా సంవర్గమానాలు తీసుకుంటే

$\log y=\log_x^{2x+3}$ **=** $(2x+3).\ \log x$ $\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx}=(2x+3)\ .\ \frac{d}{dx}(\log x) + \log x.\ \frac{d}{dx}(2x+3)$

$$=2x+3.\frac{1}{x}+\log x.2$$

$$=\frac{2x+3}{x} + 2.\log x$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{2x+3}{x}+2\log x\right) = x^{2x+3}\left(\frac{2x+3}{x}+2.\log\ x\right)$$

అభ్యాసము:

1. $\left(2x^2+3x\right)^{4x+5}$ 2. x^x 3. $(4x+5)^{(2x+5)}$ 4. $\left(3x^2+4\right)^{(3x+2)}$ 5. x^{x^x}

జవాబులు:

1. $\left(2x^2+3x\right)^{4x+5}\left[\frac{(4x+5)(4x+3)}{2x^2+3x}+4\log\left(2x^2+3x\right)\right]$ 2. $x^x(1+\log x)$

3. $(4x+5)^{2x+5}\left(\frac{8x+20}{4x+5}+2\log(4x+5)\right)$ 4. $\left(3x^2+4\right)^{3x+2}\left(\frac{18x^2+12x}{3x^2+4}+3\log\left(3x^2+4\right)\right)$

5. $x^{x^x}\;.\;.\;x^x\;\log x\left[1+\log x+\frac{1}{x.\log x}\right]$

4.2.6 J O` §Á ą ¬ʹ† Ç• ä½J =H #O (Differentiation of the Implicit function): కొన్నిసార్లు, $y=f(x)$ అనే విధంగా స్పష్టంగా (Explicit) యివ్వకుండా x, y లు కలిపి ఇచ్చినప్పుడు కూడా అవకలనం కనుగొనవచ్చును. ఉదాహరణకు x^2+xy+y^2 అని సమీకరణానికి $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనవలసి వచ్చినప్పుడు, ఏ పదానికాపదంగా అవకలనం చేయాలి. y వచ్చినప్పుడు, y ని గొలుసు నియమం ద్వారా అవకలనిని కనుగొనాలి. అనగా y కి అవకలనిని కనుగొనాలి, y ని x లో ప్రమేయంగా భావించి $\frac{dy}{dx}$ అని వ్రాస్తూ యుండాలి.

ఉదాహరణ : $x^3+xy+y^2+5=0$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ను కనుగొనుము.

ఇందులో నాలుగు పదాలున్నాయి. అవి $x^3, xy, y^2, 5$ లు. వీటికి ఏ పదానికాపదం అవకలనం చేయాలి.

అంటే $\frac{dy}{dx}\left(x^3\right)=3x^2,\ \frac{d}{dx}(x,y)=x.\frac{dy}{dx}+y.\,1$

$$\frac{d}{dx}\left(y^2\right)=2y\frac{dy}{dx},\ \frac{d}{dx}(5)=0$$

$$\therefore\ 3x^2+x\frac{dy}{dx}+y+2y\frac{dy}{dx}+0=0$$

$$\frac{dy}{dx}(x+2y)=-3x^2-y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\left(3x^2+y\right)}{x+2y}$$

అభ్యాసము:

1. $x^2+y^2-2xy=0$ 2. $x^2+3xy+y^2=4$ 3. $x^3+5x^2y+yx=5$

4. $(x+y)^{m+n} = x^m . y^n$ 5. $x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}=0$

జవాబులు:

1. $\frac{1-x}{y}$ 2. $\frac{-(2x+3y)}{3x+2y}$ 3. $\frac{3x^2+10xy+y}{x(5x+1)}$ 4. $\frac{y}{x}$ 5. $\frac{-1}{(1+x)^2}$

4.2.7 పారంపర్య అవకలనం (Successive Differentiation**):** $y=f(x)$కు అవకలనిని కనుగొనండి, $\frac{dy}{dx}$కూడ xలో ప్రమేయమయితే, దానికి కూడ అవకలనిని కనుగొనవచ్చును. దానిని $\frac{d^2y}{dx^2}$అని గాని, "y"అని గాని వ్రాయవచ్చు. దీనిని రెండవ అవకలని (Second derivative)అని అంటారు.

ఉదాహరణ : $y=x^5$ అనే ప్రమాయానికి మూడవ అవకలనాన్ని కనుగొనండి.

మొదటి అవకలనం = $\frac{dy}{dx} = 5x^4$

రెండవ అవకలనం = $\frac{d^2y}{dx^2} = 5.\ 4x^3 = 20x^3$

మూడవ అవకలనం = $\frac{d^3y}{dx^3} = 20.3x^2 = 60x^2$

క్రింది ప్రమేయాలకు అవకలనాలకు అవకలనాలను కనుగొనండి.

అభ్యాసం :

1. x^n 2. x^3 3. $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 4. $\sqrt{1-x^2}$ 5. $(x^2+1)(x^3-5)$

1. $n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)x^{n-r}$ 2. 6 3. $\frac{3}{4x^{\frac{5}{2}}}$

4. $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\left[\frac{x}{1-x^2}+1\right]$ 5. $20x^2+6x-10$

4.3 అవకలని ఆర్థికానువర్తాలు (Economic Applications of Derivatives) :

అవకలని ఆర్థికశాస్త్రానికి అనువర్తింపచేటము ద్వారా ఈ క్రింది అంశాలను మనము అధ్యయనం చేయవచ్చును. అవి:

1. మార్పులోని రేటును కనుగొనడం (rate of change)
2. ఉపాంత విలువను కనుగొనడం (marginal values)

4.3.1 మార్పులోని రేటు కనుగొనటం: ఒక ఉదాహరణ ద్వారా మార్పులోని రేటును కనుగొందాము. $y = f(x)$లో x అన్నది ఉత్పత్తి పరిమాణము, y అన్నది మొత్తము వ్యయము.

ఉత్పత్తిలో Δx అనే మార్పు జరిగితే వ్యయంలో Δy అనే మార్పు జరిగిందనుకుందాము. జరిగిన మార్పురేటును $\frac{dy}{dx}$ ద్వారా కనుగొనవచ్చును. అందుచేత $\frac{dy}{dx}$ మార్పులోని రేటు తెలియజేయటమే కాక x లో అతి తక్కువ మార్పు జరిగినట్లయిన, y లో వచ్చిన మార్పును తెలియజేస్తుంది.

ఉదా : $y = 3x+4$ అనే ప్రమేయంలో $\frac{dy}{dx} = 3$ (ఇదే మార్పురేటును తెలియజేస్తుంది). దీని అర్థమేమిటంటే ఉత్పత్తి పరిమాణంలో ఒక యూనిట్ మార్పు వచ్చినట్లయితే, మొత్తము వ్యయంలో 3 యూనిట్ల మార్పు వస్తుందన్నమాట.

4.3.2 ఉపాంత విలువలను కనుగొనటం: సూక్ష్మ అర్థశాస్త్రములో ఉపాంత ప్రయోజనము, ఉపాంత రాబడి, ఉపాంత వ్యయము, ఉపాంత ఉత్పాదకత యొక్క ప్రాముఖ్యత తెలుసుకున్నాము. అవకలనము ద్వారా ఉపాంత వ్యయము, ఉపాంత రాబడి కనుగొనవచ్చును. ఉదాహరణకు మొత్తం వ్యయం తెలిసినపుడు ఉపాంత వ్యయం మనం అవకలనం ద్వారా కనుగొనవచ్చు.

ఉదాహరణ :

1. $R=3x^2+4$ మొత్తము రాబడి అయినప్పుడు ఉపాంత రాబడి కనుగొనండి.

   మొత్తము రాబడి ప్రమేయమును ఉత్పత్తి ద్వారా అవకలనం చేయటము వలన ఉపాంత రాబడి తెలుస్తుంది.

   $$\frac{d}{dx}(R) = 3.\frac{d}{dx}\left(x^2\right)+4\frac{d}{dx}(4) \quad = 3.\ 2x+0 = 6x$$

2. $AC=2x+5$ సగటు వ్యయం అయిన ఉపాంత వ్యయం కనుగొనుము.

   మొత్తము వ్యయం = మొత్తం ఉత్పత్తి × సగటు వ్యయం $i.e.\ x \times A.C$

   $$= x \times (2x+5)$$

   $$c = 2x^2+5x$$

   ఉపాంత వ్యయం $= \frac{d}{dx}(c) = 2.2x + 5$

   $$= 4x+5$$

అభ్యాసం :

1. $\pi = ax^2 + bx + c$ మొత్తం వ్యయ ప్రమేయమయినట్లయితే సగటు, ఉపాంత, వ్యయ ప్రమేయాలను కనుగొనండి.

2. $p = 20 - x$ డిమాండు ప్రమేయము అయితే, మొత్తం ఉపాంత రాబడి ప్రమేయాలను కనుగొనండి.

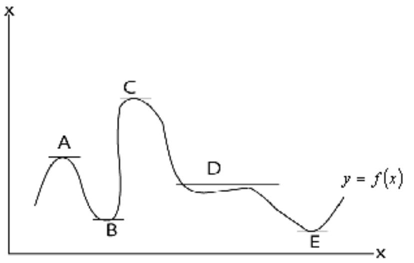
3. $u = -2 + 3x - 5x^2$ అను మొత్తం ప్రయోజన ప్రమేయానికి ఉపాంత ప్రయోజనము కనుగొనుము.

4. $Q = 100 + 10L - L^2$ ఉత్పత్తి ఫలానికి శ్రామికుల ఉపాంత ఉత్పాదకత కనుగొనుము.

5. $c = 4x^2 + 2x$ సగటు వ్యయ ప్రమేయానికి మొత్తం వ్యయ, ఉపాంత వ్యయ ప్రమేయాలను కనుగొనుము.

4.4 ప్రమేయాలకు గరిష్ట, కనిష్ట విలువలను కనుగొనుట(Finding Maximam and Minimum):

$y = f(x)$ అనే ప్రమేయానికి గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు ఉంటాయి. రెండింటిని కలిపి అంత్య విలువలు అని అంటారు. $y = f(x)$అనే ప్రమేయంలో x యొక్క ప్రదేశము (domain)ను విస్తరించినట్లయితే, గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు కొన్ని బిందువుల వద్ద సంభవించవచ్చు. క్రింద గీచిన రేఖాచిత్రము మీరు గమనిస్తే మీకు విపులంగా తెలుస్తుంది.



పై చిత్రంలో రెండు గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు, ఒక నీతి పరావర్తన బిందువు ఉఆన్నయి. ఇందులో A, C లు గరిష్ట బిందువులు B, E లు కనిష్ట బిందువులు. D నీతి పరావర్తన బిందువు. ఈ D అనే బిందువు వద్ద ప్రమేయానికి కనిష్ట విలువ ఉండదు. గరిష్ట విలువ ఉండదు. C అనే బిందువు వద్ద ప్రమేయానికి గరిష్ట విలువలో అత్యధిక విలువ కాబట్టి దానిని గోళ గరిష్టత (global maximum) అని, తదితర గరిష్ట బిందువులను (A లాంటి బిందువులు) స్థానిక గరిష్టత (local maximum) అని అంటారు. అదే విధంగా, అన్నిటికంటే అతి తక్కువ బిందువును (E లాంటి బిందువును) గోళ కనిష్టత (global minimum) అని తదితర కనిష్ట బిందువులను (B లాంటి బిందువులు) స్థానిక కనిష్టత (local minimum) అని అంటారు.

4.4.1 ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమాలు (Necessary and sufficient conditions): $y = f(x)$అనే ప్రమేయానికి గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు కనుగొనాలంటే ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమాలు కలవు. ఈ నియమాలను అవకలనం ద్వార కనుగొనవలెను.

గరిష్ట విలువకు నియమాలు	**కనిష్ట విలువకు నియమాలు**
$\frac{dy}{dx} = 0$ అన్నది ఆవశ్యక నియమము	$\frac{dy}{dx} = 0$ అన్నది ఆవశ్యక నియమము
$\frac{dy}{dx} = 0, \frac{d^2y}{dx^2} < 0$ అన్నవి పర్యాప్త నియమము	$\frac{dy}{dx} = 0, \frac{d^2y}{dx^2} < 0$ అన్నవి పర్యాప్త నియమాలు

ఈ క్రింది పద్ధతి ద్వారా గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు కనుగొనవచ్చును.

Step 1. $y=f(x)$ అనే ప్రమేయానికి $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

2. $\frac{dy}{dx}=0$ అయ్యే చోట x విలువలను కనుగొనుము. అని a,b,c అనుకొనుము.

3. $\frac{d^2y}{dx^2}$ కనుగొనుము.

4. $\frac{d^2y}{dx^2}$ కూడ ఒక ప్రమేయము అయితే దానిని $\phi(x)$ అనుకొనుము.

5. $\phi(x)$ లో $x=a$ ని ప్రతిక్షేపించుము.

6. $\frac{d^2y}{dx^2}$ విలువ ఋణాత్మకమయితే $x=a$ వద్ద ఆ ప్రమేయము గరిష్టమవుతుంది.

7. $\frac{d^2y}{dx^2}$ విలువ ధనాత్మకమయితే $x=a$ వద్ద ఆ ప్రమేయము కనిష్టమవుతుంది.

8. అదే విధంగా $x=a,b,c,...$ మొదలగు విలువలకు కూడ ప్రమేయానికి గరిష్ట, కనిష్ట విలువలను కనుగొనవచ్చు.

9. ఆ ప్రమేయానికి గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు కావాలంటే $y=f(x)$, $x=a,b,c...$ లు ప్రతిక్షేపిస్తే ఆయా విలువలు వస్తాయి.

ఉదా : $y=2x^3+3x^2-36x+10$ కి గరిష్ట, కనిష్ట విలువలను కనుగొనుము.

$$y=2x^3+3x^2-36x+10$$

$$\frac{dy}{dx}=6x^2+6x-36$$

ఆవశ్యక నియమాన్ని బట్టి, $\frac{dy}{dx}=0$ **=** $6x^2+6x-36=0 \Rightarrow x^2+x-6=0$

$=(x-2)(x+3)=0$ అంటే $x=2$ లేక $x=-3$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(6x^2+6x-36\right)=12x+6$$

$x=2$ అయితే, $\frac{d^2y}{dx^2}=12.2+6=24+6=30>0;$

$x=-3$ అయితే, $\frac{d^2y}{dx^2}=12(-3)+6=-36+6=-30<0$

అందు చేత, $x=2$ వద్ద యిచ్చిన ప్రమేయానికి కనిష్ట విలువ వుంటుంది.

$x=-3$ వద్ద యిచ్చిన ప్రమేయానికి గరిష్ట విలువ వుంటుంది.

కనిష్ట విలువ కావలంటే $x=2$ ను ప్రమేయంలో ప్రతిక్షేపించాలి.

$x=2$ అయితే $2(2)^3+3(2)^2-36(2)+10=-34$ (కనిష్ట విలువ)

$x=-3$ అయితే $2(-3)^3+3(-3)^2-36(-3)+10=91$ (గరిష్ట విలువ)

అభ్యాసము : క్రింది ప్రమేయాలకు గరిష్ట, కనిష్ట విలువలను కనుగొనండి.

1. $y=x^2-3x+2$ 2. $y=3x-12x^2$ 3. $y=x^3-3x$ 4. $y=2x^2-3x^3$ 5. $y=3x^2-12x+12$

జవాబులు :

1. కనిష్ట $x=\frac{3}{2}$ 2. గరిష్ట $x=\frac{1}{8}$ 3. కనిష్ట $x=1$, గరిష్టం $x=-1$

4. కనిష్ట $x=0$, గరిష్ట $x=\frac{4}{3}$ 5. కనిష్ట $x=2$

4.4.2. ఆర్థికానువర్తాలు: సూక్ష్మ ఆర్థిక శాస్త్రంలో గల వివిధ రకాల ప్రమేయాలకు అంత్య విలువలు తెలుసుకొనుట వలన వివిధ రకములైన ఉపయోగాలు ఉన్నవి. సూక్ష్మ ఆర్థిక శాస్త్రంలో ముఖ్యమైన ప్రమేయాలు.

1. వ్యయ ప్రమేయము (కనిష్ట వ్యయము)
2. రాబడి ప్రమేయము (గరిష్ట రాబడి)
3. లాభాల ప్రమేయము (గరిష్ట లాభము)

కనిష్ట వ్యయము : వ్యయ ప్రమేయము $c=f(x)$ లో $c=$ మొత్తము వ్యయము, x = ఉత్పత్తి సగటు వ్యయము, $AC=\frac{c}{x}$

ఉపాంత వ్యయము, $\mathrm{MC}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(\mathrm{C})=0$

కనిష్ట సగటు వ్యయము కావాలంటే $\frac{d}{dx}(AC)=0$

$$\therefore \frac{d}{dx}(AC)=\frac{x.\frac{d}{dx}(c)-c.1}{x^2}=0 \Rightarrow \therefore x\frac{dc}{dx}=C \Rightarrow \frac{dc}{dx}=\frac{c}{x}$$

ఉపాంత వ్యయము = సగటు వ్యయము

రాబడి ప్రమేయము : డిమాండు ప్రమేయము $p=f(x)$ లో $p=$ ధర = సగటు రాబడి.

$\therefore$ మొత్తం రాబడి $R=F.X$

ఉపాంత రాబడి = $\frac{dR}{dx}$

గరిష్ట రాబడి = $\frac{dR}{dx} = 0, \ \frac{d^2R}{dx^2} < 0$ అవ్వాలి.

లాభాల ప్రమేయము : లాభము = రాబడి - వ్యయము

$F = R - C$

గరిష్ట లాభము 1. $\frac{dP}{dx} = 0$

$$i.e. \frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx}(R - C) = 0 \ = \frac{dR}{dx} - \frac{dc}{dx} = 0 \ \ i.e. \ \frac{dr}{dx} = \frac{dc}{dx}$$

ఉపాంత రాబడి = ఉపాంత వ్యయము

2. $\frac{d^2p}{dx^2} < 0$

$$\text{i.e. } \frac{d^2R}{dx^2} - \frac{d^2C}{dx^2} < 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(R - c) < 0 \qquad i.e. \ \frac{d^2R}{dx^2} < \frac{d^2C}{dx^2} \qquad i.e. \ \frac{d}{dx}(MR) < \frac{d}{dx}(MC)$$

i.e. ఉపాంత రాబడి లోని మార్పు రేటు < ఉపాంత వ్యయములోని మార్పు రేటు

ఉదాహరణ :

1. $P = \sqrt{12 - x}$ అయినప్పుడు ఏ ఉత్పత్తి వద్ద గరిష్ట రాబడి ఏముంటుందో కనిపెట్టండి.

$P = \sqrt{12 - x}$ అయితే మొత్తం రాబడి = $P.x$

$$R = P.x$$

$$= x\sqrt{12 - x}$$

గరిష్ట విలువలకు $\frac{dR}{dx} = 0$ అవ్వాలి.

$$\frac{dR}{dx} = x.\frac{1}{2}(12 - x)^{-\frac{1}{2}} + \sqrt{12 - x} = 0 \ \ i.e. \ x + 24 - 2x = 0 \Rightarrow 24 - x = 0 \Rightarrow x = 24$$

$x = 24$ వద్ద గరిష్ట రాబడి $= x.\sqrt{12 - x}$

$$= 24\sqrt{12 - x} = 24\sqrt{1 - 12}$$

2. ఏకస్వామ్య సంస్థ యొక్క డిమాండు ప్రమేయము F, $P = 15 - 2x$, మొత్తము వ్యయ ప్రమేయము $c = x^2 + 2x$, అయితే, ఆ సంస్థ యొక్క గరిష్ట లాభమెంత.

ఆదాయ ప్రమేయము $R = P \cdot x$

$$= x(15 - 2x)$$

$$= 15x - 2x^2$$

వ్యయ ప్రమేయము $P = R - C$

$$P = 15x - 2x^2 - x^2 - 2x$$

$$= 13x - 3x^2$$

గరిష్ట లాభం, $\dfrac{dP}{dx} = 13 - 6x = 0 \quad \Rightarrow x = \dfrac{13}{6} \Rightarrow \dfrac{d^2P}{dx^2} = -6 < 0$

$x = \dfrac{13}{6}$ వద్ద గరిష్ట లాభము. గరిష్ట లాభం $P = 13\left(\dfrac{13}{6}\right) - 3\left(\dfrac{13}{6}\right)^2 = 3\left(\dfrac{13}{6}\right)^2 = 14\dfrac{1}{12}$

అవకలనం

4.5 అభ్యాసం:

1. $7x^3 + 5x^5 - 3x^6 + 8$ అను ప్రమేయము యొక్క అవకలనము కనుగొనుము.

$y = 7x^3 + 5x^5 - 3x^6 + 8$ అనుకొనుము.

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(7x^3 + 5x^5 - 3x^6 + 8\right)$ అనుకొనుము.

$= 7.3x^2 + 5.5x^4 - 3.6x^5 + 0$

$$=21x^2+25x^4-18x^5$$

2. $y=\left(4x^2+2x\right)\left(8x^3+3x^2\right)$ అవకలనము కనుగొనుము.

$v=\frac{u}{v}$ అయిన $\frac{dy}{dx}=u.\frac{d}{dx}(v)+v\frac{d}{dx}(u)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\left(4x^2+2x\right)\left(8x^3+3x^2\right)\right]$$

$$=4x^2+2x\frac{d}{dx}\left(8x^3+3x^2\right)+\left(8x^3+3x^2\right)\frac{d}{dx}\left(4x^2+2x\right)$$

$$=4x^2+2x\left[8.3x^2+3.2x\right]+\left[8x^3+3x^2\right]\left[4.\ 2\ x+2\right]$$

$$=\left(4x^2+2x\right)\left(24x^2+6x\right)+\left(8x^3+3x^2\right)(8x+2)$$

$$=96x^4+24x^3+48x^3+12x^2+64x^4+16x^3+24x^3+6x^2$$

$$=160x^4+112x^3+18x^2$$

3. $y=\frac{8x^8+6x^2-2x}{3x^2+5x}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v.\frac{d}{dx}(u).-u\frac{d}{dx}(v)}{v^2} \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{8x^8+6x^2-2x}{3x^2+5x}\right)$$

$$=\frac{\left(3x^2+5x\right).\frac{d}{dx}\left(8x^8+6x^2-2x\right)-\left(8x^8+6x^2-2x\right)\frac{d}{dx}\left(3x^2+5x\right)}{\left(3x^2+5x\right)^2}$$

$$=\frac{\left(3x^2+5x\right).\left(64x^7+12x-2\right)-\left(8x^8+6x^2-2x\right)(6x+5)}{\left(3x^2+5x\right)^2}$$

$$\frac{192x^9 + 36x^3 - 6x^2 + 320x^8 + 60x^2 - 10x - \left(48x^9 + 40x^8 + 36x^3 + 60x^2 - 12x^2 - 10x\right)}{\left(3x^2 + 5x\right)^2}$$

$$\frac{192x^9 + 36x^3 - 6x^2 + 320x^8 + 60x^2 - 10x - \left(48x^9 + 40x^8 + 36x^3 + 60x^2 - 12x^2 - 10x\right)}{\left(3x^2 + 5x\right)^2}$$

$$\frac{144x^9 + 280x^8 + 6x^2}{\left(3x^2 + 5x\right)^2}$$

4. $y = \left(3 + 2x^2\right)^3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(3 + 2x^2\right)^3 \quad = 3(3+2x)^2 \frac{d}{dx}\left(3 + 2x^2\right) = 3(3+2x)^2 \, . \, 0 + 4x = 12x(3+2x)^2$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{8x^3 + 5x}} \quad = \frac{1}{\left(8x^3 + 5x\right)^{\frac{1}{2}}} \quad = \left(8x^3 + 5x\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(8x^3 + 5x\right)^{-\frac{1}{2}} \quad = -\frac{1}{2}\left(8x^3 + 5x\right)^{-\frac{1}{2}-1} . \frac{d}{dx}\left(8x^3 + 5x\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(8x^3 + 5x\right)^{-\frac{3}{2}} . \left(8.3x^2 + 5\right) \qquad = -\frac{1}{2}\left(8x^3 + 5x\right)^{-\frac{3}{2}} . \left(24x^2 + 5\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{\left(8x^3 + 5x\right)^{\frac{3}{2}}} . \left(24x^2 + 5\right) \quad = -\frac{24x^2 + 5}{2\left(8x^3 + 5x\right)^{\frac{3}{2}}}$$

5. $x^3 y + y - 2x = 0$ అనే ప్రమేయానికి $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

$x^3 y + y. 2x = 0$

$$8x^3 \frac{dy}{dx} + y.3x^2 + \frac{dy}{dx} - 2(1) = 0$$

$$x^3 \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 2 - 3x^2 y$$

$$\frac{dy}{dx}\left(x^3 + 1\right) = 2 - 3x^2 y$$

$$= \frac{dy}{dx} = \frac{2 - 3x^2 y}{x^3 + 1}$$

6. $\dfrac{2x^3 - x^2 + x^{-2}}{x^2}$ యొక్క అవకలన గుణకము కనుగొనుము.

$$y = \frac{2x^3 - x^2 + x^{-2}}{x^2} \qquad = \frac{2x^3}{x^2} . \frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2} \qquad = 2x - 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$$

$$= 2x - 1 + x^{-1} - 2.x^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2x - 1 + x^{-1} - 2x^{-2}\right)$$

$$= 2(1) - 0 + -1x^{-1}.2. - 2.x^{-2-1}$$

$$= 2 - x^{-2} - 4.x^{-3}$$

$$= 2. - \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}$$

7. $y = \left(x^3 + 3\right)\left(2x^2 + 7\right)^3$ యొక్క $\dfrac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

$$y = \left(x^3 + 3\right)\left(2x^2 + y\right)^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\left(x^3 + 3\right)\left(2x^2 + y\right)^3\right] \qquad \frac{d}{dx}(u, v) = u.\frac{d}{dx}(v) + v\frac{d}{dx}(u)$$

$$=\left(x^3+3\right)\frac{d}{dx}\left(2x^2+y\right)^3+\left(2x^2+y\right)^3\frac{d}{dx}\left(x^3+3\right)$$

$$=\left(x^3+3\right)3\left(2x^2+y\right)^3+\frac{dy}{dx}\left(2x^2+y\right)^3+\left(2x^2+y\right)^3\left(3x^2\right)$$

$$=3\left(x^2+3\right)\left(2x^2+y\right).2.2x+\left(2x^2+y\right).2.2x+\left(2x^2+y\right)^3.3x^2$$

$$=12x\left(x^3+3\right)\left(2x^2+y\right)+\left(2x^2+y\right)^3.3x^2$$

8. $y=\left(2x^2+3\right).\,e^{-3x^2}$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

$$y=\left(2x^2+3\right).\,e^{-3x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\left(2x^2+3\right).\,e^{-3x^2}\right]$$

$$\frac{d}{dx}(u,v)=u.\frac{d}{dx}(v)+v\frac{d}{dx}(u)$$

$$=\left(2x^2+3\right)\frac{d}{dx}\left(e^{-3x^2}\right)+e^{-3x^2}.\frac{d}{dx}\left(2x^2+3\right) \qquad =\left(2x^2+3\right)e^{-3x^2}-3.\,2x+e^{-3x^2}\,4x$$

$$=e^{-3x^2}\left[\left(2x^2+3\right)-6x+4x\right] \qquad =e^{-3x^2}\left[-12x^3-18x+4x\right]$$

$$==e^{-3x^2}\left[-12x^3-14x\right]$$

9. $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x+2)}{(2x-1)(x-3)}}$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

$y=\sqrt{\frac{(x-1)(x+2)}{(2x-1)(x-3)}}$ రెండు వైపుల log తీసుకొనగా $\log y=\log\left(\frac{(x-1)(x+2)}{(2x-1)(x-3)}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$=\frac{1}{2}\left[\log\left[(x-1)(x+2)\right]-\log\left[(2x-1)(x-3)\right]\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\log(x-1)+\log(x+2)-\log(2x-1)+\log(x-3)\right]$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2x-1}2-\frac{1}{x-3}\right]$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}-\frac{2}{2x-1}-\frac{1}{x-3}\right]$$

10. $x=\frac{20}{P+1}$ డిమాండు ప్రమేయము అయిన $P=3$ వద్ద

$x=\frac{20}{P+1}$ $=20(P+1)^{-1}$ $\frac{dy}{dx}=20-1.(P+1)^{-2}$ $=\frac{-20}{(P+1)^2}$

$at\ P=3$

$$\frac{dx}{dP}=\frac{-20}{(4)^2}=\frac{-20}{16}=\frac{-5}{4}$$

$cd=\frac{dx}{dp}.\frac{p}{x}$ $=-\frac{5}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{-3}{4}$ $|ed|=\frac{3}{4}$

11. $c=f(Q)=Q^3-3Q^2+15Q+27$ మొత్తం ఖర్చు ప్రమేయము అయిన ఉపాంతవ్యయము కనుగొనుము.

$TC=C=Q^3-3Q^2+15Q+27$

$$AC=\frac{TC}{Q}=\frac{Q^3-3Q^2+15Q+27}{Q}$$

$$=Q^2-3Q+15+\frac{27}{Q}$$

ఉపాంత ఖర్చు = $\frac{d}{dx}(TC)$

$$=\frac{d}{dx}\left(Q^3-3Q^2+15Q+27\right)$$

$$=3Q^2-3.\,2\,Q+15$$

$$=3Q^2-6Q+15$$

12. $C=\frac{1}{3}Q^3-7Q^2+111Q+50,$ మరియు $Q=100-P$ మొత్తం ఖర్చు మరియు డిమాండు ప్రమేయములు అయిన

లాభమును గరిష్టంగా వచ్చేటటువంటి ఉత్పత్తిని కనుగొని ఆ ఉత్పత్తి వద్ద గరిష్ట లాభము కనుగొనుము.

$Q = 100 - P$

$P = 100 - Q$

$T.R = R = P \times Q \qquad = (100 - Q)\,Q \quad = 100Q - Q^2$

π = లాభము = $TR - TC$

$$\left(100Q - Q^2\right) - \left(\frac{1}{3}Q^3 - 7Q^2 + 111Q + 50\right)$$

$$= -\frac{1}{3}Q^3 + 6Q^2 - 11Q - 50$$

$\frac{d\pi}{dQ} = \frac{1}{\cancel{3}}.\cancel{3}Q^3 + 6.2Q - 11 \qquad = -Q^2 + 12Q - 11 \qquad \frac{d\pi}{dQ} = 0$

$-Q^2 + 12Q - 11 = 0 \qquad Q^2 - 12Q + 11 = 0 \qquad (Q-1)(Q-11) = 0$

$\therefore Q = 1, 11$

$\frac{d^2\pi}{dQ^2} = -2Q + 12$

$Q = 1$ అయిన

$\frac{d^2\pi}{dQ^2} = -2(1) + 12 = 10 > 0$

$\therefore Q = 1$ వద్ద కనిష్ట లాభము వచ్చును.

$Q = 11$ దగ్గర

$\frac{d^2\pi}{dQ^2} = -2(11) + 12 \qquad = -22 + 12 \qquad = -10 < 0$

$Q = 11$ దగ్గర $\frac{d^2\pi}{dQ^2} < 0$ కావున గరిష్ట లాభము వచ్చును. కావున $Q = 11$ ఉత్పత్తి చేసిన గరిష్ట లాభము వచ్చును.

గరిష్ట లాభమయు కొరకు $Q = 11$ లాభ ప్రమేయము నందు ప్రతిక్షేపించుము.

$$\pi = -\frac{1}{3}Q^3 + 6Q^2 - 11Q - 50$$

$$= -\frac{1}{3}(11)^3 + 6(11)^2 - 11 \times 11 - 50$$

$$= -\frac{1}{3}(1331) + 726 - 121 - 50$$

$$= -\ 443.7 + 726 - 121 - 50$$

$$= -614.7 + 726$$

$$= 111.3$$

$Q = 11$ దగ్గర గరిష్ట లాభం **111.3.**

4.6 చదవవలసిన పుస్తకాలు

1. A.C. Chiang -- Fundmantal Methods Mathematical Economics, Mc Graw Hill, Second Edition
2. Allen, R.G.D -- Mathematical Analysi9s for Economics, Mac Millions & Co. Ltd.
3. Yanane. T. -- Mathematics for Economics, Printice Hall Inc.

4.7 మాదిరి పరిక్షా ప్రశ్నలు

1. ఒక ప్రమేయాన్నుంచి మార్పుల రేటు కనుగొనడమిలా ?
2. సంవర్గమాన ప్రమేయమంటే ఏమిటి ? దాని అవకలనాన్ని ఎలా కనుగొంటారు.
3. పారంపర్య అవకలనాన్ని ఎలా కనుగొంటారు.
4. ఒక ప్రమేయానికి గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు కనుగొనేందుకు ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమాలను వ్రాయండి.
5. ఆర్థిక శాస్త్రంలో గరిష్ట, కనిష్ట విలువల యొక్క ప్రాముఖ్యతను తెలుపండి.

పాఠం - 5

పాక్షిక అవకలనం

విషయ క్రమం

5.0 ఉద్దేశాలు:

పాక్షిక అవకలనమును గూర్చి తెలుసుకొనడము, మరియు ఈ ప్రక్రియను సూక్ష్మార్థిక శాస్త్రములోని వినియమము ఉత్పత్తి సిద్ధాంతాల్లో కొన్ని సమస్యలకు అనువర్తింపజేయటం గూర్చివివరించటమే ఈ భాగం యొక్క ముఖ్య ఉద్దేశం. ఈ భాగాన్ని చదివి ఈ క్రింది విషయములు అవగామన చేసుకొనవచ్చును.

1. రెండు చలరాశుల ప్రమేయమును, అంతర్లీన ప్రమేయమును గూర్చి తెలుసుకొనవచ్చును.
2. పాక్షిక అవకలని భావన, నిర్వచనము, పాక్షిక అవకలని కనుగొనే పద్దతులు, వాటి ఆర్థిక అనువర్తాలను గూర్చి తెలుసుకొనవచ్చును.
3. సంపూర్ణ అవకలన భావన, నిర్వచనం, కనుగొనే పద్దతిని గూర్చి తెలుసుకొనవచ్చును.

5.1 రెండు చలరాశుల ప్రమేయం - భావన:

x, y, z చలరాశులలో ఏదైనా ఒకదాని విలువ మిగిలిన రెండింటి విలువలపై ఆధారపడి యుంటుందనుకుందాం. ఉదాహరణకు z విలువ x, y ల విలువలపై ఆధారపడి వుంటుందని తెలిసినపుడు x, y, z చలరాశుల మధ్యగల సంబంధమును తెలియజేసే ప్రమేయమును సంకేతరూపములో ఈ క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చు.

$$z = f\left(x,\ y\right)$$

ఇచ్చుట z ను అస్వతంత్ర చలరాశి అని x, y లను స్వతంత్ర చలరాశని అంటారు. ఒక వ్యక్త ప్రమేయములో రెండు స్వతంత్ర

చలరాసులుంటే దానిని రెండు చలరాశుల ప్రమేయమంటారు. ఉదాహరణకు $z = x^2 + y^2$ అనేది రెండు చలరాశులలో ప్రమేయము.

5.2 పాక్షిక అవకలన గుణక భావన:

రెండు చలరాశుల ప్రమేయము $z = f(x, y)$లో స్వతంత్ర చలరాశులైన x, yలు ఒకదానితో ఒకటి సంబంధం లేకుండా విలువలు తీసుకుంటాయి. అటువంటప్పుడు x, yలలో ఒకదానిని స్థిరముగా నుంచి రెండవ దానిని, దాని పరిధిలో విలువలను తీసుకొనినిచ్చిన యెడల, ఇచ్చిన ప్రమేయము, ఏక చలరాశి ప్రమేయముగా మారుతుంది. చలరాశి y ని స్థిరముగా ఉంచి x ను దాని పరిధిలోకి విలువలను తీసుకొనినిచ్చిన యెడల, z, xలో ఏక చలరాశి ప్రమేయము అవుతుంది. ఏక చలరాశి ప్రమేయాల అవకలన గుణకము కనుగొనుట ఇది వరకు తెలుసుకున్నాము. ఈ సూత్రాలను ఉపయోగించి ఇక్కడ రెండు స్వతంత్ర చలరాశులలో ఒకదానిని స్థిరముగా నుంచుట ద్వారా ఏర్పడిన ఏకచలరాశి ప్రమేయాలకు అవకలన గుణకమును కనుగొనవచ్చును. అట్టి అవకలన గుణకములను $z = f(x, y)$ యొక్క పాక్షిక అవకలన గుణకము అంటారు. ప్రమేయము $z = f(x, y)$లో y ని స్థిరముగా నుంచి కనుగొనిన పాక్షిక అవకలన గుణకమును xతో z యొక్క పాక్షిక అవకలన గుణకము అంటారు. దీనిని సంకేతరూపంలో $\frac{dz}{dx}$ లేక $\frac{df}{dx}$ లేక f_x^1 అని వ్రాస్తారు. అదే విధంగా ప్రమేయము $z = f(x, y)$ లో x ని స్థిరముగా ఉంచి కనుగొనిన పాక్షిక అవకలన గుణకము y తో z యొక్క పాక్షిక అవకలన గుణకము అంటారు. దీనిని సంకేత రూపములో $\frac{\partial z}{\partial y}$ లేదా $\frac{\partial t}{\partial y}$ లేదా f_y^1 అని వ్రాస్తారు.

$$= 3(0) + 4(1) + 0 \quad = 0 + 4 + 0 \quad = \quad 4$$

5.3 :పాక్షిక అవకలన గుణకాలను కనుగొనుట:

ఏక చలరాశి ప్రమేయములు అవకలన గుణకములను ఏల కనుగొంటారో అదే విధంగా పాక్షిక అవకలన గుణకాలను కూడా కనుగొంటారు. పాక్షిక అవకలన గుణకాలను కనుగొనటానికి వేరే పద్దతులు లేవు. కాని రెండు విషయాలలో మాత్రం ఈ రెండింటి మధ్య తేడా కలదు. 1. పాక్షిక అవకలన గుణకములను కనుగొనేటప్పుడు ఏ చలరాశితో నైతే పాక్షిక గుణకమును కనుగొంటారో అది తప్ప మిగతా చలరాశులను స్థిరరాశులుగా భావించాలి. 2. పాక్షిక అవకలన గుణకాలను సంకేతము 'd' బదులు సంకేతము 'd' తో చూపిస్తారు. సాదారణ అవకలన గుణకాలను కనుగొనే అన్ని నియమాలు, పద్దతులు పాక్షిక అవకలన గుణకములను కనుగొనటానికి కూడా వర్తిస్తాయి. వాటిని కొన్ని ఉదాహరణలు ద్వారా అవగాహన చేసుకుందాం.

ఉదా: 1

$$z = 3x + 4y + 3$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}(3x + 4y + 3) \quad = \frac{d}{dx}(3x) + \frac{d}{dx}(4y) + \frac{d}{dx}(3)$$

$$= 3.\frac{d}{dx}(x) + 4.\frac{d}{dx}(y) + \frac{d}{dx}(3) \quad = 3(1) + 4(0) + 0$$

$$= 3 + 0 + 0 \quad = 3$$

(x తో పాక్షిక అవకలనము చేస్తున్నప్పుడు y ని స్థిరముగా భావించాలి. కాబట్టి దాని అవకలన గుణకము సున్నా అవుతుంది.)

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d}{dy}(3x + 4y + 3) = \frac{d}{dy}(3x) + \frac{d}{dy}(4y) + \frac{d}{dy}(3)$$

$$= 3.\frac{d}{dy}(x) + 4.\frac{d}{dy}(y) + \frac{d}{dx}(3)$$

ఉదా : 4 $z = \dfrac{x^2}{x - y + 1}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x-y+1)\frac{\partial}{\partial x}(x^2) - x^2.\frac{\partial}{\partial x}(x-y+1)}{(x-y+1)^2}$$ **(విభక్త నియమమునను సరించి)**

$$= \frac{(x-y+1).\,2x - x^2(1-0+0)}{(x-y+1)^2} \qquad = \frac{2x^2 - 2xy + 2x - x^2}{(x-y+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2xy + 2x}{(x-y+1)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(x-y+1)\frac{\partial}{\partial y}(x^2) - x^2\frac{\partial}{\partial y}(x-y+1)}{(x-y+1)^2} \qquad = \frac{(x-y+1)(0) - x^2(0-1+0)}{(x-y+1)^2}$$

$$\frac{0(-x^2)-1}{(x-y+1)^2} \quad = \quad \therefore \frac{oz}{oy} = \frac{x^2}{(x-y+1)^2}$$

ఉదా : 5 $z = \dfrac{x^2}{y} - \dfrac{y}{x^3}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial x}(x^2) - y\frac{\partial}{\partial x}(x^{-3}) \quad = \frac{1}{y}.\,2x - y - 3.x^{-3-1} = \frac{1}{y}.\,2x + 3y\,x^{-4} \quad = \frac{2x}{y} + \frac{3y}{x^4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2.\frac{\partial}{\partial y}(y^{-1}) - \frac{1}{x^3}.\frac{\partial}{\partial y}(y)$$

$$= x^2 - 1.\,y^{-1-1} - \frac{1}{x^3}(1) \quad -x^2\,y^{-2} - \frac{1}{x^3} \quad = \frac{-x^2}{y^2} - \frac{1}{x^3}$$

ఉదా : 6 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$z = (x^2 + y^2)^{1/2} \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{1/2 - 1}\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \quad = \frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}} . x \quad = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} . \left(x^2+y^2\right)^{1/2-1} . \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2\right) \quad = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-1/2} . 0 + 2y$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}} \cancel{2} y \quad = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

అభ్యాసము: 1 ఈ క్రిందనీయబడిన ప్రమేయములను పాక్షిక అవకలన గుణకములను కనుగొనుము.

1. $z = 6x + 3x^2y - 7y^2$ 2. $z = (3x+2)(2y+4)$ 3. $z = \left(x^2 - 3y\right)\left(x^2+4\right)$ 4. $z = \frac{3x-4y}{2x+y}$ 5. $z = \frac{4x+3}{2y-4}$

ఉదా: 2 $z = 2x^2 + 4xy + 3y^2$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2x^2+4xy+3y^2\right) \quad = \frac{d}{dx}\left(2x^2\right) + \frac{d}{dx}(4xy) + \frac{d}{dx}\left(3y^2\right)$$

$$= 2. \frac{d}{dx}\left(x^2\right) + 4y\frac{d}{dx}(x) + 3\frac{d}{dx}\left(y^2\right) \quad = 2.\,2x + 4y(1) + 3(0)$$

$$= 4x + 4y$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d}{dy}\left(2x^2+4xy+3y^2\right) \quad = \frac{d}{dy}\left(2x^2\right) + \frac{d}{dy}(4xy) + \frac{d}{dy}\left(3y^2\right)$$

$$= 0 + 4x(1) + 3.2\,y \quad = 4x + 6y$$

ఉదా: 3 $z = (x+5)(2x+3y)$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}\left[(x+5)(2x+3y)\right]$$ (లబ్దపు నియమము ననుసరించి)

$$= (x+5)\frac{d}{dx}(2x+3y) + (2x+3y)\frac{d}{dx}(x+y)$$

$$= (x+y)\left[2\frac{d}{dx}(x) + 3\frac{d}{dx}(y)\right] + (2x+3y)\left[\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5)\right]$$

$$= (x+5)\left[2.(1) + 3.(0)\right] + (2x+3y)[1+0] \quad = (x+5)2 + (2x+3y)1$$

$$= 2x + 5 + 2x + 3y$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = 4x + 3y + 5$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d}{dy}(x+5)(2x+3y) \quad = (x + y).\frac{d}{dy}(2x+3y) + 2x + 3y\frac{d}{dy}(x+5)$$

5.4 పాక్షిక అవకలనాలు - ఆర్థికానువర్తాలు (Economic application of partial differentian):

ప్రయోజన ప్రమేయం - పాక్షిక అవకలన గుణకము అనువర్తన: ఒక వినియోగదారుడు రెండు వస్తువులు x, y లను వినియోగిస్తున్నప్పుడు అతని ప్రయోజన ప్రమేయమును $u = f(x, y)$గా వ్రాయవచ్చునని ఇదివరకు తెలుసుకున్నాము. ప్రయోజన ప్రమేయము $u = f(x, y)$ యొక్క పాక్షిక అవకలన గుణకములు $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$లు y వినియోగములో ఏ మార్పు లేకుండా, x వినియోగములో ఒక యూనిట్ మార్పు వచ్చినపుడు ప్రయోజనము uలో వచ్చిన మార్పును సూచిస్తుంది. అదే విధంగా $\frac{\partial u}{\partial y}$ x వినియోగంలో ఏమీ మార్పులేకుండా y వినియోగంలో ఒక యూనిట్ మార్పు వచ్చినప్పుడు ప్రయోజనము uలో వచ్చిన మార్పును తెలియజేస్తుంది. అనగా $\frac{\partial u}{\partial x}$, x యొక్క ఉపాంత ప్రయోజనమును $\frac{\partial u}{\partial y}$, y యొక్క ఉపాంత ప్రయోజనము తెలియజేస్తాయి.

ఉదా: ఒక వినియోగదారుని ప్రయోజన ప్రమేయము

$u = x^2 + y^2$ అనుకుందాము.

x యొక్క ఉపాంత ప్రయోజనము $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) \quad = 2x + 0 \quad = 2x$

y యొక్క ఉపాంత ప్రయోజనము $= \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) \quad = 0 + 2y = 2y$

ఉత్పత్తి ప్రమేయం - పాక్షిక అవకలన గుణకము అనువర్తన

x అనే వస్తువు యొక్క ఉత్పత్తి, రెండు ఉత్పత్తి కారకాలు, శ్రమ (L), మూలధనము (K) పై ఆధారపడి యున్నప్పుడు ఉత్పత్తి ప్రమేయము $X = f(L, K)$ అవుతుంది.

ఈ ఉత్పత్తి ప్రమేయము యొక్క పాక్షిక అవకలన గుణకములు $\frac{\partial u}{\partial L}, \frac{\partial u}{\partial K}$ ఉత్పత్తిలో శ్రమ వలన, పెట్టుబడి వలన ఉత్పత్తిలో వచ్చే మార్పును తెలియజేస్తాయి. కాబట్టి $\frac{\partial u}{\partial L}$ శ్రమ యొక్క ఉపాంత ఉత్పత్తి (Marginal Productivity of Labour) $\frac{\partial x}{\partial K}$ మూలధనము యొక్క ఉపాంత ఉత్పత్తి (Marginal Productivity of Capital) అవుతుంది.

ఉదాహరణలు :

ఉత్పత్తి ప్రమేయము : $x = 3L^2 + 2KL + 4K^2$

శ్రమ యొక్క ఉపాంత ఉత్పత్తి : $\therefore \frac{\partial x}{\partial L} = 3.2L + 2K(1) + 0 = 6L + 2K$

మూలధనము యొక్క ఉపాంత ఉత్పత్తి : $\frac{\partial x}{\partial K} = 3(0) + 2L(1) + 4.2.k = 2L + 8K$

అభ్యాసము : ఈ క్రింద నీయబడిన ప్రమేయములకు ఉపాంత ఉత్పత్తులను కనుగొనుము.

(1) $x = A\,L^{\alpha}\ K^{\beta}$ (2) $x = 30K^2 - 24LK + 15K^2$ 3. $x = \sqrt{2LK - AL^2 - BK^2}$

5.5 హెచ్చు తరగతి పాక్షిక అవకలన గుణకములు:

$Z = f(x, y)$ ప్రమేయము యొక్క రెండు పాక్షిక అవకలన గుణకములు x, y చలరాశులలో $\frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial y}$. ఈ పాక్షిక అవకలన గుణకములను మరలా పాక్షికముగా అవకలనము చేయవచ్చును. అలా అవకలనము చేయగా వచ్చిన పాక్షిక అవకలన గుణకములను రెండవ తరగతి పాక్షిక అవకలన గుణకాలుంటాయి. వాటిని సంకేత రూపంలో ఈ క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును.

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y\ \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 Z}{\partial x.\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)$$

ఈ $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 Z}{\partial y\ \partial x}, \frac{\partial^2 Z}{\partial x\ \partial y}, \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$ లను వరుసగా $f_{xx}, f_{yx}, f_{xy}, f_{yy}$ అని కూడా వ్రాస్తారు. వీటిలో $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$ లను రెండవ తరగతి శుద్ధ పాక్షిక అవకలన గుణకాలని, $\frac{\partial^2 Z}{\partial y\ \partial x}, \frac{\partial^2 Z}{\partial x\ \partial y}$ లను రెండవ తరగతి మిశ్రమ పాక్షిక అవకలన గుణకాలని అంటారు.

రెండవ తరగతి పాక్షిక అవకలన గుణకాలు మరలా x, y చలరాశులలో ప్రమేయాలవుతాయి. వాటిని x, y లలో పాక్షిక అవకలనము చేయగా వచ్చు పాక్షిక అవకలన గుణకాలను మూడవ తరగతి పాక్షిక అవకలన గుణకాలంటారు. మూడవ తరగతి పాక్షిక అవకలన గుణకాలను పాక్షిక అవకలనము చేయగా వచ్చు పాక్షిక అవకలన గుణకాలను నాల్గవ తరగతి పాక్షిక అవకలన గుణకాలంటారు. ఇదే పద్ధతి పొడిగిస్తే, ఐదవ తరగతి, ఆరవ తరగతి . . . పాక్షిక అవకలన గుణకాలను రాబట్టవచ్చును.

ఉదా : ఈ క్రింది ప్రమేయమునకు మొదటి తరగతి, రెండవ తరగతి పాక్షిక అవకలన గుణకములను కనుగొనుము.

$$z = 3x^3 + 11xy^2 - 3y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^3 + 11xy^2 - 3y^2\right) = 3.3x^2 + 11y^2(1) - 0 = 9x^2 + 11y^2$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^3+11xy^2-3y^2\right) \quad =0+11\,x.\,2y-3.2\,y \quad =22\,xy-6y$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(9x^2+11y^2\right) \quad =9(2x)+11(0)=18x$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) \quad =\frac{\partial}{\partial y}(22xy-6y)$$

$$=22\,x(1)-6(1)=22x-6$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y}\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) \quad =\frac{\partial}{\partial x}(22xy-6y) \quad =22y(1)-0 \ = \ 22y$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right) \quad =\frac{\partial}{\partial y}\left(9x^2+11y^2\right) \quad =0+11.2y \quad =22\ y$$

అభ్యాసము: ఈ క్రింది ప్రమేయములకు రెండవ తరగతి శుద్ధ (pure) మరియు మిశ్రమ (mixed) పాక్షిక అవకలన గుణకములను కనుగొనుము.

1. $z=x^3+y^3-3xy$ 2. $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 3. $z=\log\left(\dfrac{x}{x+y}\right)$ 4. $z=\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{y}{x^2}$

5. $z=\log\dfrac{x^2+y^2}{xy}$ అను ప్రమేయమునకు $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^2 y}{\partial y\,\partial x}$ అని చూపుము.

5.6 పూర్ణ అవకలని (Total Differentiation):

$z=f(x,y)$ అను రెండు చలరాశుల ప్రమేయములో y లో ఏమీ మార్పు లేకుండా x మార్పు చెందినా x లో ఏమీ మారుప లేకుండా y మార్పు చెందినా, లేక x, y లు రెండు మార్పు చెందినా, z లో మార్పు వస్తుంది. చలరాశులు x, y రెండు మార్పు చెందినప్పుడు z లో వచ్చే మార్పు, x స్థిరముగా నుండి y మార్పు చెందినప్పుడు z లో వచ్చిన మార్పు మరియు y స్థిరముగా నుండి x మార్పు చెందినప్పుడు, z లో వచ్చే మార్పులు మొత్తమునకు సమానము.

ఇచ్చిన ఒక ప్రమేయము $z=f(x,y)$ యొక్క మొదటి తరగతి పాక్షిక అవకలన గుణకములైన $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ లను కనుగొని వాటిని, సమీకరణము $\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$

ఉదా : 1 $z=3x^2+xy-2y^3$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2+xy-2y^3\right) \quad =3.\,2x+y(1)-0 \quad =6x+y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2+xy-2y^3\right)$$

$$=0+x(1)-2.3y^2 \quad =x-6y^2$$

$\therefore$ సంపూర్ణ అవకలని, $\partial z=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \quad =(6x+y)dx+\left(x-6y^2\right)dy$

ఉదా : 2 $\quad 2=\frac{x}{x+y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x+y}\right) \quad =\frac{(x+y)\frac{\partial}{\partial x}(x)-(x).\frac{\partial}{\partial y}(x+y)}{(x+y)^2} \quad =\frac{x+y-x}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x+y}\right) \quad =\frac{(x+y)\frac{\partial}{\partial y}(x)-x\frac{\partial}{\partial y}(x+y)}{(x+y)^2} \quad =\frac{(x+y).0-x(1)}{(x+y)^2} \quad =\frac{-x}{(x+y)^2}$$

$\therefore$ సంపూర్ణ అవకలని $dz=\frac{dz}{dx}.\,dx+\frac{dz}{dy}.\,dy \quad =\frac{y}{(x+y)^2}dx+\frac{-x}{(x+y)^2}.dy \quad =\frac{1}{(x+y)^2}[y\,dx-x\,dy]$

అభ్యాసము : ఈ క్రింది ప్రమేయములకు సంపూర్ణ అవకలని కనుగొనుము.

1. $z=2x+9xy+y^2$ **2.** $z=\frac{2xy}{x+y}$ **3.** $z=\frac{x^2}{x-y+1}$ **4.** $z=\log\left(x^2+y^2\right)$ **5.** $z=(x+y)(x-y)$

5.6.1 పూర్ణ అవకలన గుణకము (Total differential Coefficient): చలరాశి z, చలరాశులు x, w లలో ఒక ప్రమేయము *i.e.* $z=f(x,y)$ మరియు $x=\phi(w)$ అయినప్పుడు, $\frac{\partial z}{\partial w}$ ను $z=f(x,w)$ ప్రమేయము యొక్క పూర్ణ అవకలన గుణకమంటారు. ఈ పూర్ణ అవకలన గుణకమును కనుగొనుటకు మొదట $z=f(x,w)$ యొక్క పూర్ణ అవకలనిని కనుగొని దానిని dw తో భాగించవలెను.

ప్రమేయము $z=f(x,w)$ యొక్క పూర్ణ అవకలని

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial w}.\,dw$$

దీనిని రెండు వైపులా dwతో భాగించగా

$\frac{dz}{dw} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dw} + \frac{\partial z}{\partial w}.\frac{dw}{dw}$ అవుతుంది.

అప్పుడు పూర్ణ అవకలనిని గుణకము

$\frac{dz}{dw} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dw} + \frac{\partial z}{\partial w}$ అవుతుంది.

ఉదా : $z = 3x - w^2$ ఇచ్చిన ప్రమేయము ఇక్కడ $x = 2w^2 + w + 4$

పూర్ణ అవకలన గుణకము $\frac{dz}{dw} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dw} + \frac{\partial z}{\partial w}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x - w^2\right) \quad = 3(1) - 0 = 3$$

$$\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial w}\left(3x - w^2\right) = -2w$$

$$\frac{dx}{dw} = \frac{d}{dw}\left(2w^2 + w + 4\right) \quad = 2.2w + 1 = 4w + 1$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dw} + \frac{\partial z}{\partial w} \quad = 3(4w + 1) - 2w \quad = 12w + 3 - 2w \quad = 10w + 3$$

ఉదా : ఇచ్చిన ప్రమేయము $z = 2x + xy - y^2,\ x = 3y^2$

ఈ ప్రమేయమునకు పూర్ణ అవకలన గుణకము

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dy} + \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x + xy - y^2\right) = 2(1) + y(1) - 0 = 2 + y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x + xy - y^2\right) = 0 + x(1) - 2y \quad - x - 2y$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\left(3y^2\right) \quad = 3.2y = 6y$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dy} + \frac{\partial z}{\partial y} \quad = (2 + y).6y + (x - 2y) \quad = 12y + 6y^2 + x - 2y \quad = 6y^2 + 10y + x$$

5.7 ద్విచలరాశి ప్రమేయాల గరిష్ట కనిష్ట విలువలు:

ద్విచలరాశి ప్రమేయాల గరిష్ట, కనిష్ట విలువలను కనుగొనుటకు కావలసిన ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమాలను (necessary and sufficient conditions) తెలుసుకొనవచ్చును. మరియు ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమాలను ఉపయోగించి చలరాశులు ఏ విలువలు దగ్గర ప్రమేయము గరిష్ట, కనిష్ట మవుతుందో తెలుసుకొనవచ్చును. మరియు ప్రమేయము యొక్క గరిష్ట కనిష్ట విలువలను కనుగొనడాన్ని గూర్చి తెలుసుకొనవచ్చు.

$z = f(x, y)$ ప్రమేయం గరిష్ట, కనిష్ట విలువలను గూర్చి విపులముగా చెప్పాలంటే x చలరాశి 'a' విలువ నుండి y చలరాశి 'b' విలువ నుండి ఏ విధంగా మారినా (a,b) బిందువు దగ్గర z గరిష్టమైతే ఆ ప్రమేయానికి (a,b) బిందువు దగ్గర గరిష్ట విలువ వుందంటారు. అలాగే x చలరాశి "a" విలువ నుండి y చలరాశి "b" విలువ నుండి ఎలా మారినా (a,b) బిందువు దగ్గర z కనిష్ట విలువ కలిగి యుంటే ఆ ప్రమేయము (a,b) బిందువు దగ్గర కనిష్ట విలువ కలిగియుందంటారు. కాబట్టి $z = f(x,b)$ అనే ప్రమేయము x యొక్క మార్పుతోను, y యొక్క మార్పుతోను గరిష్ట (కనిష్ట) విలువ కలిగియున్నప్పుడే ఆ ప్రమేయం గరిష్ట (కనిష్ట) విలువ కలిగి యుందంటారు.

$z = f(x,y)$ అనే ప్రమేయపు అంత్య విలువలు సూచించే బిందువుల దగ్గర $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ అవుతుంది. కాని $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ అనే నియమం ఈ ప్రమేయం అంత్య విలువలకు అవశ్యక నియమమే కాని పర్యాప్త నియమం కాదు. ఎందుకంటే కొన్ని ప్రమేయాలకు, అంత్య విలువలని చెప్పలేని బిందువుల దగ్గర $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ అవుతుంది. కాని అవి ప్రమేయానికి అంత్య విలువ కాదు.

ఒక ప్రమేయం అంత్య విలువలు ఆ ప్రమేయపు గరిష్ట లేదా కనిష్ట విలువలు సూచిస్తాయి. $z = f(x,y)$ ప్రమేయపు యొక్క గరిష్ట విలువలను సూచించు బిందువు వద్ద $\frac{\delta f}{\delta x^2} < 0,\ \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} < 0$ మరియు $\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\right)\left(\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}\right) > \left(\frac{\delta^2 f}{\delta x.\,\delta y}\right)^2$ అవుతుంది. అలాగే ప్రమేయపు కనిష్ట విలువలను సూచించే బిందువు దగ్గర $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} > 0, \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} > 0$ మరియు $\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\right)\left(\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}\right) > \left(\frac{\delta^2 f}{\delta x.\,\delta y}\right)^2$ అవుతుంది. పైన చెప్పిన దానికి విపర్యముగా, $z = f(x,y)$ ప్రమేయపు ఒక బిందువు దగ్గర $\frac{\delta t}{\delta x} = 0, \frac{\delta t}{\delta y} = 0,\ \frac{\delta^2 t}{\delta x^2} < 0, \frac{\delta^2 t}{\delta y^2} < 0$ మరియు $\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\right)\cdot\left(\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}\right) > \left(\frac{\delta^2 f}{\delta x.\delta y}\right)^2$ అయితే ఆ బిందువు దగ్గర ఆ ప్రమేయము గరిష్ట విలువ కలిగియుంటుంది. అలాగే $z = f(x,y)$ ప్రమేయం యొక్క ఒక బిందువు దగ్గర $\frac{\delta f}{\delta x} = 0, \frac{\delta f}{\delta y} = 0,\ \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} > 0, \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} > 0$ మరియు $\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\right)\cdot\left(\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}\right) < \left(\frac{\delta^2 f}{\delta x.\delta y}\right)^2$ కనిష్ట విలువ కలిగి యుంటుంది. $z = f(x,y)$ ప్రమేయము యొక్క ఒక బిందువు దగ్గర $\frac{\delta t}{\delta x} = 0, \frac{\delta t}{\delta y} = 0$ అయి

$\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\right)\cdot\left(\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}\right) < \left(\frac{\delta^2 f}{\delta x.\delta y}\right)^2$ అయితే ఆ బిందువు *Saddle* బిందువు అవుతుంది. ఆ బిందువు దగ్గర ప్రమేయానికి గరిష్ట లేదా కనిష్ట విలువలు ఉండవు. అలాగే $z = f(x,y)$ ప్రమేయపు ఒక బిందువు దగ్గర $\frac{\delta f}{\delta x} = 0, \frac{\delta f}{\delta y} = 0$ అయి $\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\right)\cdot\left(\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}\right) = \left(\frac{\delta^2 f}{\delta x.\delta y}\right)^2$ అయితే ఆ బిందువు దగ్గర ప్రమేయం గరిష్ట కనిష్ట విలువ కలిగియుంటుందో లేక కనిష్ట విలువ కలిగియుంటుందో చెప్పలేం.

$z = f(x,y)$ ప్రమేయపు గరిష్ట, కనిష్ట విలువలకు ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమాలు :

1. ఆవశ్యక నియమం : $z = f(x,y)$ అను ప్రమేయపు గరిష్ట, కనిష్ట (అంత్య) విలువల దగ్గర $\frac{\delta f}{\delta x} = 0, \frac{\delta f}{\delta y} = 0$ అవుతుంది.

2. పర్యాప్త నియమం : (a) $z = f(x,y)$ అను ప్రమేయం ఒక అంత్య విలువ దగ్గర $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} < 0, \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} < 0, \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} > \left(\frac{\delta^2 f}{\delta x\,\delta y}\right)$ అయితే ఆ అంత్య విలువ ఆ ప్రమేయపు గరిష్ట విలువ అవుతుంది.

(b) $z = f(x,y)$ అను ఒక ప్రమేయపు అంత్య విలువ దగ్గర, $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} > 0, \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} > 0, \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} > \left(\frac{\delta^2 f}{\delta x\,\delta y}\right)$ అయితే, ఆ అంత్య విలువ ఆ ప్రమేయపు కనిష్ట విలువ అవుతుంది.

పైన చెప్పిన ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమాలను వరుసగా $z = f(x,y)$ అను ప్రమేయపు కనిష్ట, గరిష్ట విలువలకు సంబంధించిన మొదటి తరగతి నియమం (First Order Condition) రెండవ తరగతి నియమం (Second Order Condition) అని కూడా అంటారు.

పైన చెప్పబడిన $z = f(x,y)$ అనే ప్రమేయపు గరిష్ట, కనిష్ట విలువలకు సంబంధించిన నియమాలను పట్టిక రూపంలో ఈ క్రింద చూపబడిన విధంగా వ్రాయవచ్చు.

నియమం	**గరిష్ట**	**కనిష్ట**	**సాడిల్ బిందువు**
మొదటి తరగతి నియమం	$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial y} = 0$
రెండవ తరగతి నియమం	$\frac{\delta^2 t}{\delta x^2} < 0, \frac{\delta^2 t}{\delta y^2} < 0$	$\frac{\delta^2 t}{\delta x^2} > 0, \frac{\delta^2 t}{\delta y^2} > 0$	$\frac{\delta^2 t}{\delta x^2}\cdot\frac{\delta^2 t}{\delta y^2}$ వ్యతిరేక గుర్తులు
	$\frac{\delta^2 t}{\delta x^2}\cdot\frac{\delta^2 t}{\delta y^2} > \left(\frac{\delta^2 t}{\delta x\ \delta y}\right)^2$	$\frac{\delta^2 t}{\delta x^2}\cdot\frac{\delta^2 t}{\delta y^2} > \left(\frac{\delta^2 t}{\delta x\ \delta y}\right)^2$	$\frac{\delta^2 t}{\delta x^2}\cdot\frac{\delta^2 t}{\delta y^2} < \left(\frac{\delta^2 t}{\delta x\ \delta y}\right)^2$

5.7.1 ఒక ద్వి చలరాశి ప్రమేయపు గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు కనుగొనే పద్ధతి: ఇచ్చిన ప్రమేయపు గరిష్ట, కనిష్ట విలువలకు సంబంధించిన మొదటి తరగతి నియమాలను వ్రాస్తే, రెండు సమీకరణాలు వస్తాయి. వాటిని సాధించగా ప్రమేయానికి అంత్య విలువలనిచ్చే రెండు చలరాసుల విలువలు వస్తాయి. వీటిలో ఏ విలువలు దగ్గర ప్రమేయానికి గరిష్ట విలువ వుంటుందో, ఏ విలువ దగ్గర ప్రమేయానికి కనిష్ట విలువ వుంటుందో అనే విషయం రెండవ తరగతి నియమం సహాయంతో తెలుసుకొనవచ్చును. ఉదాహరణకు $z = f(x,y)$ అనే

ప్రమేయం మొదటి తరగతి నియమమైన $\frac{\delta t}{\delta x}=0, \frac{\delta t}{\delta y}=0$ ను సాధించగా $x=a,\ y=b$ వచ్చిందనుకుందాం. ఈ $x=a,\ y=b$ విలువల వద్ద $\frac{\delta^2 t}{\delta x^2}<0,\ \frac{\delta^2 t}{\delta y}<0,\ \left(\frac{\delta^2 t}{\delta x^2}\right)\left(\frac{\delta^2 t}{\delta y^2}\right)>\left(\frac{\delta^2 t}{\delta x.\,\delta y}\right)^2$ అయితే వాటి దగ్గర ప్రమేయము గరిష్ట విలువ కలిగి వుంటుంది. అప్పుడు ఇచ్చిన ప్రమేయంలో $x=a,\ y=b$ ను ప్రతిక్షేపించగా, ప్రమేయపు గరిష్ట విలువ వస్తుంది. ఇలా కాకుండా $x=a,\ y=b$ విలువలు దగ్గర $\frac{\delta^2 t}{\delta x^2}>0,\ \frac{\delta^2 t}{\delta y^2}>0,\ \left(\frac{\delta^2 t}{\delta x^2}\right)\cdot\left(\frac{\delta^2 t}{\delta y^2}\right)>\left(\frac{\delta^2 t}{\delta x\ \delta y}\right)^2$ అయితే ఈ x, y విలువలు దగ్గర ప్రమేయానికి కనిష్ట విలువ వుంటుంది. అప్పుడు ఇచ్చిన ప్రమేయంలో $x=a,\ y=b$ ను ప్రతిక్షేపించగా, ప్రమేయపు కనిష్ట విలువ వస్తుంది.

ఉదాహరణ (1) : $z = f(x, y) = x^2+xy+2y^2+36$ అనే ప్రమేయపు అంత్య విలువలు కనుగొనుము.

మొదటి తరగతి నియమం $\frac{\delta z}{\delta x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+xy+2y^2+3\right)=0$

$$2x+y=0 \qquad - \qquad (1)$$

$$\frac{\delta z}{\delta y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+xy+2y^2+3\right)=0$$

$$x+4y=0 \qquad - \qquad (2)$$

$$\begin{array}{lll} & 2x+y=0 \ \rightarrow & (1) \\ & \pm\ 2x\pm 8y=0 \ \rightarrow & (2)\times 2 \\ & ----------- & \\ \text{Sum} & -7y=0 & \\ & \therefore y=0 & \end{array}$$

y విలువను సమీకరణము **(1)**లో ప్రతిక్షేపించగా $2x=0\ \ \therefore x=0$

$\therefore x=0,\ y=0$ దగ్గర ఇచ్చిన ప్రమేయానికి అంత్య విలువ వుంటుంది. ప్రమేయపు ఈ అంత్య విలువ $z=0^2+0.0+2.0^2+3=3$

2. $z = f(x, y) = -x^2+xy-y^2+2x+y$ అనే ప్రమేయపు గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు కనుగొనుము.

$$\frac{\delta z}{\delta x}=\frac{\delta}{\delta x}\left(-x^2+xy-y^2+2x+y\right)=\frac{\delta z}{\delta x}=-2x+y+2=0 \qquad \rightarrow \qquad (1)$$

$$\frac{\delta z}{\delta y}=\frac{\delta}{\delta y}\left(-x^2+xy-y^2+2x+y\right)=\frac{\delta z}{\delta y}=\ x-2y+1=0 \qquad \rightarrow \qquad (2)$$

సమీకరణములు (1), (2)లు సాధించగా

$$-2x+y = -2 \qquad (1)$$
$$x-2y = -1 \qquad (2)$$

$$-4x+2y = -4 \qquad (1)\times 2$$
$$x-2y = -1 \qquad (2)$$
$$-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-$$
$$-3x = -5$$

$\therefore x = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$ x విలువను సమీకరణము (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$-2\times\frac{5}{3}+y=-2 \quad = \quad -\frac{10}{3}+y=-2, \quad y=-2+\frac{10}{3}=\frac{-6+10}{3}=\frac{4}{3} \quad \therefore x=\frac{5}{3}, \quad y=\frac{4}{3}$$

$\therefore$ ప్రమేయపు గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు మొదటి తరగతి నియమాన్ని బట్టి $x=\frac{5}{3}$, $y=\frac{4}{3}$ దగ్గర అంత్య విలువలు ఉంటాయి. ఈ విలువలు దగ్గర ప్రమేయానికి గరిష్ట, కనిష్ట విలువ వుంటుందో తెలుసుకొనడానికి రెండవ తరగతి నియమాన్ని పరీక్షంచవలసియున్నది.

రెండవ తరగతి నియమానికి సంబంధించిన అవకలన గుణకం $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ మరియు $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \delta y}$

$$\therefore \frac{\delta^2 z}{\delta x^2}=\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)=\frac{\delta}{\delta x}(-2x+y+2)=-2(1)+0+0=-2$$

$$\therefore \frac{\delta^2 z}{\delta y^2}=\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)=\frac{\delta}{\delta y}(x-2y+1)=0-2(1)+0=-2$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x.\,\delta y}=\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)=\frac{\delta}{\delta x}(x-2y+1)=1-0+0=1$$

$\therefore x=\frac{5}{3},\ y=\frac{4}{3}$ విలువలు దగ్గర $\left(\frac{\delta^2 t}{\delta x^2}\right)<0,\ \left(\frac{\delta^2 t}{\delta y^2}\right)<0\ ,\ \left(\frac{\delta^2 t}{\delta x^2}\right)\left(\frac{\delta^2 t}{\delta y^2}\right)>\left(\frac{\delta^2 z}{\delta x\ \delta y}\right)^2$

$\therefore$ రెండవ నియమాన్ని బట్టి $x=\frac{5}{3},\ y=\frac{4}{3}$ విలువలు దగ్గ, ఇచ్చిన ప్రమేయం గరిష్ట విలువను కలిగియుంటుంది. ఈ ప్రమేయం ఒక్క గరిష్ట విలువ కలిగియున్నది. దీనికి కనిష్ట విలువలు లేవు.

$\therefore$ ప్రమేయం గరిష్ట విలువ $=\left(-\frac{5}{3}\right)^2+\frac{5}{3}.\frac{4}{3}-\left(\frac{4}{3}\right)^2+2\times\frac{5}{3}+\frac{4}{3}=\frac{7}{3}$

5.8 ఆర్థిక అనువర్తన : ద్విచలరాశి ప్రమేయాల గరిష్ట, కనిష్ట విలువల ప్రక్రియనుపయోగించి సంపూర్ణ పోటీ మార్కెటు (Perfect Condition) లో ఒక సంస్థ రెండు వస్తువులను ఉత్పత్తి చేస్తున్నప్పుడు తమ లాభాన్ని గరిష్టం చేసుకోవడానికి, ఆ వస్తువులను ఏ స్థాయిలో ఉత్పత్తి చేస్తుందో మరియు ఒక ఏకస్వామ్యదారుడు (Monopolint) రెండు వస్తువులను ఉత్పత్తి చేస్తున్నప్పుడు తమ లాభాన్ని గరిష్టం చేసుకొనుటకు ఆ వస్తువులను ఏ ధరల దగ్గర అమ్ముతాడో తెలుసుకొనవచ్చును.

5.8.1: సంపూర్ణ పోటీ మార్కెట్‌లో ఒక సంస్థ రెండు వస్తువులను ఉత్పత్తి చేస్తున్నప్పుడు వాటి స్థాయిని నిర్ణయించటం సంపూర్ణపోటీ మార్కెట్‌లో ఒక సంస్థ రెండు వస్తువులు x_1, x_2ను ఉత్పత్తి చేసి వాటిని వరుసగా p_1, p_2 ధరల దగ్గర అమ్ముతుందనుకుందాం. మరియు ఆ సంస్థ యొక్క ఉమ్మడి వ్యయ ప్రమేయం (Joint Cost function) $T = T(x_1, x_2)$ అనుకుందాం. అప్పుడు ఆ సంస్థ రాబడి ప్రమేయం (revenue function)

$$R(x_1, x_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

లాభము ప్రమేయం $\pi = R_1(x_1, x_2) - T(x_1, x_2)$ అవుతుంది. ఈ లాభం ప్రమేయపు గరిష్ట, కనిష్ట విలువల మొదటి తరగతి నియమం $\frac{\delta \pi}{\delta x_1} = 0, \frac{\delta \pi}{\delta x_2} = 0$.

ఈ రెండు సమీకరణాలను సాధించగా x_1, x_2 స్థాయి తెలుస్తుంది. రెండు వస్తువుల ఈ స్థాయిల దగ్గర లాభం గరిష్టం కావచ్చు. లేక కనిష్టం కావచ్చు. వస్తువుల ఉత్పత్తి ఏ స్థాయి దగ్గర ఉండే లాభం గరిష్టం అవుతుందో తెలుసుకొనడానికి, గరిష్ట, కనిష్ట విలువ రెండవ తరగతి నియమాలను పరీక్షించాలి.

$\frac{\delta^2 \pi}{\delta x_1^2} < 0, \frac{\delta^2 \pi}{\delta x_2^2} < 0, \left(\frac{\delta^2 \pi}{\delta x_1^2}\right)\left(\frac{\delta^2 \pi}{\delta x_2^2}\right) > \left(\frac{\delta^2 \pi}{\delta x_1 x_2}\right)$ అయితే అవి లాభాన్ని గరిష్టం చేసే వస్తువు స్థాయిలు. ఈ x_1, x_2 విలువలను లాభం ప్రమేయం π లో ప్రతిక్షేపించగా సంస్థ యొక్క గరిష్ట లాభం వస్తుంది.

ఉదాహరణ : ఒక సంస్థ రెండు వస్తువులను తయారు చేస్తుంది. దాని ఉమ్మడి వ్యయ ప్రమేయం $T = x_1^2 + x_1 x_2 + 3x_2^2$ మరియు వాటి ధరలు వరుసగా రూ. 7, 20 ఐతే లాభాలను గరిష్టం చేసే వస్తు స్థాయిలను కనుగొని సంస్థ యొక్క గరిష్ట లాభాన్ని కనుగొనుము.

సంస్థ యొక్క ఉమ్మడి వ్యయ ప్రమేయం $T = x_1^2 + x_1 x_2 + 3x_2^2$

x_1, x_2ల ధరలు వరుసగా 7, 20 కాబట్టి సంస్థ యొక్క రాబడి ప్రమేయం $R = 7x_1 + 20x_2$

$\therefore$ లాభం ప్రమేయం $\pi = R - T = (7x_1 + 20x_2) - (x_1^2 + x_1 x_2 + 3x_2^2) = 7x_1 + 20x_2 - x_1^2 - x_1 x_2 - 3x_2^2$

ఈ ప్రమేయం యొక్క గరిష్ట, కనిష్ట విలువల మొదటి తరగతి నియమం

$$\frac{\delta \pi}{\delta x_1} = \frac{\delta}{\delta x_1}\left(7x_1 + 20x_2 - x_1^2 - x_1 x_2 - 3x_2^2\right) = 0$$

$\therefore x_1 = 3, \ x_2 = 3$ దగ్గర లాభం గరిష్టం కావచ్చు లేదా కనిష్టం కావచ్చు. ఈ $x_1 = 2, x_2 = 3$ వస్తువుల దగ్గర లాభం గరిష్టం అవుతుందో లేదో తెలుసుకొనడానికి గరిష్ట, కనిష్ట విలువల రెండవ తరగతి నియమం పరీక్షించాలి.

రెండవ తరగతి నియమం $\frac{\delta^2\pi}{\delta x_1^2}, \frac{\delta^2\pi}{\delta x_2^2}$ మరియు $\left(\frac{\delta^2\pi}{\delta x_1 .\, \delta x_2}\right)^2$

$$\frac{\delta^2\pi}{\delta x_1{}^2} = \frac{\delta}{\delta x_1}\left(\frac{\delta\pi}{\delta x_1}\right) = \frac{\delta}{\delta x_1}(7-2x_1-x_2) = 0-2(1)-0 = -2<0$$

$$\frac{\delta^2\pi}{\delta x_2{}^2} = \frac{\delta}{\delta x_2}\left(\frac{\delta\pi}{\delta x_2}\right) = \frac{\delta}{\delta x_2}(20-x_1-6x_2) = 0-0-6 = -6<0$$

$$\left(\frac{\delta^2\pi}{\delta x_1 .\, \delta x_2}\right)^2 = \frac{\delta}{\delta x_1}\left(\frac{\delta\pi}{\delta x_2}\right) = \frac{\delta}{\delta x_1}(20-x_1-6x_2) = 0-1-0 = -1$$

$$\left(\frac{\delta^2\pi}{\delta x_1^2}\right)\left(\frac{\delta^2\pi}{\delta x_2^2}\right) = -2\times 6 = 12 > \left(\frac{\delta^2\pi}{\delta x_1 .\, \delta x_2}\right)^2 = (-1)^2 = 1$$

$\therefore$ లాభం ప్రమేయం రెండవ తరగతి నియమం ప్రకారం

$$\frac{\delta\pi}{\delta x_1} = 7(1)+0-2x_1-x_2(1)+0 = 7-2x_1-x_2$$

$$\frac{\delta\pi}{\delta x_1} = 0 = 7-2x_1-x_2 = 0 \longrightarrow (1)$$

$$\frac{\delta\pi}{\delta x_2} = \frac{\delta}{\delta x_2}\left(7x_1+20x_2-x_1^2-x_1\,x_2-3x_2^2\right) = 0+20(1)-0-x_1(1)-3.\,2x_2 = 20-x_1-6x_2$$

$$\frac{\delta\pi}{\delta x_2} = 20-x_1-6x_2 = 0 \longrightarrow (2)$$

సమీకరణాలను (1), (2) సాధించగా

$$-2x_1-x_2 = -7 \longrightarrow (1)$$
$$2x_1+x_2 = 7 \longrightarrow (1)$$

$$-x_1-6x_2 = -20$$
$$x_1+6x_2 = 20 \longrightarrow (2)$$

సమీకరణము (2)ని 2 చే గుణించగా

$$2x_1 + x_2 = 7 \longrightarrow (1)$$
$$2x_1 + 12x_2 = 4 \longrightarrow (2) \times 2$$
$$-----------$$
$$-11x_2 = -33$$

$$x_2 = \frac{-33}{-11} = 3$$

x_2 విలువను సమీకరణం **(1)**లో ప్రతిక్షేపించగా

$$2x_1 + 3 = 7 \Rightarrow 2x_1 = 7 - 3 = 4 \Rightarrow 2x_1 = 4$$

$$x_1 = \frac{4}{2} = 2$$

$x_1 = 2,\ x_2 = 3$ దగ్గర గరిష్టం అవుతుంది.

సంస్థ యొక్క గరిష్ట లాభం $= 7 \times 2 + 20 \times 3 - 2^2 - 2 \times 3 - 3(2)^2 = 14 + 60 - 4 - 6 - 12 = 52$

5.8.2 ఏకస్వామ్యదారుడు రెండు వస్తువులను ఉత్పత్తి చేస్తున్నప్పుడు వాటి ధరలను నిర్ణయించడం : రెండు వస్తువులు x_1, x_2ను ఉత్పత్తి చేస్తున్న ఏకస్వామ్యదారుని ఉమ్మడి వ్యయ ప్రమేయం $c = c(x_1, x_2)$అనుకుందాం. మరియు ఆ రెండు వస్తువుల డిమాండు ప్రమేయములు $x_1 = x_1(p_1, p_2)$, $x_2 = x_2(p_1, p_2)$ అనుకుందాం. అప్పుడు ఏకస్వామ్యదారుని లాభ ప్రమేయం $\pi = x_1 p_1 + x_2 p_2 - c(x_1, x_2)$ అవుతుంది. ఈ ప్రమేయాన్ని గరిష్టం చేస్తూ ఏకస్వామ్యదారుడు ధరలను నిర్ణయిస్తాడు.

$\pi = x_1 p_1 + x_2 p_2 - c(x_1, x_2)$ యొక్క గరిష్ట, కనిష్ట విలువల మొదటి తరగతి నియమం

$$\frac{\delta \pi}{\delta x_1} = 0, \frac{\delta \pi}{\delta x_2} = 0$$

$$i.e. \quad x_1 + \left(p_1 - \frac{\delta c}{\delta x_1}\right)\frac{\delta x_1}{\delta p_1} + \left(p_2 - \frac{\delta c}{\delta x_2}\right)\frac{\delta x_2}{\delta p_1} = 0 \longrightarrow (1)$$

$$x_2 + \left(p_1 - \frac{\delta c}{\delta x_1}\right)\frac{\delta x_1}{\delta p_2} + \left(p_2 - \frac{\delta c}{\delta x_2}\right)\frac{\delta x_2}{\delta p_2} = 0 \longrightarrow (2)$$

ఈ రెండు సమీకరణములు సాధించగా p_1, p_2 విలువలు తెలుస్తాయి. ఈ ధరల వద్ద లాభం గరిష్టం అవుతుందో లేదో తెలుసుకొనడానికి గరిష్ట, కనిష్ట విలువల రెండవ తరగతి నియమాలను పరీక్షించుకోవచ్చు. ఈ ధరల స్థాయి వద్ద

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial p_1^2} < 0, \left(\frac{\delta^2 \pi}{\delta p_1^2}\right)\left(\frac{\delta^2 \pi}{\delta p_2^2}\right) > \left(\frac{\delta^2 \pi}{\delta p_1 . \delta p_2}\right)^2$$

అయితే అవి లాభాన్ని గరిష్టం చేసే ధరలు అవుతాయి. అప్పుడు ఏకస్వామ్యదారుడు ఈ ధరలనే తన వస్తువుకు నిర్ణయిస్తాడు.

ఉదా : ఒక ఏకస్వామ్యదారుడు x_1, x_2 అనే రెండు వస్తువులను వరుసగా స్థిరసగటు వ్యయం రూ. ॥ **2,** రూ.॥ **3** దగ్గర ఉత్పత్తి చేస్తున్నాడు. ఈ రెండు వస్తువుల డిమాండు ప్రమేయాలు $x_1 = 5(p_2 - p_1)$, $x_2 = 32 + 5p - 10p_2$ అయితే ఏకస్వామ్యదారుని లాభాన్ని గరిష్టం చేసే ధరలను నిర్ణయించి అతని గరిష్ట లాభాన్ని కనుగొనుము.

ఏకస్వామ్యదారుడు x_1, x_2 అనే రెండు వస్తువులను వరుసగా స్థిరసగటు వ్యయం రూ.॥ **2,** రూ.॥ **3** దగ్గర ఉత్పత్తి చేస్తున్నాడు. కాబట్టి అతని ఉమ్మడి ప్రమేయం

$$c = 2x_1 + 3x_2 \longrightarrow (1)$$

ఈ రెండు వస్తువుల డిమాండ్ ప్రమేయములు

$$x_1 = 5p_2 - 5p_1,\ x_2 = 32 + 5p_1 - 10p_2$$

$$\therefore \frac{\delta x_1}{\delta p_1} = -5,\ \frac{\delta x_1}{\delta p_2} = 5,\ \frac{\delta x_2}{\delta p_1} = 5,\ \frac{\delta x_2}{\delta p_2} = -10$$

ఏకస్వామ్యదారుని లాభం ప్రమేయం

$$\pi = p_1x_1 + p_2x_2 - (2x_1 + 3x_2) \quad = (p_1 - 2)x_1 + (p_2 - 3)x_2 \longrightarrow (2)$$

లాభం ప్రమేయం గరిష్ట, కనిష్ట విలువల మొదటి తరగతి నియమం

$$\frac{\delta\pi}{\delta p_1} = \frac{\delta}{\delta p_1}\left[(p_1-2)x_1 + (p_1-3)x_2\right] = (p_1-2).\frac{\delta x_1}{\delta p_1} + x_1 + (p_2-3)\frac{\delta x_2}{\delta p_\cdot} + x_2\ (0)$$

$$= (p_1-2)\frac{\delta x_1}{\delta p_1} + x_1 + (p_2-3)\frac{\delta x_2}{\delta p_1} \quad = (p_1-2)(-5) + (5p_2 - 5p_1) + (p_2-3).5$$

$$= -5p_1 + 10 + 5p_2 - 5p_1 + 5p_2 - 15 \quad = -10\ p_1 + 10p_2 - 5$$

$$\frac{\delta\pi}{\delta p_1} = 0$$

$$-10\,p_1 + 10p_2 - 5 = 0 \longrightarrow \qquad (3)$$

$$\frac{\delta\pi}{\delta p_2} = \frac{\delta}{\delta p_2}\left[(p_1-2)x_1 + (p_2-3)x_2\right]$$

$$= (p_1-2).\frac{\delta x_1}{\delta p_2} + x_1.0 + (p_2-3)x_2.1$$

$$= (p_1-2)\,5 + (p_2-3)(-10) + 32 + 5p_1 - 10p_2$$

$$= 5p_1 - 10 - 10p_2 + 30 + 32 + 5p_1 - 10p_2 \quad = 10p_1 - 20p_2 + 52$$

$$\frac{\delta\pi}{\delta p_2} = 0$$

$$-10p_1 - 20p_2 + 52 = 0 \longrightarrow (4)$$

$$\begin{array}{rl} 10p_1 + 10p_2 & = 5 \\ +10p_1 - 20p_2 & = -52 \\ \hline -10p_2 & = -47 \end{array}$$

$$p_2 = \frac{-47}{-10} = 4.7$$

విలువను (3) సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా

$$-10p_1 + 10p_2(4.7) = 5 = -10p_1 = 5 - 47 \quad -10p_1 = -42$$

$$p_1 = \frac{-42}{-10} = 4.2$$

$p_1 = 4.2,\ p_2 = 4.7$ ధరల దగ్గర లాభం గరిష్టం అవుతుందో లేదో తెలుసుకోవడానికి, గరిష్ట, కనిష్ట విలువల తరగతి నియమాన్ని పరీక్షించాలి. రెండవ తరగతి నియమానికి సంబంధించిన అవకలన గుణకము

$$\frac{\delta^2\pi}{\delta p_1^2}, \frac{\delta^2\pi}{\delta p_2^2}, \frac{\delta^2\pi}{\delta p_1 \delta p_2} \quad \therefore \frac{\delta^2\pi}{\delta p_1^2} = \frac{\delta}{\delta p_1}\left(\frac{\delta\pi}{\delta p_1}\right) = \frac{\delta}{\delta p_1}(-10p_1 + 10p_2 - 5)$$

$$= -10(1) + 0 + 0 = -10$$

$$\frac{\delta^2\pi}{\delta p_2^2} = \frac{\delta}{\delta p_2}\left(\frac{\delta\pi}{\delta p_2}\right) = \frac{\delta}{\delta p_2}(10p_1 - 20p_2 + 52)$$

$$= 0 - 20(1) + 0 = -20$$

$$\frac{\delta^2\pi}{\delta p_1 \delta p_2} = \frac{\delta}{\delta p_1}(10p_1 - 20p_2 + 52) = 10$$

$\therefore p_1 = 4.2,\ p_2 = 4.7$ వద్ద $\frac{\delta^2\pi}{\delta p_1^2} < 0, \frac{\delta^2\pi}{\delta p_2^2} < 0$

$$\left(\frac{\delta^2\pi}{\delta p_1^2}\right)\left(\frac{\delta^2\pi}{\delta p_2^2}\right) = (-10)(-20) = 200 > \left(\frac{\delta^2\pi}{\delta p_1 \delta p_2}\right)^2 = 10^2 = 100$$

$\therefore$ ఒక ప్రమేయపు గరిష్ట, కనిష్ట విలువల రెండవ తరగతి నియమం ప్రకారం $p_1=4.2,\ p_2=4.7$ దగ్గర లాభం గరిష్టం అవుతుంది.

ఏకస్వామ్యదారుని లాభం గరిష్టం చేసే x_1 ధర రూ.॥ **4.2,** x_2 ధర రూ.॥ **4.7**

ఈ ధరల వద్ద డిమాండ్ $x_1=5(4.7)-5(4.2)\ =23.5-21.0\ =2.5$

$x_2\ =\ 32+5(4.2)-10(4.7)\ =32+21-47=6$

$\therefore$ఏక స్వామ్యదారుని గరిష్ట లాభం

$\pi=(42.2)(2.5)+(4.7-3)6\ \ =(2.2)12.51+(1.7)6=15.7$

5.9 అభ్యాసము:

ఈ క్రింది ప్రమేయాలకు పాక్షిక అవకలన గుణకమును కనుగొనుము:

1. $z=\dfrac{5x^2}{5x-y+4}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{d}{dx}\left(\frac{5x^2}{5x-y+4}\right)\ =\frac{5x-y+4\dfrac{d}{dx}\left(5x^2\right)-5x^2\dfrac{d}{dx}(5x-y+4)}{(5x-y+4)^2}$$

$$=\frac{(5x-y+4)5.2x-5x^2.5(1)}{(5x-y+4)^2}\ \ =\frac{(5x-y+4).10x-25x^2}{(5x-y+4)^2}$$

$$=\frac{50x^2-10xy+40x-25x^2}{(5x-y+4)^2}\ \ =\frac{25x^2-10xy+40x}{(5x-y+4)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{5x^2}{5x-y+4}\right)\ =\frac{5x-y+4\dfrac{d}{dy}\left(5x^2\right)-5x^2\dfrac{d}{dy}(5x-y+4)}{(5x-y+4)^2}\ \ =\frac{5x+y+4.0-5x^2.0-1+0}{(5x-y+4)^2}$$

$$\frac{0+5x^2}{(5x-y+4)^2}\ \ =\frac{5x^2}{(5x-y+4)^2}$$

2. $x_1=p_1^{-1.7}\ p0.8$ మరియు $x_2=P_1^{0.5}P_2^{-0.2}$ లు రెండు వస్తువుల డిమాండు ప్రమేయాలు. పాక్షిక అవకలనము ద్వారా వస్తువుల పూరకాలో, పోటీతత్వ కనుగొనుము.

ఏ రకమైన వస్తువులు కనుగొనుటకు పాక్షిక అంతర వ్యాకోచత్వము కనుగొనవలెను. అనగా

$$\frac{-\delta x_1}{\delta p_2}, \frac{\delta x_2}{\delta p_1} \quad , \quad x_1 = p_1^{-1.7}.p_2^{0.8} \quad , \quad \frac{\partial x_1}{\partial P_2} = P_1^{-1.7} 0.8\ P_2^{0.8-1}$$

$$= p_1^{-1.7}.0.8.\,p_2^{-0.2} \quad = 0.8\frac{1}{p_1^{0.7}}.\frac{1}{p_2^{0.2}} > 0 \quad , \quad x_2 = p_1^{0.5} \quad p_2^{-0.2}$$

$$\frac{\delta x_2}{\delta p_1} = 0.5\,p_1^{0.5-1}.\,p_2^{-0.2} \quad = 0.5\,p_1^{-0.5} \quad p_2^{-0.2} \quad = 0.5\frac{1}{p_1^{0.5}}.\frac{1}{p_2^{0.2}} > 0$$

$\frac{\delta x_1}{\delta p_2}, \frac{\delta x_2}{\delta p_1}$ లు ధనాత్మకము కాబట్టి x_1, x_2 లు పోటీతత్వ వస్తువులు

3. $z = 3x^2 + xy - 2y^3$ **అనే ప్రమేయము యొక్క సంపూర్ణ అవకలని కనుగొనుము.**

సంపూర్ణ అవకలని $dz = \frac{\delta z}{\delta x}.\delta x + \frac{\delta z}{\delta y}.\delta y$, $\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{\delta}{\delta x}\left(3x^2 + xy - 2y^3\right) = 3.2x + y \quad = (6x + y)$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = \frac{\delta}{\delta y}\left(3x^2 + xy - 2y^3\right) \quad = 0 + x(1) - 2.3y \quad = x - 6y$$

$$\therefore dz = (6x + y)dx + (x - 6y)dy$$

4. **ఈ క్రింది ప్రమేయము యొక్క గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు కనుగొనుము.**

$$z = y^3 + y^2 - xy + x^2 + 4$$

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{\delta}{\delta x}\left(y^3 + y^2 - xy + x^2\ 4\right) \quad = -y + 2x$$

$$\frac{\delta z}{\delta x} = 0$$

$$2x - y = 0 \longrightarrow (1)$$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = \frac{\delta}{\delta y}\left(y^3 + y^2 - xy + x^2 + 4\right) \quad = 3y^2 + 2y - x$$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = 0 \quad = 3y^2 + 2y - x = 0 \longrightarrow (2)$$

సమీకరణము (1) మరియు (2) సాధించగా $x = \frac{1}{4}, y = -\frac{1}{2}$ వచ్చును.

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right) \quad = \frac{\delta}{\delta x}(2x - y) \quad = 2 > 0$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right) \quad = \frac{\delta}{\delta y}\left(3y^2+2y-x\right) \quad = 6y+2$$

$y = -\frac{1}{2}$ దగ్గర

$$\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = 6\times\frac{-1}{2}+2 \quad = -3+2 \quad = -1 < 0$$

$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}, \frac{\delta^2 z}{\delta y^2}$ వ్యతిరేక గుర్తులు కలిగి ఉన్నవి కావున ప్రమేయము గరిష్ట, కనిష్ట విలువ కలిగి ఉండదు. కాని Saddle Point కలిగి ఉంటుంది.

5. $Q = LK + 0.2L^2 - 0.8K^2$ అయిన శ్రమ, మూలధనము మరియు ఉపాంత ఉత్పత్తి కనుగొనుము.

శ్రమ యొక్క ఉపాంత ఉత్పత్తి = $\frac{\delta Q}{\delta L} = \frac{\delta}{\delta L}\left(LK + 0.2L^2 + 0.8K^2\right)$

$= K + 0.2.2L + 0 = K + 0.4L$

మూల ధనము యొక్క ఉపాంత ఉత్పత్తి $= \frac{\delta}{\delta K}\left(LK + 0.2L^2 + 0.8K^2\right)$

$= L + 0 + 0.8.2K^2 = L + 0.16K^2$

5.10 అవగాహన ప్రశ్నలు:

1. పాక్షిక అవకలన భావనను వివరించుము.
2. ఈ క్రింది ప్రమేయములకు పాక్షిక అవకలనము కనుగొనండి.

   $(a)\ z = 7x^3 + xy + 2y^5$ $\quad (b)\ z = \frac{5x}{6x-7y}$ $\quad (c)\ z = \left(2x^2+6y\right)\left(5x-3y^2\right)$

3. ఈ క్రింది ప్రమేయాలకు రెండవ తరగతి, శుద్ధ మరియు పాక్షిక అవకలనాలను కనుగొనండి.

   $(a)\ z = x^2 + 2xy + y^2$ $\quad (b)\ z = x^4 + x^3y^2 - 3xy^2 - 2y^3$ $\quad (c)\ z = \left(x^2+2y\right)^4$

4. ఈ క్రింది ఉత్పత్తి ప్రమేయములకు ఉపాంత ఉత్పత్తులను కనుగొనండి

   $(a)\ Q = 0.5K^2 - 2KL + L^2$ $\quad (b)\ Q = x^2 - 2xy + 3y^2$ $\quad (c)\ Q = 3x^2 + 5xy + 4y^2$

5. ద్విచలరాశి ప్రమేయపు గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు కనుగొనే పద్ధతిని వివరింపుము.
6. $z = 6x^2 - 9x - 3xy - 7y + 5y^2$ అనే ప్రమేయమునకు, గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు కనుగొనుము.

5.11 సంప్రదించు గ్రంథాలు:

1. Alpha C. Chaiang	Fundamental methods of Mathematical Economics, Third Edition, Mc. Graw - Hill, International Editions
2. R.G.B. Allen	Mathematical Analysis for Economics, MAC Million
3. Edward T. Bowling	Theory and Progress of Mathematics for Economists, Scyanm's artline series, Mc-Graw Hill stock company

పాఠం - 6

సమాకలనం

విషయ క్రమం

6.0 ఉద్దేశాలు:

ఒక ప్రమేయము ఇస్తే దాని అవకలన గుణకాన్ని కనుగొనడాన్ని గూర్చి మీకిది వరకు నేర్చుకొన్నారు. దీనికి విపర్యయంగా ఒక ప్రమేయము యొక్క అవకలన గుణకాన్నిస్తే, ఆ ప్రమేయాన్ని కనుగొనవచ్చు. ఇలా ప్రమేయం యొక్క అవకలన గుణకాన్నిచ్చినపుడు ప్రమేయాన్ని కనుగొనే పద్ధతినే సమాకలనం అంటారు. ఈ భాగాన్ని చదివిన ఈ క్రింద విషయాలను అవగామన చేసుకొనవచ్చు.

1. సమాకలన భావన, అనిశ్చిత సమాకలని, నిశ్చిత సమాకలని లంటే ఏమిటో తెలుసుకొనవచ్చు.
2. అనిశ్చిత సమాకలని నిర్వచనము, అనిశ్చిత సమాకలనిల నియమాలు. వాటిని కనుగొనే వివిధ పద్ధతులను తెలుసుకొనవచ్చు. మరియు ఈ పద్ధతులనుపయోగించి, ఇచ్చిన ప్రమేయములను సమాకలనిలు కనుగొనే విధాన్ని తెలుసుకొనవచ్చు.
3. అనిశ్చిత సమాకలనిల ప్రక్రియను ఆర్థికశాస్త్రములోని కొన్ని సమస్యలకు అనువర్తింపజేయడాన్ని తెలుసుకొనవచ్చు.
4. నిశ్చిత సమాకలనిల ప్రక్రియనుపయోగించి వినియోగదారుని మిగులును, ఉత్పత్తిదారుని మిగులును కనుగొనడాన్ని గూర్చి తెలుసుకొనవచ్చు.

6.1 పరిచయం:

ఒక ప్రమేయంలో స్వతంత్ర చలరాశి అతి తక్కువ (negligibly small)గా మార్పు చెందినపుడు అస్వతంత్ర చలరాశిలో వచ్చే మార్పు ఆ ప్రమేయము యొక్క అవకలన గుణకము తెలియజేస్తుందని మీరిది వరకే తెలుసుకొన్నారు. కాబట్టి ఇచ్చిన ప్రమేయములోని స్వతంత్ర చలరాశి అతి తక్కువ మార్పు చెందినపుడు, అస్వతంత్ర చలరాశి ఎంత మార్పు చెందుతుందో, ఆ ప్రమేయాన్ని అవకలనము చేయడము ద్వారా తెలుసుకొనవచ్చు. ఉదాహరణకు ఒక వస్తువు యొక్క ధర ఒక యూనిట్ మార్పు చెందితే, దాని డిమాండ్‌లో ఎంత మార్పు వస్తుంది అనే విషయము ఆ ప్రమేయాన్ని అవకలనము చేయటం ద్వారా తెలుసుకొనవచ్చు. అలాగే ఒక వినియోగదారుని ప్రయోజన ప్రమేయాన్ని ఇచ్చినపుడు అతని ఉపాంత ప్రయోజన ప్రమేయాన్ని తెలుసుకొనవచ్చు. అదే విధంగా ఒక వస్తువు మొత్తం వ్యయ ప్రమేయాన్ని ఇచ్చినప్పుడు దాని ఉపాంత వ్యయ ప్రమేయము తెలిసినపుడు మొత్తము వ్యయ ప్రమేయాన్ని, ఉపాంత ప్రయోజన ప్రమేయము తెలిసినపుడు ప్రయోజన ప్రమేయాన్ని, ఉపాంత ఉత్పత్తి ప్రమేయము తెలిసినపుడు ఉత్పత్తి ప్రమేయాన్ని తెలుసుకొనవలసి

ఉంటుంది. దీనినే సాధారణముగా చెప్పాలంటే ఒక ప్రమేయము యొక్క అవకలన గుణకము ఇచ్చినపుడు ఆ ప్రమేయాన్ని కనుగొనుట. ఇలా ప్రమేయము యొక్క అవకలన గుణకము ఇచ్చినపుడు ప్రమేయాన్ని కనుగొనే పద్ధతినే సమాకలనము అంటారు.

6.2 సమాకలని భావన:

సమాకలన భావనను రెండు వేరు వేరు పద్ధతులలో వివరించవచ్చు. ఇలా రెండు పద్ధతులలో వివరించబడిన సమాకలనిలు వేరు వేరు గుణములు, వేరు వేరు అనువర్తనలు కలిగియుంటాయి. ఒక పద్ధతిలో సమాకలనము, అవకలన తిరోగమ్య(reserve) పద్ధతిగా భావించబడుతుంది. ఇలా సమాకలనాన్ని అవకలనపు తిరోగమన పద్ధతిగా పరిగణించి, నిర్వచింపబడిన సమాకలనిని అనిశ్చిత సమాకలని (indefinite integral) అంటారు. దీనికి ఒక నిర్దిష్టమైన సంఖ్యా విలువ వుండదు. అనిశ్చిత సమాకలని, ఒక ప్రమేయం అవకలన గుణకము నిచ్చినపుడు ఆ ప్రమేయాన్నిస్తుంది. రెండవ పద్ధతిలో సమాకలని, ఒక సంకలిత సమాసము (Summation expression) యొక్క అవధి (limit)గా పరిగణింపబడుతుంది. ఇలా ఒక సంకలిత సమాసం యొక్క అవధిగా పరిగణించి నిర్వచింపబడిన సమాకలనిని నిశ్చిత సమాకలని (definite integral) అంటారు.

6.3 అనిశ్చిత సమాకలని:

అనిశ్చిత సమాకలని నిర్వచనం: $F(x)$అనే ప్రమేయపు అవకలన గుణకము $f(x)$ అయితే [*i.e.* $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ లేక $dF(x) = f(x)dx$], $F(x)$ను x దృష్ట్యా $f(x)$సమాకలని అంటారు. దీనిని సంకేత రూపంలో $F(x) = \int f(x)dx$ అని వ్రాస్తారు. ఈ సంకేతం $\int f(x), dx$ అనే మూడు భాగాలు కలిగి ఉంది. వీటిలోని, $\int$ భాగం సమాకలనం గుర్తును సూచిస్తుంది. $f(x)$భాగాన్ని సమాకల్యము (integral) అంటారు. ఇది సమాకలనము చేయవలసిన ప్రమేయము. dx భాగము, సమాకలనము x దృష్ట్యా చేయాలని సూచిస్తుంది.

$\int f(x)dx = F(x)+C$ అవుతుంది. ఈ 'C'ని సమాకలన స్థిరరాసి అంటారు. పైన చూపిన విధంగా, సమాకలనము చేసేటప్పుడు స్థిరరాసిని అన్ని ప్రమేయాలకు కలపవలెను. ఎందుకంటే, అవకలనము చేసినపుడు ఇచ్చిన ప్రమేయానికి స్థిరరాసిని కలుపవలెను.

కొన్ని ప్రామాణిక ప్రమేయాల సమాకలనిలు: ఘాత ప్రమేయము x^n, ఘాతిక ప్రమేయము e^x, సంవర్గమాన ప్రమేయము $\log x$ ల అవకలన గుణకాలను మీరిదివరకే తెలుసుకున్నారు. ఈ ప్రమేయాల యొక్క అవకలన గుణకములు

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = n\,x^{n-1}, \qquad \frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x, \qquad \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$$

ఘాత ప్రమేయము $\frac{x^{n+1}}{n+1}$యొక్క అవకలన గుణకము $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{(n+1)x^{n+1-1}}{n+1} = x^n$ వీటిని బట్టి, ఘాత ప్రమేయము x^nఘాతిక ప్రమేయము e^x, ప్రమేయము $\frac{1}{x}$ ల యొక్క సమాకలనిలు,

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ 2. $\int e^x\,dx = e^x + c$ 3. $\int \frac{1}{x}dx = \log x + c$ అవుతాయి.

సమాకలనిల నియమాలు: $f(x)$ ఒక అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయము అయి K ఒక స్థిర రాశి అయినప్పుడు $\int K\ f(x)dx = K\int f(x)dx$ అవుతుంది.

$f(x), g(x)$ లు రెండు ప్రమేయాలైతే,

$\int[f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ అవుతుంది.

ఉదాహరణలు:

1. $\int x^6\, dx = \dfrac{x^{6+1}}{6+1} = \dfrac{x^7}{7} + C$

2. $\int 3.x^7\, dx = 3\int x^7\, dx = 3\dfrac{x^{7+1}}{7+1} + c = \dfrac{3}{8}x^8 + c$

3. $\int 10.\sqrt{x}\, dx = 10\int x^{1/2}\, dx \quad = 10.\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}+1} + c \quad = 10.\dfrac{2}{3}.x^{\frac{3}{2}} + c \quad = \dfrac{20}{3}.x^{\frac{3}{2}} + c$

4. $\int \sqrt{x^5}\, dx = \int (x^5)^{1/2}\, dx = \int x^{5/2}\, dx = \dfrac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} = \dfrac{2}{7}\, x^{7/2} + c$

5. $\int \dfrac{1}{x^4} dx = \int x^{-4}\, dx = \dfrac{x^{-4+1}}{-4+1} + c = \dfrac{x^{-3}}{-3} + c = \dfrac{-1}{3x^3} + c$

6. $\int (x^3 + x + 1) dx = \int x^3\, dx + \int x\, dx + \int x\, dx$

$$= \left(\frac{x^{3+1}}{3+1} + c_1\right) + \frac{x^{1+1}}{1+1} + c_2 + x + c_3$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x + c_1 + c_2 + c_3$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x + c$$

7. $\int (x^4 + 3x^3 + 2x + 1) dx = \int x^4\, dx + \int 3x^3\, dx + \int 2x\, dx + \int dx$

$$= \frac{x^{4+1}}{4+1} + c_1 + 3\frac{x^{3+1}}{3+1} + c_2 + 2\frac{x^{1+1}}{1+1} + c_3 + x + c_4$$

$$= \frac{x^5}{5} + c_1 + 3\frac{x^4}{4} + c_2 + 2\frac{x^2}{2} + c_3 + x + c_4$$

$$=\frac{x^5}{5}+\frac{3x^4}{4}+x^2+x+c_1+c_2+c_3+c_4$$

$$=\frac{x^5}{5}+\frac{3x^4}{4}+x^2+x+c$$

ఇక్కడ $c=(c_1+c_2+c_3+c_4)$

$$\int\left(5e^x-x^{-2}+\frac{3}{x}\right)dx=dx \quad =\int 5e^x\,dx-\int x^{-2}\,dx+\int 3\frac{1}{x}dx$$

$$=\int 5e^x+c_1-\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+c_2+\ \ 3\log x+c_3=5e^x-\frac{x^{-1}}{-1}+3\log x+c_1+c_2+c_3$$

$$=5e^x+\frac{1}{x}+3\log x+c$$

అభ్యాసము :

1. $\int x^{20}\,dx$ 2. $\int 10.x^5\,dx$ 3. $\int \sqrt[5]{x^6}\,dx$

4. $\int\left(x^3-3x^2-2x+1\right)dx$ 5. $\int\left(5x^2+4e^{2x}+\frac{3}{x}+2\right)dx$ 6. $\int\left(x^3-\sqrt{x}\right)dx$

6.4 సమాకలనిలను కనుగొనే కొన్ని పద్ధతులు:

ఇచ్చిన ప్రమేయము, ఒక ప్రమేయాన్ని ఒక స్థిరరాసిచే గుణిచంగా వచ్చినది గానీ లేక రెండు ప్రమేయాలను కలుపగా వచ్చినది గాన అయితే, దాని సమాకలనిని పైన చెప్పిన సమాకలనిల నియమాలనుంపుయోగించి కనుగొనవచ్చు. ఇలా కాకుండా, ఇచ్చిన ప్రమేయము, రెండు ప్రమేయాల లబ్ధము లేక వాటి విభక్తము మొదలగు సంకీర్ణసమాసమైతే, పైన చెప్పబడిన నియమాల సహాయంతో దాని సమాకలనిని కనుగొనుట కష్టము. అటువంటి ప్రమేయాలను సమాకలనము చేయుటకు ప్రత్యామ్నాయ పద్ధతి, విభా సమాకలన పద్ధతి వంటి కొన్ని ప్రత్యేక పద్ధతులు కలవు. వాటినుపయోగించి, ఇచ్చిన ప్రమేయాలను సమాకలనము చేయుటను తెలుసుకుందాం.

ప్రత్యామ్నాయ పద్ధతి (Subsitution method):

I. ఇచ్చిన ప్రమేయము రెండు ప్రమేయాల లబ్ధమయి, వాటిలో ఒకటి రెండవదాని అవకలన గుణకమయినపుడు ప్రత్యామ్నాయ పద్ధతినుపయోగించి సమాకలనిని కనుగొనవచ్చు. ఈ పద్ధతి క్రింద చూపబడిన విధముగా ఉంటుంది.

ఇచ్చిన ప్రమేయము $f^1(x), f(x)$ అనుకుందాం. దీనిలో $f(x)$ యొక్క అవకలన గుణకము $f^1(x)$. ప్రమేయము $f^1(x), f(x)$ యొక్క సమాకలని,

$$\int f^1(x)\ f(x)dx.$$

ఇపుడు $f(x)=t$ అనుకుందాం. (ఇచ్చిన లబ్ధంలో ఏ ప్రమేయం అవకలన గుణకము రెండవ ప్రమేయమవుతుందో దానిని t

అనుకోవలెను). దీనిని అవకలనం చేయగా, $f^1(x)\,dx = dt,$ మరియు $dx = dt/f^1(x)$ అవుతుంది. వీటిని

$\int f^1(x)\, f(x)dx$ లో ప్రతిక్షేపించగా

$\int f^1(x)\, f(x)dx = \int f^1(x) t.\dfrac{dt}{f^1(x)} = \int t\,dt$ అవుతుంది. కాని $\int t\ dt = \dfrac{t^1+1}{1+1} + c = \dfrac{t^2}{2} + c$

$\therefore$ t ని తిరిగి రూపంలోకి మార్చగా, $\int f^1(x)\ f(x)\ dx = \dfrac{\left[f(x)\right]^2}{2} + c$ వస్తుంది.

ఉదాహరణ 1: $\int 2x\left(x^2+1\right)dx$ కనుగొనుము.

ఇచ్చిన ప్రమేయంలో $\left(x^2+1\right)$ యొక్క అవకలన గుణకము $2x$ కాబట్టి, $x^2+1 = t$ అనుకుందా. అపుడు $2x\,dx = dt$ మరియు $dx = \dfrac{dt}{2x}$ అవుతుంది. వీటిని $\int 2x\left(x^2+1\right)dx$ లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\int 2x\left(x^2+1\right)dx = \int 2x.t.\frac{dt}{2x} = \int t \text{ అవుతుంది.}$$

కాని $\int t\,dt = \dfrac{t^{1+1}}{1+1} + c = \dfrac{t^2}{2} + c$

$\therefore t$ ని తిరిగి, x రూపములోకి వ్రాయగా $\int 2x\left(x^2+1\right)dx = \dfrac{\left(x^2+1\right)^2}{2} + c$ వస్తుంది.

ఉదాహరణ 2: $\int 4x^3\left(x^4+2\right)^{80}\ dx$ కనుగొనుము. ఇచ్చిన ప్రమేయంలో x^4+2 యొక్క అవకలన గుణకము $4x^3\ dx = dt$, మరియు $dx = \dfrac{dt}{4x^3}$ అవుతుంది. వీటిని $\int 4x^3\ \left(x^4+2\right)^{80} dx$ లో ప్రతిక్షేపించగా $\int 4x^3\ \left(x^4+2\right)dx = \int 4x^3.\ t^{80}.\ \dfrac{dt}{4x^3}$

$$= \int t^{80}\ dt = \frac{t^{81}}{81} + c$$

$\therefore t$ ని తిరిగి రూపంలో వ్రాయగా

$$\int 4x^3\left(x^4+2\right)^{80}\ dx = \frac{\left(x^4+2\right)^{81}}{81} + c \text{ వస్తుంది.}$$

ఉదాహరణ 3: $\int 8x.\ e^{2x^2+1}\ dx$ కనుగొనండి.

ఇక్కడ $2x^2+1 = t$ అనుకుందాం. అపుడు $4x\,dx = dt$

$\therefore dx = \dfrac{dt}{4x}$ అవుతుంది.

వీటిని $\int 8x.\, e^{2x^2+1}\, dx$ లో ప్రతిక్షేపించగా

$\int 8x.e^t.\dfrac{dt}{4x} = \int 2e^t\, dt = 2\int e^t\, dt$ అవుతుంది. కాని $\int e^t\, dt = e^t + c$

$\therefore 2\int e^t\, dt = 2e^t + c$ $\therefore t$ ని తిరిగి వ్రాయగా $\int 8x.\, e^{2x^2+1}\, dx = 2e^{2x^2+1} + c$ వస్తుంది.

II. ఇచ్చిన ప్రమేయము, రెండు ప్రమేయాల విభక్తమయి వాటిలో హారము యొక్క అవకలన గుణకము లవము అయితే ప్రత్యామ్నాయ పద్ధతినుపయోగించి ఆ ప్రమేయాన్ని సమాకలనము చేయవచ్చు. ఈ పద్ధతి ఈ క్రింద చూపబడిన విధంగా ఉంటుంది.

ఇచ్చిన ప్రమేయము $\dfrac{f^1(x)}{f(x)}$ అనుకుందాం. దాని సమాకలని $\dfrac{f^1(x)}{f(x)}dx$. ఇక్కడ $f(x) = t$ అనుకుందాం. అపుడు $f^1(x)\, dx = dt$ మరియు $dx = \dfrac{dt}{f^1(x)}$ అవుతుంది. వాటిని $\int \dfrac{f^1(x)}{f(x)}dx$ లో ప్రతిక్షేపించగా

$\int \dfrac{f^1(x)}{f(x)}dx = \int \dfrac{f^1(x)}{t}.\dfrac{dt}{f^1(x)} = \int \dfrac{1}{t}dt$ కాని $\int \dfrac{1}{t}\, dt = \log t + c$

$\therefore t$ ని తిరిగి x రూపంలో వ్రాయగా

$\int \dfrac{f^1(x)}{f(x)}\, dx = \log\left[f(x) \right] + c$ అవుతుంది.

ఉదాహరణ : 1. $\dfrac{2x}{1+x^2}\, dx$ కనుగొనుము.

ఇచ్చిన ప్రమేయంలో హారము యొక్క అవకలన గుణకము లవము అవుతుంది. కాబట్టి $1+x^2 = t$ అనుకుందాం. మరియు $dx = \dfrac{dt}{2x}$ అవుతుంది. వాటిని $\int \dfrac{2x}{1+x^2}dx$ లో ప్రతిక్షేపించగా

$\dfrac{2x}{1+x^2}\, dx = \int \dfrac{2x}{t}.\dfrac{dt}{2t} = \dfrac{1}{t}\, dt$ కాని $\int \dfrac{1}{t}dt = \log t + c$ $\therefore t$ ని x రూపంలో వ్రాయగా

$\therefore \int \dfrac{2x}{1+x^2}dx = \log(1+x)^2 + c$

ఉదాహరణ : 2 $\int \dfrac{1}{2x+1}dx$ ను కనుగొనుము.

ఇక్కడ $(2x+1)=t$ అనుకుందాం. అప్పుడు $2dx = dt$ $\therefore dx = \frac{dt}{2}$ వీటిని $\int \frac{1}{2x+1}dx$ లో ప్రతిక్షేపించగా

$\int \frac{1}{2x+1}dx = \int \frac{1}{t}.\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}\log t + c$ అవుతుంది.

$\therefore t$ ని x రూపంలో వ్రాయగా $\int \frac{1}{2x+2}dx = \frac{1}{2}\log(2x+1)+c$

అభ్యాసము : ఈ క్రింది వాటిని కనుగొనుము.

1. $\int (1+6x)^2\,dx$ 2. $\int 5x\left(1-2x^2\right)^{1/2} dx$ 3. $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$ 4. $\int x^2.e^{x^3}\,dx$

విభాగ సమాకలన పద్ధతి: u, v లు x లో ప్రమేయాలైతే, అవకలన లబ్ధ నియమము ప్రకారము $d(uv) = u\,dv + v\,du$ అవుతుంది.

$\therefore \int d(uv) = \int (u\,dv + v\,du) = \int u\,dv + \int v\,du \qquad i.e.\, uv = \int u\,dv + \int v\,du$

$\therefore \int u\,dv = uv - \int v\,du$

దీనినే విభాగ సమాకలన నియమము అని అంటారు.

ఈ నియమము నుపయోగించి సమాకలనిలను కనుగొనుటకు ఇచ్చిన ప్రమేయాన్ని udv అనుకొనవలెను. అనగా, ఇచ్చిన ప్రమేయంలో ఒక భాగాన్ని u, మిగిలిన భాగాన్ని dv అనుకొనవలెను. అలా dv అనుకొనబడిన భాగము సులువుగా సమాకలనము చేయుటకు వీలుపడాలి. ఎందుకంటే dv నుండి v కనుగొనవలసి ఉన్నది.

ఉదాహరణ : 1. $\int x.\,e^x\,dx$ కనుగొనుము.

ఇక్కడ $u=x,\ dv = e^x\,dx$ అనుకుందాం. అపుడు $du = dx$ మరియు $\int dv = \int e^x\,dx, \quad i.e.\, v = e^x + c$ అవుతుంది.

$\therefore$ విభాగ సమాకలన నియమం ప్రకారం

$\int x e^x\,dx = x\left(e^x + c_1\right) - \int \left(e^x + c_1\right)dx \qquad = x\,e^x - x c_1 - \int e^x\,dx - c_1\int dx$

$= x e^x - x c_1 - \int e^x\,dx - c_1\int dx \qquad = x e^x - x c_1 - \left[e^x + c_2 - \left(c_1 x + c_3\right)\right]$

$= x e^x - x c_1 - e^x - c_2 + c_1 x + c_3 \qquad = x e^x - e^x + c_2 - c_3$

$= x e^x - e^x + c$

ఉదాహరణ : 2. $\int \log x\,dx$ ను కనుగొనుము.

ఇక్కడ $u = \log x,\ dv = dx$ అనుకుందాం.

అపుడు $du = \frac{1}{x}dx$ $\int dv = \int dx,$ i.e. $v = x + c_1$ అవుతుంది.

విభాగ సమాకలన నియమం ప్రకారము

$$\int \log x\, dx = \log x(x+c_1) - \int (x+c_1)\frac{1}{x}dx = x\log x + c_1 \log x - \left[\int x\frac{1}{x}dx + \int c_1\frac{1}{x}dx\right]$$

$$= x\log x + c_1 \log x - [x + c_2 + c_1 \log x + c_3] = x\log x + c_1\log x - x - c_2 - c_1\log x - c_3$$

$$= x\log x - x - c_2 - c_3 = x\log x - x - (c_2 + c_3)$$

$$= x(\log x + 1) + c$$

ఉదాహరణ : 3. $\int x\,(x+1)^{1/2}\,dx$ ను కనుగొనుము.

ఇక్కడ $u = x,\ dv = (x+1)^{1/2}\,dx$ అనుకొనుము.

అపుడు $du = dx,$ $\int dv = \int (x+1)^{1/2}\,dx$

$v = \int (x+1)^{1/2}\,dx$ అవుతుంది.

$\int (x+1)^{1/2}\,dx$ లో $(x+1) = t$ ను ప్రతిక్షేపించగా,

$$\int (x+1)^{1/2}\,dx = \int t^{1/2}\,dt = \frac{t^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + c_1 = \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c_1$$ అవుతుంది.

$\therefore t$ ని x రూపములో వ్రాయగా,

$$\int (x+1)^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}.(x+1)^{3/2} + c_1 \ \therefore\ v = \frac{2}{3}[x+1]^{3/2} + c_1$$

$\therefore$ విభాగ సమాకలన నియమం ప్రకారము

$$\int x\,(x+1)^{1/2}\,dx = x\left[\frac{2}{3}\int (x+1)^{3/2} + c_1\right] - \int \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + c_1\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} + c_1 x - \left[\frac{2}{3}\int (x+1)^{3/2}\,dx + \int c_1\,dx\right]$$

$\int (x+1)^{3/2}\,dx$ ను పైన చెప్పినట్లే ప్రత్యామ్నాయ పద్ధతినుపయోగించి సమాకలనము చేయగా,

$\int (x+1)^{3/2}\, dx = \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} + c_2$ అవుతుంది.

$$\therefore \int x(x+1)^{1/2}\, dx = \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} + c_1 x - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{5}(x+1)^{5/2} + c_2\right] - c_1 x + c_3$$

$$= \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}c_2 + c_3$$

$$= \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} + c$$

అభ్యాసము : ~~ఈ~~ **క్రింది సమాకలనిలను కనుగొనుము.**

1. $\int (x+3)(x+1)^{1/2}\, dx$ 2. $\int x.\log x.\, dx$ 3. $\int \frac{5x}{(x-1)^2}\, dx$ 4. $\int x^2 e^{2x}\, dx$

6.5 అనిశ్చిత సమాకలనిలు - ఆర్థిక అనువర్తన:

అనుశ్చిత సమాకలనిల ప్రక్రియనుపయోగించి, ఉపాంత వ్యయ ప్రమేయాన్ని ఇచ్చినపుడు మొత్తం వ్యయ ప్రమేయాన్ని ఉపాంత రాబడి ప్రమేయాన్ని, ఉపాంత వినియోగ ప్రవృత్తి విచ్చినపుడు వినియోగ ప్రమేయాన్ని, ఉపాంత పొదుపు ప్రవృత్తినిచ్చినపుడు పొదుపు ప్రమేయాన్ని కనుగొనుటకు తెలుసుకుందాం.

వ్యయ ప్రమేయం : ఒక సంస్థ యొక్క ఉత్పత్తికి, ఉత్పత్తి వ్యయానికి గల సంబంధాన్నే వ్యయ ప్రమేయం అంటారు. దీనిని సంకేత రూపంలో $T = f(x)$ అని వ్రాయవచ్చు.

ఇక్కడ T మొత్తం ఉత్పత్తి వ్యయాన్ని x ఉత్పత్తిని చూస్తున్నవి. మొత్తము వ్యయ ప్రమేయాన్ని అవకలనము చేయగా, ఉపాంత వ్యయ ప్రమేయాన్ని అవకలనము చేయగా, ఉపాంత వ్యయ ప్రమేయం వస్తుందని మీరిదివరకు తెలుసుకున్నారు. అనగా, ఉపాంత వ్యయ ప్రమేయము $T^1 = \frac{dT}{dx}$ అవుతుంది.

కాబట్టి మొత్తము వ్యయ ప్రమేయము, $T = \int T^1\, dx$. ఉపాంత వ్యయ ప్రమేయాన్ని సమాకలనం చేయగా మొత్తము వ్యయ ప్రమేయము వస్తుంది.

ఉదాహరణ : ఒక సంస్థ యొక్క ఉపాంత వ్యయ ప్రమేయము $T^1 = 25 + 30x - 9x^2$ మరియు స్థిర వ్యయము 55 అయినపుడు దాని మొత్తము వ్యయ ప్రమేయాన్ని కనుగొనుము.

సంస్థ యొక్క ఉపాంత వ్యయ ప్రమేయము $T^1 = 25 + 30x - 9x^2$

మొత్తము వ్యయ ప్రమేయము $T = \int (25 + 30x - 9x^2)\, dx = \int 25\, dx + \int 30\, x\, dx - 9\int x^2\, dx$

$$= 25x + 30\frac{x^2}{2} - 9\frac{x^2}{3} + c$$

$=25x+15x^2-3x^3+c$

ఉత్పత్తి సున్న అయినపుడు సంస్థ భరిస్తున్న వ్యయాన్నే స్థిర వ్యయం అంటారు. స్థిర వ్యయం 55 అని ఇవ్వబడినది.

$\therefore 55=25(0)+15\left(0^2\right)^2-3(0)^3+c \therefore c=55$

సంస్థ యొక్క మొత్తం వ్యయ ప్రమేయము $T=25x+15x^2-3x^3+55$

రాబడి ప్రమేయం: ఒక సంస్థ యొక్క మొత్తము రాబడికి, అమ్మిన వస్తు పరిమాణానికి గల సంబంధాన్ని సంస్థ యొక్క మొత్తము రాబడి ప్రమేయము లేక రాబడి ప్రమేయము దీనిని సంకేతరూపములో $R\ f(x)$ అని వ్రాస్తారు.

ఇక్కడ R మొత్తము రాబడిని, x అమ్మిన వస్తు పరిమాణాన్ని సూచిస్తున్నవి.

మొత్తము రాబడి ప్రమేయాన్ని అవకలనము చేయగా ఉపాంత రాబడి ప్రమేయము వస్తుందని మీరిదివరకే తెలుసుకొన్నారు. అనగా ఉపాంత రాబడి ప్రమేయము $R^1=\dfrac{dR}{dx}$

కాబట్టి రాబడి ప్రమేయము $\therefore R=\int R^1\,dx$

$\therefore$ ఉపాంత రాబడి ప్రమేయాన్ని సమాకలనము చేయగా మొత్తము రాబడి ప్రమేయము వస్తుంది.

ఉదాహరణ: ఒక సంస్థ యొక్క ఉపాంత రాబడి ప్రమేయము $R^1=60-2x-2x^2$ అయినపుడు దాని మొత్తము రాబడి ప్రమేయాన్ని కనుగొనుము.

$R^1=60-2x-2x^2$

$\therefore$ మొత్తము రాబడి ప్రమేయము, $R=\int R^1\,dx=\int\left(60-2x-2x^2\right)dx$

$=\int 60\,dx-\int 2x\,dx-\int 2x^2\,dx \qquad =60\int dx-2\int x\,dx-2\int x^2\,dx$

$=60x-2\dfrac{x^2}{2}-2\dfrac{x^3}{3}+c \qquad = 60x-x^2-\dfrac{2}{3}x^3+c$

అమ్మిన వస్తు పరిమాణము సున్నా అయినపుడు రాబడి సున్నా అవుతుంది. కాబట్టి

$0=60(0)-0^2-\dfrac{2}{3}\left(o^3\right)+c \therefore c=0$

రాబడి ప్రమేయము $R=60x-x^2-\dfrac{2}{3}x^3$

వినియోగ ప్రమేయము: సమిష్టి వినియోగ వ్యయానికి సమిష్ఠి వాస్తవిక వ్యయార్హ ఆదాయానికి గల సంబంధాన్ని వినియోగ ప్రమేయమంటారు. దీనిని సంకేత రూపంలో

$c=f(y)$ అని వ్రాయవచ్చు. ఇక్కడ c సమిష్టి వినియోగ వ్యయాన్ని, y సమిష్టి వ్యయార్హ వాస్తవిక ఆదాయాన్ని సూచిస్తుంది.

వినియోగ ప్రమేయాన్ని అవకలనము చేయగా ఉపాంత వినియోగ ప్రవృత్తి వస్తుందని మీకిదివరకే తెలుసు.

$\therefore$ ఉపాంత వినియోగ ప్రవృత్తి, $c^1 = \frac{dc}{dT}$

కాబట్టి వినియోగ ప్రమేయము, $c = \int c^1\, dy$

$\therefore$ ఉపాంత వినియోగ ప్రవృత్తిని సమాకలనము చేయగా వినియోగ ప్రమేయము వస్తుంది.

ఉదాహరణ : ఉపాంత వినియోగ ప్రవృత్తి $c^1 = 0.6 + 0.1\, y^{-1/3}$

$\therefore$ వినియోగ ప్రమేయము

$$c = \int c^1\, dy = \int \left(0.6 + 0.1\, y^{-1/3}\right) dy$$

$$= \int 0.6\, dy + \int 0.1\, y^{-1/3}\, dy = 0.6\, y + 0.1 \frac{y^{-1/3}}{-\frac{1}{3}+1} + c$$

$$0.6\, y + 0.15\, y^{2/3} + c$$

వాస్తవిక వ్యయార్హ ఆదాయము సున్నా అయినపుడు వినియోగ వ్యయము 40 కాబట్టి

$$40 = 0.6(0) + 0.15\left(0^{2/3}\right) + c \quad \therefore c = 40$$

$\therefore$ వినియోగ ప్రమేయము $c = 0.6\, y + 0.15\, y^{2/3} + 40$

పొదుపు ప్రమేయం : సమిష్టి పొదుపుకు, సమిష్టి వాస్తవిక వ్యయార్హ ఆదాయానికి గల సంబంధాన్ని కీన్స్ పొదుపు ప్రమేయమంటారు. దీనిని సంకేత రూపంలో

$s = f(y)$ అని వ్రాయవచ్చు. ఇక్కడ s సమిష్టి పొదుపును, y సమిష్టి వాస్తవిక వ్యయార్హ ఆదాయాన్ని సూచిస్తున్నవి. పొదుపు ప్రమేయాన్ని అవకలనము చేయగా, ఉపాంత పొదుపు ప్రవృత్తి వస్తుందని మీకిది వరకే తెలుసు.

$\therefore$ ఉపాంత పొదుపు ప్రవృత్తి $s^1 = \frac{dS}{dY}$ కాబట్టి పొదుపు ప్రమేయము $s = \int s^1\, dy$

ఉపాంత పొదుపు ప్రవృత్తిని సమాకలనము చేయగా పొదుపు ప్రమేయం వస్తుంది.

ఉదాహరణ : ఉపాంత పొదుపు ప్రవృత్తి $s^1 = 0.5 - 0.2\, y^{-1/2}$ మరియు ఆదాయము పొదుపు -3.5 అయితే, పొదుపు ప్రమేయాన్ని కనుగొనుము.

ఉపాంత పొదుపు ప్రవృత్తి $s^1 = 0.5 - 0.2\, y^{-1/2}$

$\therefore$ పొదుపు ప్రమేయము,

$$s=\int s^1\,dy=\int\left(0.5-0.2\,y^{-1/2}\right)dy=0.5\,y-0.2\frac{y^{1/2}}{1/2}+c=0.5\,y-0.4\,y^{1/2}+c$$

ఆదాయము 25 అయినపుడు పొదుపు -3.5 కాబట్టి

$$-3.5=0.5(25)-0.4(2.5)^{1/2}+c\;=0.5(25)-0.4\sqrt{25}+c\;\therefore c=-14$$

పొదుపు ప్రమేయము $s=0.5\,y-0.4\sqrt{y}-14$

మూల ధనము, పెట్టుబడి : మూలధనము k, కాలము tతో మారుతుంటుంది. కాబట్టి మూలధన ప్రమేయాన్ని $k=f(t)$ అని వ్రాయవచ్చు. కాలముతో మూలధనములో వచ్చే మార్పురేటును పెట్టుబడి రేటు అంటారు.

$\therefore$ పెట్టుబడి $I=\dfrac{dk}{dt}$

$\therefore$ మూల ధనము $k=\int I\,dt$

అనగా పెట్టుబడి రేటును $I=80t^{2/5}$ మరియు $t=0$ అయినపుడు మూలధనము 75 అయితే మూలధన ప్రమేయాన్ని కనుగొనుము.

పెట్టుబడి రేటు $I=80t^{2/5}$

$\therefore$ మూలధన ప్రమేయము $k\int I\,dt=\int 80t^{2/5}\,dt$

$$=80\int t^{2/5}\,dt\;=80\frac{t^{2/5+1}}{\frac{2}{5}+1}+c=80.\frac{5}{7}\,t^{7/5}+c$$

$=\dfrac{400}{7}\,t^{7/5}+c$ $t=0$ అయినపుడు మూలధనము 75 కాబట్టి

$75=\dfrac{400}{7}.\,t^{7/5}+c$ $\therefore$ మూలధనము $k=\dfrac{400}{7}.t^{7/5}+75$

అభ్యాసము :

1. ఒక సంస్థ యొక్క ఉపాంత వ్యయ ప్రమేయము $T^1=15+x^2$ మరియు స్థిర వ్యయము 50 అయితే దాని మొత్తము వ్యయ ప్రమేయాన్ని కనుగొనుము.

2. ఒక సంస్థ యొక్క ఉపాంత వ్యయ ప్రమేయము $T^1=5+6e^x$ మరియు స్థిర వ్యయము 75 అయితే దాని మొత్తము వ్యయ ప్రమేయాన్ని కనుగొనుము.

3. ఒక సంస్థ యొక్క ఉపాంత రాబడి ప్రమేయము $R^1 = 20 + 10x - 5x^2$ మరియు ఉత్పత్తి 5 యూనిట్లు అయినపుడు రాబడి 100 అయితే దాని మొత్తము రాబడి ప్రమేయాన్ని కనుగొనుము.

4. ఒక సంస్థ యొక్క ఉపాంత రాబడి ప్రమేయము $R^1 = 0.5x^{-0.5}$ అయితే దాని మొత్తము రాబడి ప్రమేయాన్ని కనుగొనుము.

5. ఉపాంత వినియోగ ప్రవృత్తి $c^1 = 0.5 + 0.2y^{1/3}$ మరియు ఆదాయము 500 అయినపుడు వినియోగము కూడా 500 అయితే, వినియోగ ప్రమేయాన్ని కనుగొనుము.

6.6 నిశ్చిత సమాకలని:

నిర్వచనము : $y = f(x)$ ఒక ఏకమూల్య ప్రమేయము. మరియు అది $x = a$ నుండి $x = b$ వరకు గల x అన్ని విలువల వద్ద అవిచ్ఛిన్నముగా ఉంటుందని అనుకుందాం. అంతరము $[a, b]$ను $a = x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1} = b$ బిందువులతో, n భాగాలుగా విభజించి $f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_2)(x_3 - x_2) + ... + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + f(x_n)(x_{n+1} - x_n)$ అనే మొత్తమును రూకల్పన చేస్తాము. ఈ మొత్తమునే సంకేత రూపములో $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$ అని వ్రాయవచ్చు. అనంతరము విభజించిన భాగములు సంఖ్య 'n' హెచ్చుతుంటే, భాగాల యొక్క పొడవు తగ్గుతుంటుంది. ఈ సంఖ్య n, అనంతరము చేరుకుంటే $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$ అనే మొత్తము ఒక ఖచ్చితమైన విలువకు చేరుకుంటుంది. ఆ విలువనే a నుండి b కి $f(x)$ యొక్క నిశ్చిత సమాకలని అంటారు. దీనిని సంకేత రూపములో $\int_a^b f(x)dx$ అని వ్రాస్తారు. ఇక్కడ a ని సమాకలని యొక్క దిగువ అవధి, మరియు b ని ఎగువ అవధి అని అంటారు.

నిర్వచనము : $\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x)(x_{i+1} - x_i)$

నిశ్చిత సమాకలని వివరణ : ప్రమేయము $F(x)$ యొక్క అవకలన గుణకము $f(x)$ అయితే $\int f(x)dx = F(x) + c$ అవుతుందని మనకు తెలుసు. దీనికి ఒక ప్రత్యేకమైన విలువలేదు. x చలరాశి $a, b, (a < b)$ అనే రెండు విలువలు తీసుకుంటే, $x = a$ వద్ద సమాకలని విలువ $F(a) + c$ మరియు $x = b$ వద్ద సమాకలని విలువలో నుండి $x = a$ వద్ద సమాకలని విలువ తీసివేయగా

$[F(b) + c] - [F(a) + c] = F(b) - F(a)$ అవుతుంది.

ఇది x విలువలపై గాని c విలువలపై గాని ఆధారపడకుండా ఉండే ఒక ప్రత్యేకమైన విలువ. దీనిని a నుండి b కి $f(x)$ యొక్క నిశ్చిత సమాకలని అంటారు.

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

ఉదాహరణ : 1. $\int_1^5 30x^2 \, dx$ కనుగొనుము.

$$\int_1^5 30\,x^2\,dx = 30\int x^2\,dx = 30\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^5 = \frac{30}{3}\left[5^3-1^3\right] = 10\left[125-1\right] = 1240$$

ఉదాహరణ : 2. $\int_1^5 \left(x+\frac{4}{x^2}\right)dx$ ను కనుగొనుము.

$$\int_1^5 \left(x+\frac{4}{x^2}\right)dx = \int_1^5 x\,dx + \int_1^5 \frac{4}{x^2}dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^5 + 4\int_1^5 x^{-2}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^5 + 4\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^5$$

$$= \left[\frac{5^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right]+4\left[\frac{5^{-1}}{-1}-\frac{1^{-1}}{-1}\right] = \left[\frac{25}{2}-\frac{1}{2}\right]+4\left[1-\frac{1}{5}\right] = \frac{24}{2}-4\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$=12-\frac{16}{5} = \frac{44}{5}$$

3. $\int_0^2 \frac{5}{2+x}dx$ ను కనుగొనుము.

$$\int_0^2 \frac{5}{2+x}dx = 5\int_0^2 \frac{1}{2+x}dx = 5\left[\log(2+x)_0^2\right] = 5\left[\log(2+2)-\log(2+0)\right]$$

$$= 5\left[\log 4-\log 2\right] = 5\log\left(\frac{4}{2}\right) = 5\log 2$$

4. $\int_0^1 x\left(x^2+6\right)dx$ ను కనుగొనుము.

$$\int_0^1 x\left(x^2+6\right)dx = \left[\frac{\left(x^2+6\right)^2}{4}\right]_0^1 = \frac{\left(1^2+6\right)^2}{4} - \frac{\left(0^2+6\right)^2}{4}$$

$$= \frac{49}{4}-\frac{36}{4} = \frac{13}{4}$$

5. $\int_1^3 \left(e^{2x}+e^x\right)dx$ ను కనుగొనుము.

$$\int_1^3 \left(e^{2x}+e^x\right)dx = \int_1^3 e^{2x}\,dx + \int_1^3 e^x\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_1^3 + \left[e^x\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left[e^6-e^2\right]+\left[e^3-e^1\right] = \frac{e^6-e^2}{2}+e^3-e^1 = \frac{e^6-e^2+2e^3-2e^1}{2}$$

$$=\frac{e^6-2e^3-e^2-2e^1}{2}$$

6. $6y=x^2$ రేఖ క్రింద, $x=1$ మరియు $x=3$ బిందువుల మధ్య ఉండే వైశాల్యాన్ని కనుగొనుము.

$y=x^2$ రేఖ క్రింద $x=1$ మరియు $x=3$ బిందువుల మధ్య నుండే వైశాల్యము $\int_1^3 x^2\,dx$ అవుతుంది.

$$\therefore \int_1^3 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = =\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}= \frac{27}{3}-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}$$

అభ్యాసము : ఈ క్రింద నీయబడిన నిశ్చిత సమాకలనిలను కనుగొనుము.

1. $\int_1^3 \sqrt[3]{x}\,dx$ 2. $\int_2^4 \left(x^3-6x^2\right)dx$ 3. $\int_{-1}^1 \left(10x^2+6x+2\right)dx$ 4. $\int_4^2 x^2\left(\frac{1}{3}x^3+1\right)dx$ 5. $\int_0^2 (x-1)\left(x^2+x+1\right)dx$

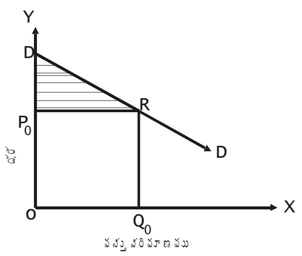
6. $y=9-x^2$ రేఖ క్రింద $x=1$ వద్ద మరియు $x=3$ బిందువుల మధ్య నుండే వైశాల్యాన్ని కనుగొనుము.

6.7 నిశ్చిత సమాకలనిలు - ఆర్థిక అనువర్తన:

వినియోగదారుని మిగులు: ప్రతి వినియోగదారునికి, ఒక వస్తువుకు చెల్లించుటకు అతను ఇష్టపడే ధర ఒకటి ఉంటుంది. కాని అతను వాస్తవంగా చెల్లించే ధర అవికాకపోవచ్చు. అతడు వాస్తవంగా చెల్లించిన ధర ఇష్టపడిన ధరకంటే తక్కువ ఉంటే, ఆ వినియోగదారునికి మిగులు ఏర్పడుతుంది. ఈ మిగులునే వినియోగదారుని మిగులు అంటారు. ఇది వినియోగదారుడు చెల్లించుటకు ఇష్టపడిన ధరలో నుండి అతను వాస్తవంగా చెల్లించిన ధరను తీసివేయగా వస్తుంది.

$\therefore$ వినియోగదారుని మిగులు = వినియోగదారుడు చెల్లించుటకు ఇష్టపడిన ధర - వాస్తవంగా చెల్లించిన ధర

వినియోగదారుని మిగులును ఈ క్రింద గీయబడిన రేఖాపటము విపులీకరిస్తుంది.



వినియోగదారుని డిమాండ్ రేఖ D, మరియు అతను Q_0 వస్తువును P_0 ధర వద్ద కొనుగోలు చేస్తాడనుకుందాము. అపుడు Q_0 వస్తువును P_0 ధర వద్ద కొనుగోలు చేస్తాడనుకుందాము. అపుడు Q_0 వస్తువుకు అతను చెల్లించిన మొత్తము $P_0\,Q_0$ అవుతుంది. Q_0 వస్తువుకు చెల్లించుటకు అతను ఇష్టపడిన మొత్తాన్ని డిమాండు రేఖ తెలియజేస్తుంది. ఇది O మరియు Q_0 బిందువులు మధ్య డిమాండ్ రేఖ క్రింద నుండే వైశాల్యం అవుతుంది. డిమాండ్ ప్రమేయము $P=f(q)$ అయితే, Q_0 వస్తువులకు వినియోగదారుడు చెల్లించుటకు ఇష్టపడే మొత్తము $\int_0^{Q_0} f(q)\,dq$ అవుతుంది.

$\therefore$ వినియోగదారుని మిగులు $=\int_0^{Q_0} f(q)dq - p_0\, q_0$ ఇది పై పటంలో చూపబడిన Shaded Area అవుతుంది. $(p_0\, R\, D)$

ఉదాహరణ : ఒక వినియోగదారుని డిమాండ్ ప్రమేయం $P=25-2q$. అతను 10 యూనిట్లను, రూ. 5 ధర వద్ద కొనుగోలు చేస్తే వినియోగదారుని మిగులు ఎంత ? డిమాండ్ ప్రమేయము $p=f(q)$ అయినపుడు వినియోగదారుని q_0 వస్తువులను P_0 ధర వద్ద కొనుగోలు చేస్తే వినియోగదారుని మిగులు ఎంత ?

డిమాండ్ ప్రమేయము $P=f(q)$ అయినపుడు వినియోగదారుడు q_0 వస్తువులను P_0 ధర వద్ద కొనుగోలు చేస్తే వినియోగదారుని మిగులు $\int_0^{q_0} f(q)\,dq - p_0\, q_0$ అవుతుందని మనకు తెలుసు.

ఇక్కడ $P_0=5,\ q_0=10$ డిమాండ్ ప్రమేయము $P=25-2q$.

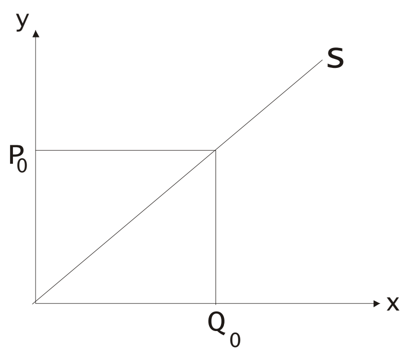
వినియోగదారుని మిగులు $\int_0^{10}(25-2q)\,dq - 5(10)$

$$=\int_0^{10} 25\,dq - \int_0^{10} 2q\ dq - 50 = 25[q]_0^{10} - 2\left(\frac{10^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) - 50$$

$$=250-100-50=100$$

ఉత్పత్తిదారుని మిగులు(Producer's Surplus): ఉత్పత్తిదారుడు వస్తువులను ఏ ఏ ధరల దగ్గర ఎంతెంత సప్లయి చేయడానికి ఇష్టపడతాడో, అతని సప్లయ్ రేఖ తెలియజేస్తుంది. కాని ఇలా వస్తువులను, సప్లయ్ చేయడానికి ఇష్టపడిన ధరల, వస్తువులను వాస్తవంగా ఏ ధరల సప్లై చేస్తారో వాటికి సమానంగా నుండవు. సాధారణంగా వస్తువులను వాస్తవంగా సప్లయ్ చేస్తున్న ధరలు, వస్తువులను సప్లయ్ చేయుటకు ఇష్టపడే ధరల కంటే ఎక్కువగా వుంటాయి. అపుడు ఉత్పత్తిదారునికి మిగులు ఏర్పడుతుంది. ఆ మిగులునే ఉత్పత్తిదారుని మిగులు అంటారు. ఇది, ఉత్పత్తిదారుడు వస్తువులను సప్లయ్ చేస్ను ధరలో నుండి అతను వస్తువులను సప్లయ్ చేయుటకు ఇష్టపడిన ధర తీసివేయగా వస్తుంది.

ఉత్పత్తిదారుని మిగులును ఈ క్రింద చూపబడిన రేఖాపటము విపులీకరిస్తుంది.



ఉత్పత్తిదారుని సప్లయ్ రేఖ s, మరియు అతను q_0 వస్తువులను P_0 ధర వద్ద సప్లయ్ చేస్తున్నాడనుకుందాము. అపుడు P_0 వస్తువులను సప్లయ్ చేయుట ద్వారా అతనికి వచ్చిన మొత్తం P_0Q_0 కాని Q_0 వస్తువులను సప్లయ్ చేయడానికి అతను ఇష్టపడే మొత్తాన్ని సప్లయ్ రేఖ తెలియజేస్తుంది. ఇది O మరియు Q_0 బిందువుల మధ్య సప్లయ్ రేఖ క్రింద నుండే వైశాల్యం అవుతుంది. సప్లయ్ ప్రమేయము $P=f(q)$ అయితే Q_0 వస్తువులను సప్లయ్ చేయుటకు ఉత్పత్తిదారుడు ఇష్టపడే ధర $\int_0^{Q_0} f(Q)dq$ అవుతుంది.

$\therefore$ ఉత్పత్తిదారుని మిగులు $=P_0Q_0-\int_0^{Q_0} f(Q)dQ$. ఇది పై పటంలో చూపబడిన *Shaded Area* అవుతుంది.

ఉదాహరణ : ఒక ఉత్పత్తిదారుని సప్లయ్ ప్రమేయము $P=\sqrt{x+9}$. అతను 7 యూనిట్లు వస్తువులను, 4 రూపాయల ధర దగ్గర సప్లయ్ చేస్తే ఉత్పత్తిదారుని మిగులు ఎంత ?

సప్లయ్ ప్రమేయము $P=f(q)$ అయినపుడు ఉత్పత్తిదారుడు q_0 వస్తువులను P_0 ధర వద్ద సప్లయ్ చేస్తే ఉత్పత్తిదారుని మిగులు $=p_0q_0-\int_0^{q} f(q)dq$ అవుతుంది. ఇక్కడ సప్లయ్ ప్రమేయము $p=\sqrt{q+9}$, $p_0=4, q_0=7$.

ఉత్పత్తిదారుని మిగులు $\therefore 4\times 7-\int_0^7 \sqrt{q+9}\,dq$

$$=28-\left[\frac{(q+9)^{3/2}}{3/2}\right]_0^7 = 28-\frac{2}{3}\left[(7+9)^{3/2}-(0+9)^{3/2}\right]=28-\frac{2}{3}\left[\sqrt{16}^3-\sqrt{9}^3\right]$$

$$=28-\frac{2}{3}[64-27]=28-\frac{2}{3}[37]=\frac{10}{3}$$

ఉదాహరణ : డిమాండ్ ప్రమేయము $P=4+3q$ అయినపుడు వినియోగదారుని మిగులు, ఉత్పత్తి దారుని మిగులు కనుగొనుము.

వినియోగదారుని మిగులు, ఉత్పత్తిదారుని మిగులు కనుగొనడానికి, వినియోగదారుడు వస్తువులను ఏ ధర వద్ద ఎంత కొనుగోలు చేసిందీ, అలాగే ఉత్పత్తిదారుడు ఏ ధర వద్ద ఎంత సప్లయ్ చేసిందీ తెలియాలి. మార్కెట్ సమతౌల్యంలో ఉందనుకుంటే, ఈ విలువలు సమతౌల్యవిలువలు అవుతాయి.

మార్కెట్ సమతౌల్యం దగ్గర, సప్లయ్ డిమాండ్‌లు సమానంగా ఉంటాయి.

$$\therefore \frac{P-4}{3}=\frac{20-P}{5}$$

$$\therefore 5(P-4)-3(20-P)$$

$$\therefore 5P-20=60-3P$$

$$\therefore 5P+3P=60+20=80$$

$\therefore 8P = 80$

$\therefore P = \frac{80}{8} = 10$

P విలువను సప్లయ్ ప్రమేయము (లేక డిమాండ్ ప్రమేయము)లో ప్రతిక్షేపించగా $q=2$ వస్తుంది. $\therefore P_0 = 10, q_0 = 2$

$\therefore$ వినియోగదారుని మిగులు $= \int_0^2 (20-5q)\, dq - 20$

$$= \int_0^2 20\, dq - \int_0^2 5q\, dq - 20$$

$$= [20q]_0^2 - 5\left[\frac{q^2}{2}\right]_0^2 - 20 = 20(2-0) - 5\left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) - 20$$

$$= 40 - 10 - 20 = 10$$

ఉత్పత్తిదారుని మిగులు $= 20 - \int_0^2 4\, dq - \int_0^2 3q\, dq$

$$= 20 - 4.[9]^2 - 3\left[\frac{9^2}{3}\right]_0^2$$

$$= 20 - 4(2-0) - 3\left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = 20 - 8 - 6 = 6$$

6.8 అభ్యాసం:

1. $\int (x^3 - x + 1)\, dx \qquad = \int x^3\, dx - \int x\, dx + \int 1 dx$

$= \frac{x^4}{4} + c_1 - \frac{x^2}{2} + c_2 + x + c_3 \qquad = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + x + c$ ఇక్కడ $(c_1 - c_2 - c_3) = c$ అవుతుంది.

2. $\int e^x + \frac{1}{x^3} dx \qquad = \int e^x\, dx + \frac{1}{x^3} dx \quad = \int e^x\, dx + \int x^{-3}\, dx$

$e^x + c_1 + \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c_2 = e^x - \frac{x^{-2}}{2} + c_1 + c_2 = e^x - \frac{1}{2} x^{-2} + c$

$e^x - \frac{1}{2x^2} + c$ (ఇక్కడ $c_1 + c_2 = c$ అవుతుంది.)

3. $\int 5e^x - x^{-2} + \frac{4}{x} dx$

$$= 5\int e^x\, dx - \int x^{-2}\, dx + 4\int \frac{1}{x} dx \;= 5e^x + c_1 - \left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c_2\right) + 4\log x + c_3$$

$=5e^x + c_1 + \frac{1}{x} - c_2 + 4\log x + c_3 \;\; = 5e^x + \frac{1}{x} + 4\log x + c$ ఇక్కడ $\left(c_1 - c_2 + c_3\right) = c$ అవుతుంది.

4. $\int (5x+7)^8\, dx$

ఇక్కడ $t = 5x+7$ అనుకుందాం, $\therefore\; dt = 5\,dx \;=\; dx = \frac{dt}{5}$

$$\therefore\; \int (5x+7)^8 dx = \int t^8 . \frac{dt}{5} \;\; = \frac{1}{5}\int t^8\, dt \;\; = \frac{1}{5}\left[\frac{t^{8+1}}{8+1}\right] + c$$

$$= \frac{1}{5} . \frac{t^9}{9} + c \;\; = \frac{1}{45} t^9 + c$$

మరల t ని x రూపంలో వ్రాయగా

$$\int (5x+8)^8\, dx = \frac{1}{45}(5x+7)^9 + c$$

5. $\int \frac{x\, dx}{2x^2+3}$

ఇక్కడ $t = 2x^2 + 3$ అనుకుందాం $\therefore dt = 4x\, dx$

$\therefore dx = \frac{dt}{4x}$ అవుతుంది.

$$\therefore \int \frac{x\, dx}{2x^2+3} = \int \frac{x}{t} . \frac{dt}{4x} \;\;\; = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t} dt \;\; = \frac{1}{4}\log t + c$$

t ని మరల x రూపంలో వ్రాయగా

$$\int \frac{x}{2x^2+3} dx \;= \frac{1}{4}\log\left(2x^2+3\right) + c$$

6. $\int x^n \log x \; dx$

$u = \log x \;\&\; v = x^n$ అనుకుందాం.

$$\therefore \int x^n \log x \, dx = \int \log x . \, x^n \, dx = \log x . \frac{x^{n+1}}{n+1} - \int \frac{1}{x} . \frac{x^{n+1}}{n+1} dx$$

$$= \frac{1}{n+1} . \, x^{n+1} \log x - \int \frac{x^n}{n+1} dx$$

$$= \frac{1}{n+1} . x^{n+1} \log x - \int \frac{x^n}{n+1} dx$$

$$= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \log x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \left[\log x - \frac{1}{n+1} \right] + c$$

7. $$\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)} = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \quad = \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx$$

$$= [\log x]_1^2 - [\log(x+1)]_1^2 \qquad = [\log 2 - \log 1] - [\log 3 - \log 2]$$

$$= 2\log 2 - \log 3 \qquad [\sin u \quad \log\, 1 = 0]$$

8. $$\int_2^3 \frac{6x^2+1}{\sqrt{2x^3+x-2}} dx$$

ఇక్కడ $2x^3+x-2$ అనుకుందాం.

$$\therefore (6x^2+1) dx = dt$$

$$\therefore \int_2^3 \frac{6x^2+1}{\sqrt{2x^3+x-2}} dx \quad = \int \frac{6x^2+1}{\sqrt{t}} \frac{dt}{6x^2+1} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$ అవుతుంది.

$$= \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c \; = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$= 2t^{\frac{1}{2}} + c$ $\quad t$ ని మరల x రూపంలో వ్రాయగా

$$\int_2^3 \frac{6x^2+1}{\sqrt{2x^3+x-2}} dx = 2\left[\sqrt{2x^3+x-2} \right]_2^3$$

$=2\left[\sqrt{54+3-2}-\sqrt{16+2-2}\right]=2\left[\sqrt{55}-4\right]=$ 6.88

9. $\int_{-1}^{+1}(4-3x)^5\,dx$

$4-3x=t$ అనుకుందాం.

$-3dx=dt$

$dx=-\frac{1}{3}dt$ అవుతుంది.

$\therefore \int(4-3x)^5\,dx=\int t^5.\left(-\frac{1}{3}\right)dt \quad =-\frac{1}{3}\int t^5\,dt$

t ని మరల x రూపంలో వ్రాయగా

$-\frac{1}{3}\frac{(4-3x)^6}{6}+c \qquad \int_{-1}^{+1}(4-3x)^5\,dx=-\left[\frac{(4-3x)^6}{18}+c\right]_1^1$

$=-\frac{1}{18}\left[1^6-7^6\right] \quad =6549.61$

10. $\int_1^2\frac{x.5^x+2x+1}{x}dx \qquad \int\frac{x.5^x+2x+1}{x}dx=\int 5^x\,dx+2\,dx+\frac{1}{x}dx$

$=\left[5^x\log 5+2x+\log x+c\right]_1^2 \qquad \left[\therefore \int a^n\,dx=a^x\log a\right]$

$=25\log 5-5\log 5+2+\log 2-\log 1$

$=20\log 5+\log 2+2$

11. $\int_{-2}^{3}\left(1-\frac{2}{x^5}\right)dx$

$\int\left(1-\frac{2}{x^5}\right)dx=\int dx-2\int\frac{1}{x^5\,dx}$

$=x-2\frac{x^{-5}+1}{-5+1}+c \;=x+\frac{1}{2}-\frac{1}{x^4}+c$

$\int_{-2}^{3}\left(1-\frac{2}{x^5}\right)dx=\left[x+\frac{1}{2x^4}\right]_{-2}^{3} \quad =4.975$

12. $\int_1^5 \frac{12}{x} dx = [12 \log x]_1^5$

$=12[\log 5 - \log 1]$

$=12 \log 5$

6.9 అవగాహన ప్రశ్నలు / మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు:

I. **ఈ క్రింద నీయబడిన సమాకలనిలను కనుగొనుము.**

1. $\int \left(2x^5 - 3x^{-1/4}\right) dx$ 2. $\int \left(6e^{3x} - 8e^{-2x}\right) dx$ 3. $\int x^4 \left(2x^5 - 5\right)^4 dx$ 4. $\int \frac{x^2}{\left(4x^2+7\right)^2} dx$

5. $\int \frac{3x^2+2}{4x^2+8x} dx$ 6. $\int 15x(x+4)^{3/2} dx$

II. ఒక సంస్థ యొక్క ఉపాంత వ్యయ ప్రమేయం $T^1 = 5+8x$ మరియు స్థిర వ్యయం **75** అయినపుడు దాని మొత్తము వ్యయ ప్రమేయము కనుగొనుము.

III. ఒక సంస్థ యొక్క ఉపాంత రాబడి ప్రమేయము $R^1 = 10+20x-3x^2$ అయినపుడు దాని రాబడి ప్రమేయాన్ని కనుగొనుము.

IV. ఈ క్రిందనీయబడిన సమాకలనిలను కనుగొనుము.

1. $\int_1^3 \left(x^3+x+6\right) dx$ 2. $\int_1^2 x^2\left(x^3-5\right)^2 dx$ 3. $\int_1^3 \frac{6x}{x^2+1} dx$ 4. $\int_1^3 3x^2 e^{2x^3+1} dx$

5. $\int_1^3 5x.\, e^{x+2}$ 6.. $\int_1^3 5x.\, e^{x+2}$

V. ఒక సంపూర్ణ పోటీ మార్కెట్‌లో డిమాండ్ ప్రమేయము $p=25-q^2$, సప్లయ్ ప్రమేయము $p=2q+1$ అయినపుడు, వినియోగదారుని మిగులును, ఉత్పత్తిదారుని మిగులును కనుగొనుము.

6.10 సంప్రదింపు గ్రంథాలు:

1. R.G.D. Allen : Mathematical Analysis for Economics (MAC Million India Limited, 1986 Chapter - XV)

2. Alpha C. Chiang : Fundamental Methods of Mathematical Economics Third Edition, Mc GrawHill International Editions Chapter - Xiii

3. Edward T. Dowling : Mathematics for Economists schaum's outline series in Economics. Mc Graw Hill Book Company, Chapter, 16 & 17.

4. G.S. Monga : Mathematics and Statistics for Economics Vikas Publishing H&ouse Pvt. Ltd, Chapter - ii.

పాఠం - 7

అవకలన సమీకరణాలు

విషయక్రమం

7.0 లక్ష్యాలు:

ఈ ఖండము యొక్క ముఖ్య ఉద్దేశ్యము:

అవకలన సమీకరణము గురించి తెలుసుకొనుట.
అవకలన సమీకరణయులో రకములు గూర్చి తెలుసుకొనుట.
వివిధ రకములైన అవకలన సమీకరణములు సాధించుట.

7.1 పరిచయం:

భౌతిక శాస్త్రం, రసాయనిక శాస్త్రం, ఆర్ధిక శాస్త్రాల వంటి విషయాలను అధ్యయనం చేయడంలో ఎదురయ్యే సమస్యలను పరిష్కరించటంతో అవకలన సమీకరణం అనే గణిత మారదిరి ప్రాతినిధ్యం వహిస్తుంది.

జ్యామితీయ లేదా భౌతిక స్వామ్యాన్ని వివరించడంలో అవకలన సమీకరణాల సాధన కోసం న్యూటన్ కాలం నుంచి గణిత శాస్త్రజ్ఞులు నిరంతర పరిశోధన సాగిస్తున్నారు. ఈ విధంగా తెలియని ప్రమేయం యొక్క అవకలన గుణకాలతో ఏర్పడిన సమీకరణాన్ని అవకలన సమీకరణం అంటారు. ఈ అవకలన సమీకరణ సాధనే తెలియని ప్రమేయాన్ని ఇస్తుంది.

ఉదా:- 1. ఒక వక్రం పై (x, y) అనే ప్రతి బిందువు వద్ద ఉపస్పర్శరేఖ పాడవు బిందువు యొక్క రెండు నిరూపకాల మొత్తానికి సమానము అనే దాన్ని అవకలన సమీకరణం $(x+y)\dfrac{dy}{dx}=y$ తెలియజేస్తుంది.

7.2 అవకలన సమీకరణం:

ఒక అస్వతంత్ర చలరాశి మరియు ఒకటిగాని అంతకంటే ఎక్కువ స్వతంత్ర చలరాశులపై ఆధారపడి ఉంటే, ఆ సమీకరణాన్ని పాక్షిక అవకలన సమీకరణము అని అంటారు.

7.2.1 అవకలన సమీకరణము యొక్క పరిమాణము లేదా వర్గము లేదా ఆర్డర్:

నిర్వచనము: ఒక అవకలన సమీకరణములోని అత్యధిక పరిమాణము ఉన్న అవకలజము యొక్క పరిమాణమే ఆ అవకలన సమీకరణం యొక్క పరిమాణము అని అంటారు.

ఉదాహరణకు - 1. $\left(x^2+1\right)\dfrac{dy}{dx}+2xy = 4x^2$

పై సమీకరణంలో అత్యధిక అవకలజము, ప్రథమ అవకలజము $\dfrac{dy}{dx}$

$\therefore$ పై అవకలన సమీకరణం యొక్క పరిమాణము 1.

2. $x\,\dfrac{d^2y}{dx^2}-\left(2x-1\right)\dfrac{dy}{dx}+\left(x-1\right)y = e^x$

పై సమీకరణంలో రెండవ అవకలజము $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ అత్యధిక అవకలజము.

పై అవకలన సమీకరణం యొక్క పరిమాణము 2.

ప్రథమ పరిమాణం గల అవకలన సమీకరణం $F\left(x,\ y,\ \dfrac{dy}{dx},\ \dfrac{d^2y}{dx^2}\right)=0$ రూపంలో ఉంటుంది.

సాధారణంగా n వ పరిమాణం గల అవకలన సమీకరణం $\mathrm{F}\left(\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2},.......,\dfrac{d^ny}{dx^n}\right)=0$ రూపంలో ఉంటుంది.

7.2.2 అవకలన సమీకరణ: యొక్క తరగతి:

నిర్వచనము: $\mathrm{F}\left(x,y,y^1,y^{11},.......,y^n\right)=0$ అనేది n వ పరిమాణం గల అవకలన సమీకరణం అని అనుకోండి. బీజీయ పరిక్రియలను ఉపయోగించి పై సమీకరణాన్ని $y^{(n)}$లో ఒక బహుపదిగా వ్రాయగలిగినపుడు , y^n యొక్క గరిష్ఠ గతాన్ని ఆ సమీకరణం యొక్క తరగతి అని అంటారు.

గమనిక : 1. ఇచ్చిన సమీకరణంలో y^nహారములో ఉన్నా లేదా భిన్నాంక ఘతాన్ని కలిగి ఉన్నా బీజీయ పరికర్మలతో దాని భిన్నాంశ ఘతాలను కనిష్ఠ ధన పూర్ణాంక ఘాతాలుగా మార్చి ఆ సమీకరణాన్ని y^n లో ఒక బహుపదిగా మార్చవచ్చు.

2. పైన ఇచ్చిన తరగతి నిర్వచనంలో x,t,u మొదలైన చలరాశులు భిన్నాంక ఘతాలుగానూ ఉండవచ్చు.

3. ఇచ్చిన అవకలన సమీకరణాన్ని y^n లో ఒక బహుపదిగా వ్రాయలేకపోతే, అపుడు ఆ అవకలన సమీకరణం యొక్క తరగతిని నిర్వచించలేము.

ఉదాహరణకు 1. $y = x\frac{dy}{dx} + \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

$$\Rightarrow \left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(1+x^2\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\,x\,y\,\frac{dy}{dx} + \left(1-y^2\right) = 0$$

ఇది $\frac{dy}{dx}$ లో ఒక బహుపదీయ సమీకరణం $\frac{dy}{dx}$ యొక్క గరిష్ఠ తరుగతి 2. అందువల్ల పై అవకలన సమీకరణం యొక్క తరగతి 2.

ఉదాహరణకు 2. $a\,\frac{d^2y}{dx^2} = \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}$

$$\Rightarrow a^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3$$

ఇది $\frac{d^2y}{dx^2}$ లో ఒక బహుపదీయ సమీకరణం $\frac{d^2y}{dx^2}$ యొక్క గరిష్ఠ తరగతి 2. కాబట్టి పై అవకలన సమీకరణం యొక్క తరగతి 2.

ఉదాహరణకు 3. $a\,\frac{d^2y}{dx^2} = \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}$

$$\Rightarrow a^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3$$

ఇది $\frac{d^2y}{dx^2}$ లో ఒక బహుపదీయ సమీకరణం $\frac{d^2y}{dx^2}$ యొక్క గరిష్ఠ తరగతి 2. కాబట్టి పై అవకలన సమీకరణం యొక్క తరగతి 2.

7.3 అవకలన సమీకరణం యొక్క సాధారణ సాధన:

నిర్వచనము: $F\left(x, y, y^1, y^2, ..., y^{(n)}\right)=0$ అనేది n వ పరిమాణం గల ఒక అవకలన సమీకరణం అనుకోండి. $c_1, c_2, \ldots c_n$ లు n స్వతంత్ర్య యాదృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్యలు అయితే ఇచ్చిన అవకలన సమీకరణానికి $\phi\left(x, y, c_1, c_2, ..., c_n\right)=0$ ఒక సాధన అయితే, అపుడు దానిని ఇచ్చిన అవకలన సమీకరణానికి సాధారణ సాధన అని అంటారు.

ఉదా: యాదృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్యలు, a, b, c లను తొలగించి, $y=ae^x+be^{2x}+ce^{3z}$ సాధనగా గల అవకలన సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: ఇచ్చిన సమీకరణము.

$$y=ae^x+be^{2x}+ce^{3z} \qquad (1)$$

(1) ని x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా,

$$y^1=ae^x+2be^{2z}+3ce^{3z}$$

$$=y+be^{2z}+2ce^{3z} \qquad \text{[(1) నుంచి]}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{^\$•¼(2) J=H• \#OKí† Çê} \\ y^{11}-y^1 = 2be^{2z} + 6ce^{3z} \\ =2\left(be^{2x}+2ce^{3z}\right)+2ce^{3z} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad y^1 - y = be^{2x} + 2ce^{3x} \qquad (2)$$

x దృష్ట్యా (2) ని అవకలనం చేయగా

$$y^{11}-y^1 = 2be^{2x}+6ce^{3x}$$

$$=2\left(be^{2x}+2ce^{3x}\right)+2ce^{3z}$$

$$=2\left(y^1-y\right)+2ce^{3z} \qquad \text{[(2) నుంచి]}$$

$$\Rightarrow y^{11}-3y^1+2y = 2ce^{3x} \;......................................(3)$$

x దృష్ట్యా (3)ని అవకలనం చేయగా,

$$y^{11}-3y^1+2y^1 = 6ce^{3z} = 3\left(2c\, e^{3x}\right)$$

$$=3\left(y^{11}-3y^{11}+2y\right)$$ [(3) నుంచి]

$\therefore$ కావాలసిన అవకలన సమీకరణం

$$y^{111}-6y^{11}+11y^{1}-6y=0$$

ఉదా : a,b యాదృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్యలను తొలగించి, $x,y=ae^{x}+be^{-x}+x^{2}$ సాధనగా గల అవకలన సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణం

$$xy=ae^{x}+be^{-x}+x^{2}$$

$$xy-x^{2}=ae^{x}+be^{-x} \qquad (1)$$

x దృష్ట్యా (1) ని అవకలనం చేయగా,

$$xy^{1}+y-2x=ae^{z}-be^{-x}$$

x దృష్ట్యా మళ్ళీ అవకలనం చేయగా

$$xy^{11}+y^{1}+y^{1}-2=ae^{x}+be^{-x}$$

$$\Rightarrow xy^{11}+2y^{1}-2=xy-x^{2}$$ [(1) నుంచి]

$\therefore$ కావలసిన అవకలన సమీకరణం :

$$xy^{11}+2y^{1}-xy+x^{2}-2=0$$

ఉదా: $y^{11}-4y^{1}+4y=0$ అనే అవకలన సమీకరణం యొక్క సాధన $y=ae^{2x}+bxe^{2x}$ అని చూపండి. ఇక్కడ a,b లు యాదృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్యలు.

సాధన : ఇచ్చన అవకలన సమీకరణము.

$$: \; y^{11}-4y^{1}+4y=0 \qquad (1)$$

ఇపుడు $y=ae^{2x}+bxe^{2z}$

$$=(a+bx)c^{2x}$$

$$\Rightarrow y^{11}=(a+bx)2e^{2x}+be^{2x}$$

$$\Rightarrow y^{11}=(a+bx)4e^{2x}+2be^{2z}+2be^{2x}$$

$$=4(a+bx)e^{2x}$$

y, y^1, y^{11} ల విలువలను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా,

$$y^{11} - 4y^1 + 4y = 4(a+bx)e^{2x} + 4be^{2x} - 8(a+bx)e^{2x} - 4be^{2x} + 4(a+bx)e^{2x}$$

$$= 8(a+bx)e^{2x} + 4be^{2x} - 8(8+bx)e^{2x} - 4be^{2x} + 4(a+bx)e^{2x}$$

$$= (a+bx)e^{2x} - 8(a+bx)e^{2x} + 4be^{2x} - 4be^{2x}$$

= 0 (x యొక్క అన్ని వాస్తవ విలువలకు)

$\therefore y^{11} - 4y^1 + 4y = 0$ యొక్క సాధన $y = ae^{2x} + bxe^{2x}$

7.4 ప్రథమ తరగతి మరియు ప్రథమ పరిమాణపు అవకలన సమీకరణాలు:

$\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ రూపంలో ఉన్న ఒక సమీకరణాన్ని ప్రథమ తరగతి మరియు ప్రథమ పరిమాణ అవకలన సమీకరణమని అంటారు.

$\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ ని సాధించడానికి క్రింద ఇచ్చిన నాలుగు పద్ధతులను చర్చిస్తాము.

1. విభజనీయ చలరాశులు (variable reparable)
2. సమఘాతీయ (Homogeneous) అవకలన సమీకరణాలు మరియు సమఘాతీయ రూపంలోకి మార్చగలిగే సమీకరణాలు
3. యధార్థ(Exact) అవకలన సమీకరణాలు మరియు సమాకలన గుణకాలను ఉపయోగించి యధార్థ సమీకరణాలుగా మార్చగల్గినవి.
4. ఏకఘాతీయ(Linear) సమీకరణాలు మరియు బెర్నూలీ రూపము.

7.4.1 విభజనీయ చలరాశులు: ఏకైక చలరాశిలో f, g లు అవిచ్ఛన్న ప్రమేయాలుగా ఉంటూ $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ అవకలన సమీకరణాన్ని $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f(x)}{g(y)}$ లేదా $g(y)dy = f(x)dx$ లేదా $f(x)dx - g(y)dy = 0$ రూపంలో వ్రాయగల్గినప్పుడు ఆ అవకలన సమీకరణాన్ని విభజనీయ చలరాశుల రూపంలో ఉన్నదని అంటారు. (1) ని సమాకలనం చేయగా, సాధరణ సాధన

$\int f(x)dx - \int g(y)dy = c$, ఇక్కడ c యాధృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్య

ఉదా : 1. $\dfrac{dy}{dx} + \sqrt{\left(\dfrac{1-y^2}{1-x^2}\right)} = 0$ ను సాధించండి.

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణం $\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$ (1)

చలరాశులను వేరు చేయగా $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

సమాకలనం చేయగా $\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = c$

ఇక్కడ c యాదృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్య

$\Rightarrow \sin^{-1} y + \sin^{-1} x = c$

ఉదా : $y - x\frac{dy}{dx} = a\left(y^2 + \frac{dy}{dx}\right)$ ని సాధించండి.

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణం

$$y - x\frac{dy}{dx} = a\left(y^2 + \frac{dy}{dx}\right) \qquad (1)$$

$$\Rightarrow (a+x)\frac{dy}{dx} = y - a^2$$

చలరాశులను విభజన చేయగా

$$\frac{1}{y-ay^2}\, dy = \frac{1}{a+x} dx$$

సమాకలనం చేయగా, $\int \frac{1}{y(1-ay)} dy = \int \frac{1}{a+x} dx + c$

$$\Rightarrow \int\left(\frac{1}{y} + \frac{a}{1-ay}\right) dy = \int \frac{1}{a+x} dx + c$$

$$\Rightarrow \log|y| - \log|(1-ay)| = \log|a+x| + \log c$$

$$\Rightarrow \log\left|\frac{y}{1-ay}\right| = \log|c(a+x)|$$

$$\Rightarrow \frac{y}{1-ay} = c(a+x)$$

$\therefore$ (1) యొక్క సాధారణ సాధన :

$$y = c(a+x)(1-ay)$$

7.5 సమఘాతీయ అవకలన సమీకరణాలు:

సమఘాతీయ ప్రమేయాలు:

నిర్వచనం: n స్థిర సంఖ్యగా ఉంటూ k యొక్క అన్ని విలువలకు $f(kx, ky) = k^n \ f(x, y)$ అయితే, అపుడు $f(x, y)$ ప్రమేయాన్ని x, y లలో nవ తరగతి సమఘాతీయ ప్రమేయాన్ని అంటారు.

ఉదా : 1. $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}$ అనుకొండి.

$$f(kx, \ ky) = \frac{k^2 x^2 + k^2 y^2}{k^3 x^3 + k^3 y^3}$$

$$= \frac{1}{k} \frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3} = k^{-1} \ f(x, y)$$

$\therefore f(x, y)$ సమఘాతీయ ప్రమేయము. దీని తరగతి -1.

ఉదా : 2 $f(x, y) = \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}{x+y}$ అనుకోండి.

ఇపుడు $f(kx, ky) = \frac{\sqrt[3]{kx} + \sqrt[3]{ky}}{kx + ky} = \frac{k^{\frac{1}{3}}\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}\right)}{k(x+y)}$

$$= k^{-2/3} \ \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}{k(x+y)} = k^{-2/3} \ f(x, y)$$

$\therefore f(x, y)$ ఒక $\frac{-2}{3}$ తరగతి సమఘాతీయ ప్రమేయము.

ఉదా : $f(x,y)=\dfrac{y^2+x^2\, e^{-x/y}}{x+y}$ అనుకోండి.

ఇపుడు $f(kx,\, ky)=\dfrac{k^2y^2+k^2x^2\, e^{-kx/ky}}{kx+ky}$

$$=k\left(\frac{y^2+x^2\, e^{-x/y}}{kx+ky}\right)=k\ f(x,y)$$

$\therefore f(x,y)$ ప్రథమ తరగతి సమఘాతీయ సమీకరణము.

7.6 యదార్థ అవకలన సమీకరణాలు:

1. $xy=c$ ను తీసుకోండి. x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా $x\dfrac{dy}{dx}+y=0$

2. $\dfrac{x}{y}=c$ ను తీసుకోండి. x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా $x\dfrac{dy}{dx}-y=0$

పై ఉదాహరణలలో, అవకలనం చేయగానే అవకలన సమీకరణాలు వచ్చాయి. అటువంటి అవకలన సమీకరణాలను యదార్థ సమీకరణాలని అంటారు.

ఉదా : 1 నుంచి $x\dfrac{dy}{dx}+y=0$

$$\Rightarrow x\,dy+y\,dx=0\Rightarrow d(xy)=0$$

$\therefore$ దాని సాధన : $xy=c,$

అదే విధంగా, (2), ఉదాహరణలోని అవకలన సమీకరణాలను $d\left(\dfrac{x}{y}\right)=0,\ d\left(e^x\cos y\right)=0$ గా వ్రాయవచ్చు.

వాటి సాధనాలు వరుసగా $\dfrac{x}{y}=c_2$

ఆ విధంగా ఒక అవకలన సమీకరణాన్ని $d\left[\,f(x,y)\right]=0$ గా వ్రాయగల్గితే, దాని సాధన $f(x,y)=c$.

ఉదా : $2xy\,dx+x^2\,dy=0$ ఒక యదార్థ సమీకరణం ఎందుకంటే,

$d\left(x^2\,y\right)=\dfrac{d}{dx}\left(x^2\,y\right)dx+\dfrac{d}{dy}\left(x^2\,y\right)dy$ అనగా $d\left(x^2y\right)=2xy\,dx+x^2\,dy$ అయ్యేటట్లు $x^2\,y$ ప్రమేయం వ్యవస్థీతమవుతుంది.

ఉదా : $x\,dx+y\,dy=0$ ఒక యాదృచ్ఛిక సమీకరణము ఎందుకంటే

$d\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)dx+\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)dy$ అనగా $d\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)=x\,dx+y\,dy$ అయ్యేటట్లు $\dfrac{x^2+y^2}{2}$ ప్రమేయం వ్యవస్థితమవుతుంది.

7.7 ప్రథమ పరిమాణ ఏకఘాతీయ అవకలన సమీకరణాలు:

అంతరము I పై నిర్వచితమైన ప్రమేయాలు $p(x), Q(x)$ అయితే, $\dfrac{dy}{dx}+p(x), y=Q(x)$ రూపంలో ఉన్న సమీకరణాన్ని y లో ప్రథమ పరిమాణ ఏకఘాతీయ అవకలన సమీకరణము అని అంటారు.

I లో x యొక్క అన్ని విలువలకు $Q(x)=0$ అయితే, అపుడు $\dfrac{dy}{dx}+p(x)\;y\;=\;Q(x)$ రూపంలో ఉన్న సమీకరణాన్ని y లో ప్రథమ పరిమాణ ఏకఘాతీయ అవకలన సమీకరణము అని అంటారు.

I లో x యొక్క అన్ని విలువలకు $Q(x)=0$ అయితే, అపుడు $\dfrac{dy}{dx}+p(x).\,y=Q(x)$ ను ప్రథమ పరిమాణ ఏక అసమఘాతీయ అని అంటారు.

ఉదా : $\left(1-x^2\right)\dfrac{dy}{dx}+2xy=x\sqrt{1-x^2}$ ను సాధించండి.

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణము $\left(1-x^2\right)\dfrac{dy}{dx}+2xy=x\sqrt{1-x^2}$ (1)

$\left(1-x^2\right)$ తో భాగించగా $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2x}{1-x}2y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (2)

ఇది y లో ప్రథమ పరిమాణ ఏకఘాతీయ సమీకరణము, ఇక్కడ $P=\dfrac{2x}{1-x^2}, Q=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int p\,dx = \int \frac{2x}{1-x^2}\,dx = -\log\left|\left(1-x^2\right)\right| = \log\left|\left(1-x^2\right)^{-1}\right|$$

$$\therefore\ If\ = \partial^{!p\,dx} = e^{\log\left|\left(1-x^2\right)^{-2}\right|} = \left(1-x^2\right)^{-1} = \frac{1}{1-x^2}$$

$\dfrac{1}{1-x^2}$ తో (1)ని గుణించగా,

$$\frac{1}{1-x^2}\left[\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1-x^2}\ y\right] = \frac{x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}} \qquad (3)$$

(3) ఈ క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చు.

$$\frac{d}{dx}\left[y.\frac{1}{1-x^2}\right] = \frac{x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}} \quad \Rightarrow \int \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{1-x^2}\right)^{dx} = \int \frac{x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{y}{1-x^2} = \int \frac{x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}\,dx$$

$1-x^2 = t$ అనుకోండి. $\Rightarrow x\,dx = -\dfrac{1}{2}dt$

$$\therefore \frac{y}{1-x^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{t}} + c$$

$\therefore$ (1) యొక్క సాధారణ సాధన :

$$y = \sqrt{1-x^2} + c\left(1-x^2\right)$$

ఉదా : మూల బిందువు గుండా పోతూ, $\left(1-x^2\right)\dfrac{dy}{dx} + 2xy - 4x^2 = 0$ అవకలన సమీకరణాన్ని తృప్తిపరిచే, వక్రం యొక్క సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణము

$$\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx} + 2xy - 4x^2 = 0 \qquad (1)$$

$\left(1+x^2\right)$తో భాగించగా, $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2x}{1+x^2}\,y=\dfrac{4x^2}{1+x^2}$ (2)

ఇది y లో ప్రథమ పరిమాణ ఏకఘాతీయ సమీకరణం. ఇక్కడ $P=\dfrac{2x}{1+x^2}$, $Q=\dfrac{4x^2}{1+x^2}$

$$\int P\,dx=\int\frac{2x}{1+x^2}\,dx=\log\left|\left(1+x^2\right)\right|$$

$$\therefore I.F.=\exp\int P\,dx=\exp\left(\log\left|\left(1+x^2\right)\right|\right)=1+x^2$$

$\left(1+x^2\right)$తో (2)ను గుణించగా

$$\left(1+x^2\right)\left[\frac{dy}{dx}+\frac{2x}{1+x^2}\,y\right]=\left(1+x^2\right)\frac{4x^2}{1+x^2}$$

$\Rightarrow\dfrac{d}{dx}\left[y\left(1+x^2\right)\right]=4x^2$, సమాకలనం చేయగా $\Rightarrow y\left(1+x^2\right)=\int 4x^2\,dx=\dfrac{4x^3}{3}+c$

$\therefore$(1) యొక్క సాధారణ సాధన : $y\left(1+x^2\right)=\dfrac{4x^3}{3}+c$ మూల బిందువు (0, 0) గుండా వక్రం పోతుంది. కాబట్టి $o=o+c\Rightarrow c=o$

$\therefore$ కావాలసిన వక్రరేఖ సమీకరణం : $3y\left(1+x^2\right)=4x^3$

7.8 బెర్నూలీ సమీకరణం:

nఒక వాస్తవ సంఖ్య మరియు అంతరం I పై P,Qలు xలో అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయాలయితే, $\dfrac{dy}{dx}+py=Qy^n$ రూపంలో ఉన్న సమీకరణాన్ని బెర్నూలీ సమీకరణం అని అంటారు.

ఉదా : $z>0,\ x>0$ అయితే $\dfrac{dz}{dx}+\dfrac{z}{x}\log z=\dfrac{z}{x^2}\left(\log z\right)^2$ ను సాధించండి.

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణం $\dfrac{dz}{dx}+\dfrac{z}{x}\log z=\dfrac{z}{x^2}\left(\log z\right)^2$ (1)

ఇది బెర్నూలీ సమీకరణము

$z^{=1}(\log z)^{-2}$ తో (1) గుణించగా : $z^{-1}(\log z)^{-2}\dfrac{dz}{dx}+\dfrac{(\log z)^{-1}}{x}=\dfrac{1}{x^3}$ (2)

$(\log z)^{-1}=u$ అనుకోండి.

$\Rightarrow z^{-1}(\log z)^{-2}\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{dy}{dx}$ (3)

(2), (3) ల నుంచి : $-\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{u}{x}=\dfrac{l}{x^2}\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{u}{x}=-\dfrac{1}{x^2}$ (4)

ఇది u లో ఏకఘాతీయ సమీకరణము.

$I.F.=e^{\int-\left(\frac{1}{x}\right)dx}=e^{-\log|x|}=e^{\log|x|^{-1}}=\dfrac{1}{x}$

(4) యొక్క సాధారణ సాధన : $u\left(\dfrac{1}{x}\right)=\int\dfrac{-1}{x^2}\left(\dfrac{1}{x}\right)dx\Rightarrow\dfrac{u}{x}=\dfrac{1}{2x^2}+c$ (5)

(5)లో $u=(\log z)^{-1}$ను ప్రతిక్షేపించగా, (1) యొక్క సాధారణ సాధన : $\dfrac{1}{x\log|z|}=\dfrac{1}{2x^2}+c$

ఉదా 3 : $\left(x^3y^3+xy\right)\dfrac{dy}{dx}=1$ ని సాధించండి.

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణము $\left(x^3y^3+xy\right)\dfrac{dy}{dx}=1$ (1)

దీనిని $\dfrac{dx}{dy}=x^2y^3+xy$ లేదా $\dfrac{dx}{dy}-xy=x^2y^3$ (2) గా వ్రాయవచ్చు.

x^2 తో (2)ను గుణించగా

$x^{-2}\dfrac{dx}{dy}-x^1y=y^3$ (3)

$x^{-1}=u$ అనుకోండి. $\Rightarrow x^{-2}\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{du}{dy}$............................(4) (5)

3,4 నుండి $-\dfrac{du}{dy}=uy=y^3\Rightarrow\dfrac{du}{dy}+uy=-y^3$ ....(5)

ఇది u లో ఏకఘాతీయ సమీకరణము. $I.F. = e^{\int y\,dy} = e^{y^2/2}$

(5) యొక్క సాధారణ సాధన : $V\,e^{y^2/2} = \int y^3.e^{y^2/2}\,dy = -2\left(\frac{y^2}{2}-1\right)c^{y^2/2} + c$ (6)

(6) లో $u = \frac{1}{x}$ ను ప్రతిక్షేపించగా (1) యొక్క సాధారణ సాధన :

$$\frac{1}{x}e^{y^2/2} = \left(2-y^2\right)e^{y^2/2} + c \Rightarrow x\left(2-y^2\right) + c\,x\,e^{-y^2/2} = 1$$

$P = \frac{dy}{dx}$ ప్రతి క్షేపణతో ప్రథమ పరిమాణ, ప్రథమ తరగతిలోనకిఇ మార్చదగిన సమీకరణాలు నేరుగా(తిన్నగా) y లేనటువంటి $f\left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, x\right) = 0$ అవకలన సమీకరణాన్ని తీసుకోండి.

$\frac{dy}{dx} = p$ తీసుకొని, పై సమీకరణాన్ని, ప్రథమ పరిమాణము, ప్రథమ తరగతిగా ఉన్న $F\left(\frac{dp}{dx}, p, x\right) = 0$ లోకి మార్చవచ్చు.

ఉదా : 1. $x.\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 1 = 0$ సాధించండి.

సాధన : $\frac{dy}{dx} = p$ అనుకోండి $\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$ $\therefore$ ఇచ్చిన సమీకరణము $x\frac{dp}{dx} + p + 1 = 0$ రూపాన్ని తీసుకుంటుంది.

$$\Rightarrow x\,\frac{dp}{dx} + p + 1 = -\left(p+1\right)$$ చలరాశులను విభజన చేయగా

$$\frac{1}{p+1}\,dp = \frac{1}{x}dx \Rightarrow \int \frac{1}{p+1}dp = -\int \frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow \log\left(p+1\right) = \log\left(\frac{c}{x}\right)$$

$$\therefore\ p+1 = \frac{c}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{c}{x} - 1$$

$dy = \left(\frac{c}{x}-1\right)dx,$ సమాకలనం చేయగా

సాధారణ సాధన : $y=c \log x-x+c$

7.9 ప్రథమ పరిమాణము కాని ఒకటి కంటే ఎక్కువ తరగతి ఉన్న అవకలన సమీకరణాలు :

ఇంతవరకు మనము ప్రథమ తరగతి, ప్రథమ పరిమాణపు అవకలన సమీకరణాలను చర్చించుదాము. ఈ అధ్యాయంలో మనము ప్రథమ పరిమాణము, కాని $\frac{dy}{dx}$ యొక్క ఘాతము ఒకటి కంటే ఎక్కువగా ఉన్న అవకలన సమీకరణాలను చర్చిస్తాము. సౌలభ్యం కోసం $\frac{dy}{dx}=P$ అని వ్రాస్తాము.

P యొక్క ఘాతము ఒకటి కంటే ఎక్కువగా ఉన్నపుడు, $f(x,y,p)=0$ రూపంలో ఉన్న సమీకరణాన్ని, ప్రథమ పరిమాణము, మొదటి ఘాతము లేనటువంటి అవకలన సమీకరణం అని అంటారు.

$p^n + p^1(x,y)\,p^{n-1} + \ldots.. + p_{n-1}(x,y)\,p + p_n(x,y)=0$ రూపంలో ఉన్న సమీకరణాన్ని $n(>1)$వ తరగతి (ఘాతము) మరియు ప్రథమ పరిమాణ సాధారణ సమీకరణం అని అంటారు.

p ను విడదీయదగిన సమీకరణాలు: ప్రథమ పరిమాణము $n(>1)$వ ఘాతము (తరగతి)లో ఉన్న సమీకరణాన్ని $f(x,y,p)=0$ అనుకోండి (1)

(1)ని $p^n + p^1(x,y)\,p^{n-1} + \ldots.. + p_{n-1}(x,y) = 0$ గా వ్రాయవచ్చు. (2) ను p కోసం సాధిస్తే n సాధనాలను

$p=f_1(x,y), p=f_2(x,y),\ldots\ldots, p=f_n(x,y)$ (3) అనుకోండి.

$\left[p-f_1(x,y)\right]\left[p-f_2(x,y)\right],\ldots\ldots,\left[p-f_n(x,y)\right]=0$ (4) రూపంలో (2) వ్రాయగలము.

(3) లోని ప్రతి సమీకరణాన్ని సాధిస్తే n సమీకరణాలను వరుసగా

$F_1(x,y,c_1)=0,\ F_2(x,y,c_2)=0\ldots\ldots..F_n(x,y,c_n)=0$ n సాధనలు వస్తాయి.

ప్రతి ఒక్క i కు, $P=f_i(x,y)$ యొక్క సాధన $F_i(x,y,C_n)=0$ కాబట్టి $F_i(x,y,C_n)=0$ అనేది (4) యొక్క సాధన కూడా అవుతుంది.

$\therefore$(1) యొక్క సాధన : $F_1(x,y,c_1).\ F_2(x,y,c_2)\ldots.F_n(x,y,c_n)=0$

(1) ప్రథమ పరిమాణ సమీకరణం కాబట్టి, (1) యొక్క సాధారణ సాధనతో ఒక యాదృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్య మాత్రమే ఉండాలి.

$c_1 = c_2 = . = c_n = c$ గా తీసుకుంటే, (1) యొక్క సాధారణ సాధన :

$\therefore$(1) యొక్క సాధన : $F_1\left(x, y, c\right).\ F_2\left(x, y, c\right)\ldots .F_n\left(x, y, c\right) = 0$

ఉదా : $4y^2\ p^2 + 2xy\left(3x+1\right)p + 3x^3 = 0$ ను సాధించండి.

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణం $4y^2\ p^2 + 2xy\left(3x+1\right)p + 3x^3 = 0$ (1)

p కోసం సాధించగా $4y^2\ p^2 + 6x^2y\ p + 2xy\ p + 3x^3 = 0$

$$\Rightarrow 2yp\left(2yp + 3x^2\right) + x\left(2yp + 3x^2\right) = 0$$

$$\left(2yp + 3x^2\right)\left(2yp + x\right) = 0$$

$$\Rightarrow p = \frac{-3x^2}{2y} \quad (2)$$

$$\Rightarrow p = \frac{-x}{2y} \quad (3)$$

(2) ను సాధిస్తే : $2y\,dy = -3x^2\,dx$ సమాకలనం చేయగా $y^2 + x^3 + c = 0$

(3)ను సాధిస్తే $2ydy = -x \cdot dx$ సంకలనం చేయగా $2y^2 + x^2 + c = 0$

(2), (3) ల సాధనలు $y^2 + x^3 + c = 0$ మరియు $2y^2 + x^2 + c = 0$

(1) యొక్క సాధారణ సాధన $\left(y^2 + x^3 + c\right)\left(2y^2 + x^2 + c\right) = 0$

ఉదా 3 : $xyp^2 + \left(x^2 + xy + y^2\right)p + \left(x^2 + xy\right) = 0$ ను సాధించండి.

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణం $xyp^2 + \left(x^2 + xy + y^2\right)p + \left(x^2 + xy\right) = 0$ (1)

$$\Rightarrow xyp^2 + x^2\ p + xy\ p + x^2 + y^2\ p + xy = 0$$

$$\Rightarrow xp\left(yp + x\right)x + x\left(yp + x\right) + y\left(yp + x\right) = 0$$

$$\left(yp + x\right)\left(xp + x + y\right) = 0$$

$\Rightarrow yp + x = 0$ (2)

$xp + y + x = 0$ (3)

(2)ను సాధించగా $y.\dfrac{dy}{dx} + x = 0 \Rightarrow y\,dy + x\,dx = 0$

సమాకలనం చేయగా, $\dfrac{y^2}{2} + \dfrac{x^2}{2} = C_1 \Rightarrow x^2 + y^2 = c$

(3) ను సాధించగా $x\dfrac{dy}{dx} + y + x = 0 \Rightarrow x\,dy + y\,dx + x\,dx = 0$

$\Rightarrow d\left(x, y\right) + x\,dx = 0$

సమాకలనం చేయగా, $xy + \dfrac{x^2}{2} = C_1 \Rightarrow 2xy + x^2 = c$

$\therefore$ (2), (3) ల సాధనలు వరుసగా, $x^2 + y^2 - c = 0,\ 2xy + x^2 - c = 0$,

$\therefore$ (1) యొక్క సాధారణ సాధన

$$\left(x^2 + y^2 - c\right)\left(2xy + x^2 - c\right) = 0$$

7.10 అభ్యాసం:

1. $\dfrac{dy}{dx} = a.e^y$ అవకలన సమీకరణాన్ని సాధించండి.

$$\frac{dy}{dx} = a.dx$$

$$\int \frac{dy}{e^y} = \int a.dx$$

$$ax = \int e^{-y}\,dy = -e^{-y} + c$$

ఉదా : 2 $y\left(1 - x\right) - x\dfrac{dy}{dx} = 0$ యొక్క అవకలన సమీకరణాన్ని సాధించండి.

$$y\left(1 - x\right) - x\frac{dy}{dx} = 0$$

$$y(1-x)\,dx = x\,dy$$

$$\frac{(1-x)}{x}\,dx = \frac{dy}{y}$$

$$i.e.\left(\frac{1}{x}-1\right)dx = \frac{1}{y}\,dy$$

$$\int\left(\frac{1}{x}-1\right)dx = \int\frac{1}{y}\,dy$$

$$\log x - x = \log y + c$$

$$\log x - \log y = c + x$$

$$\log\frac{x}{y} = c + x \;\; or,\; \frac{x}{y} = e^{c} + x$$

$$\frac{y}{x} = e^{-(c+x)}, \quad y = x\,e^{-(c+x)}$$

$$y = x.e^{-x}.e^{-c}$$

$$y = A.x\,e^{-x} \;\; \left(e^{-c} = A\right)$$

$$\left(\frac{1-x}{x}\right)dx = \frac{dy}{y}$$

ఉదా : 3 $\left(\dfrac{1+x^2}{1+y}\right) = xy\dfrac{dy}{dx}$ అవకలన సమీకరణాన్ని సాధించండి.

$$\frac{\left(1+x^2\right)}{x}dx = y\left(1+y\right)dy$$

$$\therefore \int\frac{1+x^2}{x}\,dx = \int\left(y+y^2\right)dy$$

$$\log x + \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + c$$

ఉదా : 4 $\left(x^2 - y\,x^2\right)dy + \left(y^2 + xy^2\right)$

$$x^2\left(1-y\right)dy + y^2\left(1+x\right)dx = 0$$

$$x^2\left(1-y\right)dy = -\,y^2\left(1+x\right)dx$$

$$\therefore \int\left(\frac{1-y}{y^2}\right)dy = -\int\frac{1+x}{x^2}dx$$

$$\log x - \log y - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = c$$

$$\log\frac{x}{y} - \left(\frac{x+y}{xy}\right) = c$$

ఉదా : 5 $\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2\,e^{-y}$

$$\frac{dy}{dx} = e^x\ e^{-y} + x^2 .\, e^{-y}$$

లేక $\dfrac{dy}{dx} = e^{-y}\left(e^x + x^2\right)$

$$\therefore \int\frac{dy}{e^{-y}} = \int\left(e^x + x^2\right)dx$$

$$i.e. e^y - e^x - \frac{x^3}{3} = c$$

ఉదా : 6 $\left(x+y\right) + \left(y-x\right)\dfrac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x+y}{y-x} = 0 \qquad or; \qquad \frac{dy}{dx} + \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}\right)-1} = 0$$

$y = V.x$ మరియు $dy = v\,dx + x\,dv$

$$\therefore (x+y)\,dx+(y-x)\,dy=0$$

$$\therefore (x+Vx)\ dx+(Vx-x)\ (V\,dx+x\,dV)=0$$

లేక $(1+v)\,dx-(1-v)(v\,dx+x\,dv)=0$

$$(1+v)\,dx-(1-v)\,v.dx-(1-v)\,x\ dv=0$$

$$dx\left[1+v-v+v^2\right]-(1-v)\,x.\ dv=0$$

$$\left(1+v^2\right)\ dx\ =(1-v)\,x.dv$$

$$\frac{dx}{x}=\left(\frac{1-v}{1+v^2}\right)dv$$

$$\frac{dx}{x}\ \left(\frac{1}{1+v^2}-\frac{v}{1+v^2}\right)\ dv$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x}=\int \frac{1}{1+v^2}\ dv\ -\int \frac{v}{1+v^2}\,dv$$

$$\log x=Tan^{-1}v-\frac{1}{2}\log\left(1+v^2\right)+c$$

$v=\dfrac{y}{x}$ ను ప్రతిక్షేపించగా

$$y-x=(y+x)\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{y+x}$$

$y=Vx$ వ్రాయగా

$$\frac{dy}{dx}=V+x.\ \frac{dv}{dx}$$

y మరియు $\dfrac{dy}{dx}$ ని ప్రతిక్షేపించగా

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{vx - x}{vx + x} = \frac{v-1}{v+1}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v-1}{v+1} - v = -\left(\frac{v^2+1}{v+1}\right)$$

$$\left(\frac{v+1}{v^2+1}\right)dv = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{v+1}{v^2+1}dv = -\int \frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{v}{v^2+1}dv + \int \frac{1}{v^2+1}dv = -\int \frac{1}{x}x$$

$$\frac{1}{2}\log\left(v^2+1\right) + \tan^{-1}V = -\log x + c$$

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right) + \tan^{-1}\frac{y}{x} = -\log x + c$$

$$\frac{1}{2}\left[\log\left(x^2+y^2\right) - \log x^2\right] + \log x + Tan^{-1}\frac{y}{x} = c$$

$$\frac{1}{2}\log\left(x^2+y^2\right) + \tan^{-1}\frac{y}{x} = c$$

ఉదా : 7 $\frac{dy}{dx} + xy = x$

$Here\ \ P = x,\ Q = 2$

$\therefore$ ఇక్కడ $I.F.\ e^{\int pdx} = e^{\int x\,dx} = e^{x^2/2}$

$$y.e^{x^2/2} = \int x\, e^{x^2/2}\, dx$$

కాని $\int x\, e^{x^2/2}\, dx = \int e^t\, dt \qquad \left(But\ \frac{x^2}{2} = t\right)$

$$= e^t + c$$

$$e^{x^2/2} + c$$

$$y e^{x/2} = e^{x^2/2} + c$$

$$or,\ y = \frac{e^{x^2/2} + c}{e^{x^2/2}} = 1 + C e^{-x^2/2}$$

ఉదా : 8 $\left(x^2 y^3 + xy\right) dy = dx$

$$\frac{dy}{dx} - xy = x^2 y^3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} + P.x = Q y^n$$

$$\frac{1}{y^n} \frac{dy}{dx} + \frac{p}{y^n}.y = Q$$

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + y^{1-n}\ P = Q$$

$$P = \lambda \qquad \left(i.e.\ y^{1-n}\right)$$

$$\frac{dx}{dy} - xy = x^2 y^3$$

$$\frac{1}{x^2} \frac{dx}{dy} - \frac{x}{x^2} y = y^3$$

$\frac{1}{x} = \lambda$ వ్రాయగా

$$-\frac{1}{x^2} \frac{dx}{dy} = \frac{d\lambda}{dy}$$

$$-\frac{d\lambda}{dy} - \lambda y = y^3$$

$$i.e. \frac{d\lambda}{dy} - \lambda y = -y^3,$$

$p = y$ మరియు $Q = -y^3$ వ్రాయగా

$$I.F. = e^{\int p\,dy} = e^{\int y\,dy} = e^{y^2/2}$$

$$\lambda .\, e^{y^2/2} = \int e^{y/2} . \left(-y^3\right) dy + c$$

$$= -\int 2e^t . \, t \; dt + c \qquad \left[\frac{y^2}{2} = t\right] \text{వ్రాయగా}$$

$$= 2\left[t.e^t - \int 1.\, e^t\right] + c$$

$$-2te^t - 2e^t + c$$

$$= -2te^{+} - 2e^{+} + c$$

$$\therefore \frac{1}{x} e^{y^2/2} = -2\frac{y^2}{2} e^{y^2/2} + 2e^{y^2/2} + c$$

$$or \; \frac{1}{x} = -y^2 + 2 + c : e^{-y^2/2}$$

7.11 మాదిరి ప్రశ్నలు:

1. అవకలన సమీకరణము అనగా నేమి ? వాటి యొక్క ఉపయోగములను వివరింపుము ?
2. వివిధ రకములైన అవకలన సమీకరణములను వివరింపుము.
3. $\dfrac{dy}{dx} + \sqrt{\dfrac{1+y^2}{1+x^2}} = 0$
4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+x^2}{y-y^2}$
5. $\sqrt{1-x^2}\, \sin^{-1} x \; dy + y \; dx = 0$

6. $y - x\dfrac{dy}{dx} = 3\left(1 + x^2 \dfrac{dy}{dx}\right)$

7.12 సంప్రదించవలసిన గ్రంథాలు:

1. A.C. Ching - Fundamental methods of Mathematical Economics, MC Graw Hill, Second Edition.
2. Allen, R.G.D. mathmatical Analysis for Economics, Mac Million & Co. Ltd.,
3. Yamane . T - Mathematics for Economists, Printice Hall Inc.

పాఠం 8

మాత్రికలు - నిర్ధారకాలు

విషయ క్రమం

8.0 ఉద్దేశ్యాలు:

చాలా సందర్భాలలో ఒక దత్తాంశాన్ని సంక్షిప్తంగా ఒక పట్టిక రూపంలో పొందుపరచుకోవటంలో ఎంతో సౌలభ్యం ఉంటుంది. ఈ విధంగా పొందుపరచిన తరువాత, అటువంటి పట్టికలతో తదుపరి విశ్లేషణను కొనసాగించటం సులువు అవుతుంది. అందుచేత అటువంటి పట్టికలను అధ్యయనం చేయటం చాలా అవసరం. ఆ పట్టికలను మాత్రికలు అంటారు. ఈ భాగం ముఖ్య ఉద్దేశ్యం "మాత్రిక" అనే భావనను ప్రవేశ పెట్టి మాత్రిక ధర్మాలను పరిశీలించటం. మాత్రికకు సంబంధించిన మరొక భావన "నిర్ధారకం".

ఈ నిర్ధారకాలు మాత్రికకు విలోమం కనుగొనటానికి, కొన్ని సమీకరణాలను సాధించటానికి ఉపయోగపడతాయి. అర్థశాస్త్రంలో చాలా చర్చలలో మాత్రిక విలోమం, సమీకరణాల సాధన మనకు సందర్భపడుతూ ఉంటాయి. అందుచేత, నిర్ధారకాల గురించి తెలుసుకోవటం చాలా అవసరం. ఈ నిర్ధారకాల చర్చను కూడా ఈ భాగంలో ప్రవేశపెడదాం.

8.1 పరిచయం:

ఒక ఉత్పత్తిదారుడు రెండు వస్తువులను ఉత్పత్తి చేస్తున్నాడనుకోండి. ఒక యూనిట్ మొదటి వస్తువులను ఉత్పత్తి చేయటానికి ఒక యూనిట్ శ్రమ (*Labour*), ఒక యూనిట్ భూమి (*Land*) రెండు యూనిట్ల మూలధనాన్ని (*Capital*) ఉత్పత్తి కారకాలు (*Inputs*)గా ఉపయోగించాడని అనుకుందాం. ఒక యూనిట్ రెండవ వస్తువును ఉత్పత్తి చేయటానికి మూడు యూనిట్ల శ్రమ, ఒక యూనిట్ భూమి, ఒక యూనిట్ మూలధనం ఉత్పత్తి కారకాలుగా ఉపయోగించాడని అనుకుందాం. ఈ దత్తాంశాన్ని ఒక పట్టిక రూపంలో సంక్షిప్తంగా ఈ క్రింది విధంగా చూపవచ్చు.

	ఉత్పత్తి (*Output*)	
	మొదటి వస్తువు	రెండవ వస్తువు
ఉత్పత్తి కారకాలు	శ్రమ 1	3
	భూమి 1	1
	మూలధనం 2	1

ఈ పట్టికలో మొదటి అడ్డువరుసలో ఉన్న సంఖ్యలు 1, 3 రెండు ఉత్పత్తులలో ఒక యూనిట్ ఉత్పత్తికి కావలసిన శ్రమను తెలుపుతాయి. ఇదే విధంగా రెండవ అడ్డు వరసలో ఉన్న సంఖ్యలు 1,1 రెండు ఉత్పత్తులలో ఒక యూనిట్ ఉత్పత్తికి కావలసిన భూమిని తెలుపుతాయి. మూడవ వరుసలో ఉన్న సంఖ్యలు 2, 1 రెండు ఉత్పత్తులలో ఒక యూనిట్ ఉత్పత్తికి కావలసిన మూలధనాన్ని తెలుపుతాయి.

ఈ విధంగా $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ అనే పట్టిక ఉత్పత్తికి, ఉత్పత్తి కారకాలకు గల సంబంధాన్ని తెలియబరుస్తూ దత్తాంశాన్ని అంతటిని సంక్షిప్తంగా రెండు నిలువ వరుసలలోనూ చూపటం జరిగింది.

8.2 మాత్రిక నిర్వచనం - వివిధ రకాల మాత్రికలు:

8.2.1 మాత్రిక నిర్వచనం, ఉదాహరణలు: m, n లను రెండు ధన పూర్ణాంకాలనుకోండి. పరిమితులు గాని, చలరాశులు గాని, ప్రమేయాలు గాని మొదలైన వాటిని m అడ్డు వరుసలు, n నిలువు వరుసలు గల ఒక పట్టికలో చూపితే, ఆ పట్టికను మాత్రిక అంటాం. ఆ మాత్రికను m, n రూపం గల మాత్రిక అని కూడా అంటాం. ఇటు వంటి మాత్రికను

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & --- & a_{qn} \\ a_{21} & a_{22} & --- & a_{2n} \\ --- & --- & --- & --- \\ a_{m1} & a_{m2} & --- & a_{mn} \end{pmatrix}$$ అనే రూపంలో వ్రాస్తాం.

ఈ మాత్రిక లోపల వ్రాసిన ప్రతి సంకేతాన్ని మూలకం అని అంటాం. అందుచేత, $m \times n$ రూపం గల మాత్రికలో $m \times n$, మూలకాలు m అడ్డువరుసలు, n నిలువ వరుసలు ఉంటాయి.

ఒక మాత్రికలో ప్రతి మూలకం ఒక అడ్డువరుసలోను, ఒక నిలువు వరుసలోను ఉంటుంది. అందుచేత, ఒక మాత్రికలో ఒక మూలకాన్ని వ్రాస్తున్నప్పుడు రెండు పాదికలను వాడుతాం. అందులో మొదటిది ఆ మూలకం వున్న అడ్డువరుసను, రెండవది ఆ మూలకం ఉన్న నిలువు వరుసను సూచిస్తుంది. ఉదాహరణకు a_{47} అంటే ఒక మాత్రికలో 4వ అడ్డువరుసలోనూ, 7వ నిలువు వరుసలోను ఉన్న మూలకం అని అర్థం. సార్వత్రికంగా a_{ij} అంటే ఒక మాత్రికలో i-వ అడ్డువరుసలోనూ, j-వ నిలువు వరుసలోనూ వున్న మూలకం అని అర్థం.

అర్థశాస్త్రంలో మాత్రికలు ఉపయోగపడే సందర్భాలు చాలా వున్నాయి. ఉదాహరణకు n పరిశ్రమలు ఒక్కొక్కటి ఒక్కొక్క వస్తువును ఉత్పత్తి చేస్తున్నాయని అనుకోండి. ప్రతి పరిశ్రమ తాలూకూ కొంత ఉత్పత్తిని తన పరిశ్రమలో ఉత్పత్తి కారకాలుగా వాడుతున్నదని అనుకోండి. J-వ పరిశ్రమ ఉత్పత్తిలో X_{ij} పరిమాణంలో i-వ పరిశ్రమ తన పరిశ్రమలో ఉత్పత్తి కారకంగా వాడుతున్నదని అనుకోండి. అపుడు

$$X_{ij} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & --- & x_{in} \\ x_{21} & x_{22} & --- & x_{2n} \\ --- & --- & --- & --- \\ x_{n1} & x_{n2} & --- & x_{nn} \end{pmatrix}$$

అనే మాత్రిక ప్రతి పరిశ్రమ ఇతర పరిశ్రమలతో ఏ విధంగా వ్యవహరిస్తున్నదో, ఆయా పరిశ్రమల ఉత్పత్తి కారకాలకు, ఉత్పత్తులకు గల సంబంధం ఏమిటో తెలియబరుస్తుంది.

ఇంకొక ఉదాహరణగా, ఒక కాల శ్రేణి దత్తాంశంనకు సంబంధించిన మాత్రికను చెప్పవచ్చు. $x_1, x_2, -----, x_n$ అనుచరరాశులు 1, 2, ..., T అను ఆవర్తనా కాలంలో తీసుకున్న విలువల తాలూకా దత్తాంశాన్ని కాలశ్రేణి దత్తాంశం అని అంటాం. ఆ కాలశ్రేణి దత్తాంశంలో X_i అనే చలరాశి t అనే ఆవర్తనా కాలంలో X_{it} అనే విలువను తీసుకుంటే మొత్తం ఆ దత్తాంశాన్నంతటిని ఒక మాత్రిక రూపంలో ఈ క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చు.

$$\left(x_{it}\right)_{n \times T} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{1T} \\ x_{21} & x_{22} & x_{2T} \\ --- & --- & --- \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{nT} \end{pmatrix}$$

8.2.2 వివిధ రకాల మాత్రికలు: ఒక మాత్రికలో ఒకే ఒక అడ్డు వరుస గాని, నిలువు వరుస గాని వుంటే దానిఇన సదిశ అంటాం. ఉదాహరణకు (5 - 10) అనే మాత్రిక 1×3 రూపం గల మాత్రిక. ఇందులో ఒకే అడ్డు వరుస ఉంది. కాబట్టి ఇది సదిశ అవుతుంది. దీనిని అడ్డువరుస సదిశ అని కూడా అంటాం. ఇదే విధంగా, $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ కూడా ఒక సదిశే, ఇది 3×1 రూపం గల మాత్రిక. దీనిని నిలువు వరుస మాత్రిక అని అంటాం.

ఒక మాత్రికలో ఉన్న అడ్డువరుసల సంఖ్య, నిలువు వరుసల సంఖ్య ఒకటే అయితే ఆ మాత్రికను చతురస్ర మాత్రిక అని అంటాం. అటువంటి మాత్రిక $n \times n$ రూపంలో ఉంటుంది. అప్పుడు ఆ మాత్రికను n క్రమంగా గల చతురస్ర మాత్రిక అని కూడా అంటాం. ఉదాహరణకు, $\begin{pmatrix} -3 & 5 & 7 \\ 6 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ అనే మాత్రిక మూడు క్రమంగా గల చతురస్ర మాత్రిక. అనగా 3×3 రూపం గల మాత్రిక. ఒక చతురస్ర మాత్రికలో a_{ij} అనే మూలకాలను వికర్ణ మూలకాలు గల సమితిని వికర్ణం అని అంటాం. అనగా $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ----$ అనే మూలకాలు అన్ని వికర్ణ మూలకాలు గల సమితిని వికర్ణం అని అంటాం. పై మాత్రికలో $a_{11} = -3, a_{22} = 0, a_{33} = 8$ అనే మూలకాలు వికర్ణ మూలకాలు (-3 0 8) ఈ మాత్రికకు వికర్ణం.

ఒక చతురస్ర మాత్రికలో వికర్ణామికి పైన గాని క్రింద గాని అన్ని మూలకాలు సున్నాలైతే, ఆ మాత్రికను త్రిభుజాకార మాత్రిక అని అంటాం. ఉదాహరణకు,

$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 7 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ అనే మాత్రికలు త్రిభుజాకార మాత్రికలు.

ఒక చతురస్ర మాత్రికలో వికర్ణంలో లేని మూలకాలన్నీ సున్నాలయితే, ఆ మాత్రికను త్రిభుజాకార మాత్రిక అని అంటాం. ఉదాహరణకు $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ అనే మాత్రికలు త్రిభుజాకార మాత్రికలు.

ఒక చతురస్ర మాత్రికలో వికర్ణంలో లేని మూలకాలన్నీ సున్నాలయితే, ఆ మాత్రికను వికర్ణ మాత్రిక అని అంటాం. అటువంటి మాత్రికలో $d_1, d_2, ...d_n$ వికర్ణ మూలకాలయితే దానిని వికర్ణం $\left(d_1, d_2, ...d_n\right)$ అని వ్రాస్తాం.

ఉదాహరణకు $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ అనేది వికర్ణ మాత్రిక. దీనిని వికర్ణం (1, 2, 4) అని వ్రాస్తాం.

వికర్ణం $(d, d, \ldots\ldots\ldots d)$ అనే రూపంలో ఉన్న వికర్ణ మాత్రికను అదిశా మాత్రిక అని (*Scalar Matrix*) అంటారు. అనగా, ఒక వికర్ణ మాత్రికలో వికర్ణ మూలకాలన్నీ సమానము అయితే, ఆ మాత్రికను అదిశా మాత్రిక అంటాం. ఉదాహరణకు $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$ వికర్ణం (2, 2, 2) ఒక అదిశా మాత్రిక.

వికర్ణం (1, 1, ... 1) అనే రూపంలో ఉన్న మాత్రికను యూనిట్ మాత్రిక అని గాని తత్సమ మాత్రిక (*Identity Matrix*) అని గాని అంటాం. ఒక యూనిట్ మాత్రికలో వికర్ణంలో n మూలకాలు ఉంటే, అది $n \times n$ రూపం గల మాత్రిక అవుతుంది. దానిని I_n అని వ్రాస్తాం. ఉదాహరణకు $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$, ఒక యూనిట్ మాత్రిక. దీని రూపం 4×4

ఒక మాత్రికలో మూలకాలన్నీ సున్నాలయితే దానిని శూన్య మాత్రిక (*Zero Matrix*) అని అంటాం. ఉదాహరణకు $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ అనే మాత్రిక 2×3 రూపం గల మాత్రిక. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ అనే మాత్రిక 3×2 రూపం గల శూన్య మాత్రిక. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ అనే మాత్రిక 2×2 రూపం గల శూన్య మాత్రిక.

8.3 మాత్రికల పై ప్రాథమిక పరిక్రియలు:

సంఖ్యలలో సంకలనం , వ్యవకలనం, గుణకారం, భాగాహారం అను ప్రాథమిక పరిక్రియలను జరపవచ్చునని, ఇపుడు మాత్రికలలో కూడా ఇటువంటి పరిక్రియలు ప్రవేశపెట్టి, వాటి ధర్మాలను పరిశీలిద్దాం.

8.3.1 మాత్రికా సంకలనం, వ్యవకలనం (*Matrix addition and Subtraction*): $A = \left(a_{ij}\ldots..\right) = \left(b_{ij}\ldots\right)$ అను రెండు మాత్రికలు ఒకే రూపం గల మాత్రికలు అయితే, $\left(a_{ij}\ldots..+b_{ij}\ldots\right)$ అనే మాత్రికను A, Bల మొత్తం అని అంటాం. దీనిని $A+B$ అని వ్రాస్తాం. అనగా, $A+B = \left(a_{ij}+b_{ij}\right)$. ఇది కూడా A, B ల రూపాన్ని కలిగి ఉంటుందని గమనించండి. కాబట్టి Bను, Aకు కలపగా $A+B = \left(a_{ij}+b_{ij}\right)$ అనే మాత్రిక వస్తుంది. Bను, A నుంచి తీసివేస్తే (వ్యవకలనం) వచ్చే మాత్రికను $A\text{-}B = \left(a_{ij}\text{-}b_{ij}\right)$ అని నిర్వచిస్తాం. A - Bని A, Bల భేదం అని అంటాం.

ఉదాహరణకు $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ ' అయితే

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+1 \\ 3\text{-}3 & 4+2 \\ 5+6 & 6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \\ 11 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A\text{-}B = \begin{pmatrix} 1\text{-}0 & 2\text{-}1 \\ 3\text{-}(-3) & 4\text{-}2 \\ 5\text{-}6 & 6\text{-}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

A, B మొత్తాన్ని గాని, భేదాన్ని గాని కనుగొనాలంటే, A, Bలు ఒకే రూపం గల మాత్రికలు కావాలని గమనించండి.

8.3.1.1 మాత్రికా సంకలన ధర్మాలు: (1) మాత్రికా సంకలనం వినిమయ న్యాయాన్ని (*Commulative Law*) కలిగి ఉంటుంది. అనగా *A, B* లు ఒకే రూపం గల మాత్రికలియుతే, *A* + *B* = *B* + *A* కావలెను.

ఉదాహరణకు, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ అయితే, $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \\ 11 & 10 \end{pmatrix}$ అని పైన గమనించాం.

B + *A* కూడా $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \\ 11 & 10 \end{pmatrix}$ అనే మాత్రికే అవుతుందని గమనించవచ్చు.

(2) మాత్రికా సంకలనం సాహచర్య న్యాయాన్ని కలిగి ఉంటుంది. అనగా A, B, C లు ఒకే రూపం గల మాత్రికలయితే, $(A+B)+C = A+(B+C)$ కావలెను.

ఉదాహరణకు, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ అయితే,

$$(A+B)+C = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 2+3 & -1+2 \\ 1+0 & 0+5 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & +6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5-1 & 1+3 \\ 1-2 & 5+6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A+(B+C) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3-1 & 2+3 \\ 0-2 & 5+6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+2 & -1+5 \\ 1-2 & 0+11 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 11 \end{pmatrix}$$

కాబట్టి $(A+B)+C = A+ (B+C)$

(3) A, 0 లు ఒకే రూపం గల మాత్రికలు అయి, O శూన్య మాత్రిక అయితే, $A+O = A$ ఉదాహరణకు

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ అయితే

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+0 & 2+0 & -1+0 \\ 0+0 & 5+0 & 6+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} = A$$

(4) ప్రతి మాత్రిక A కు ఒక మాత్రిక B, $A+B = 0$ అయ్యేటట్లు దొరుకుతుంది. ఈ B నే - A అని వ్రాస్తాం.

ఉదాహరణకు $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ అయితే $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ కావాలి. అపుడు $A+B = 0$ అని గమనించవచ్చు. కాబట్టి

$-A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ $A - A = 0$ అని, $O - A = -A$ అని గమనించండి. $-A$ ను A కు సంకలన విలోమం అని అంటాం.

A, C లు సమాన రూపం గల మాత్రికలయితే, $A+ (-C) = A - C$ అవుతుంది. కాబట్టి మాత్రికా వ్యవకలనానికి ప్రత్యేకంగా ధర్మాలను చెప్పుకోనక్కర లేదు.

8.3.2 గుణకారం (*Multiplication*): మాత్రికలలో గుణకారాన్ని రెండు విధాలుగా ప్రవేశ పెట్టవచ్చు. ఒక మాత్రికను ఒక సంఖ్య (అదిశ)ను పెట్టి గుణించవచ్చు. దీనిని అదిశ గుణకారం అని అంటాం. లేదా, ఒక మాత్రికను మరొక వీలైన మాత్రికతో గుణించవచ్చు. దీనిని మాత్రికా గుణకారం అంటాం. ఇపుడు రెండు రకాల గుణకారాలను నిర్వచించి, వాటి ధర్మాలను పరిశీలిద్దాం.

8.3.2.1 అదిశా గుణకారం: $A = \left(a_{ij}\right)$ ఒక మాత్రిక అయి k ఒక సంఖ్య (అదిశ) అయితే kA ను $\left(k \cdot a_{ij}\right)$ అనే మాత్రికగా నిర్వచిస్తాం.

ఉదాహరణకు $k=2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

అదిశ గుణకారం క్రింది లక్షణాలను కలిగి ఉంటుంది.

1. K, l లు సంఖ్యలయి, A మాత్రిక అయితే , $(K +L)\ A = KA + LA$
2. K ఒక సంఖ్య, $A\ B$ లు సమాన రూపం గల మాత్రికలు అయితే, $K(A+B) = KA + KB$
3. K, l లు సంఖ్యలయి, A మాత్రిక అయితే $K(LA) = (KA) = (Kl)\ A$.
4. $lA = A$,
5. $(-1)A = -A$,
6. $OA = 0$

8.3.2.2 మాత్రికా గుణకారం: Aలో ఎన్ని నిలువు వరుసలు ఉన్నాయో B లో అన్ని అడ్డ వరుసలు వుండేటట్లు A, B అను రెండు మాత్రికలను తీసుకోండి. అనగా A రూపం $m \times n$ అయితే, B రూపం $n \times k$ కావలెను. అపుడు A తో B ని గుణించడానికి వీలుగా వుంది అని అంటాం. లేదా A, B లు గుణకారానికి వీలుగా ఉండే మాత్రికలు అంటాం. అటువంటి వాటి మధ్యనే గుణకారాన్ని నిర్వచిస్తాం. క్రింది ఉదాహరణను గమనించండి.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ అని అనుకోండి

ఈ రెండూ గుణకారానికి వీలుగా ఉండే మాత్రికలు. వీటితో ఒక కొత్త మాత్రికను ఈ విధంగా తయారు చేస్తాం. A లో అడ్డువరుస B లో ఒక నిలువు వరుస తీసుకుని వాటిలోని మూలకాలను మూలకాల వారీగా గుణించి, ఆ లబ్దధలను కూడగా వచ్చిన మొత్తాన్ని ఈ కొత్త మాత్రికలో ఆ అడ్డువరుసలోనూ, ఆ నిలువు వరుసలోనూ వేస్తాం. ఈ విధంగా ఈ కొత్త మాత్రికలోని మూలకాలన్నింటినీ తయారు చేస్తాం. ఉదాహరణకు, A లో మొదటి అడ్డువరుస (1, 2) B లో రెండవ నిలువు వరుస తీసుకొని, ఆ మూలకాలను మూలకాల వారీగా గుణించి, ఆ లబ్దాలను కూడగా $1 \times 2 + 2 \times 1 = 2 + 2 = 4$ వస్తుంది. ఈ **4**ను కొత్త మాత్రికలో మొదటి అడ్డు వరుసలోనూ, రెండవ నిలువు వరుసలోను వేస్తాం (A లో మొదటి అడ్డువరుస, B లో రెండవ నిలువు వరుస తీసుకున్నాం కాబట్టి). ఈ విధంగా కొత్త మాత్రికలో మూలకాలన్నీ తయారు చేస్తాం. అపుడు ఆ కొత్త మాత్రికను A, B ల లబ్దం అని అంటాం. దానిని AB అని వ్రాస్తాం. AB ని ఈ విధంగా తయారు చేస్తే కింద చూపిన మాత్రిక వస్తుంది.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1+2.0 & 1.2+2.1 & 1.3+2.1 \\ 2.1+3.0 & 2.2+3.1 & 2.3+3.1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

A ఒక 2×2 మాత్రిక, B ఒక 2×3 మాత్రిక అని గమనించండి.

ఉదాహరణకు $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ అయినపుడు

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.3+5.2 & 2(-1)+5.7 \\ 1.3+3.2 & 1(-1)+3.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 33 \\ 9 & 20 \end{pmatrix}$$

ఇంకొక ఉదాహరణ $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ అయినచో

$$CD = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 20 & 17 \end{pmatrix}$$

8.3.2.3 మాత్రికా గుణకార ధర్మాలు: **(1)** మాత్రికా గుణకారానికి వినిమయ న్యాయం వర్తించదు. అనగా AB, BAలు మనం తేనక్కరలేదు. పై ఉదాహరణలో

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 33 \\ 9 & 20 \end{pmatrix}$$ అని గమనించాం.

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2+(-)1 & 3.5+(-1).3 \\ 2.2+7.1 & 2.5+7.3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 11 & 31 \end{pmatrix}$$

కాబట్టి $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore AB \neq BA$

(2) మాత్రికా గుణకారం సాహచర్య న్యాయాన్ని పాటిస్తుంది. అనగా $(AB)C = A(BC)$

ఉదాహరణకు $A = \begin{pmatrix} 2, 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ అయితే

$$(AB)C = \left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.4+3.0 & 2.0+3.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.0+15.3 & 8.1+15.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 8 \end{pmatrix}$$

$\therefore (AB)C = A(BC)$

(3) *A* అనే మాత్రిక, *I* అనే యూనిట్ మాత్రిక గుణకారానికి వీలుగా వుంటే *AI* = *IA* = *A*. అనగా, మీ మాత్రిక *A* నైనా గుణకారానికి వీలుగా వుండే యూనిట్ మాత్రిక *I* తో యెడమ వైపుగా, కుడి వైపుగాని గుణిస్తే తిరిగి *A* నే వస్తుంది.

(4) *A* అనే మాత్రిక *O* అనే శూన్య మాత్రిక గుణకారానికి వీలుగా వుంటే *AO* = *OA* = *O* అవుతుంది. అనగా యే మాత్రిక *A* నైనా గుణకారానికి వీలుగా వుండే *O* అనే శూన్య మాత్రికతో యెడమ వైపున గాని, కుడి వైపున గాని గుణిస్తే, శూన్య మాత్రిక వస్తుంది.

(5) *AB* = *0* అయితే *A*, *B* లలో యేదో ఒకటి శూన్య మాత్రిక కానక్కరలేదు. ఉదాహరణకు

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$ అయితే $AB = 0$ అని చూపవచ్చు.

కాని $A \neq 0$, $B \neq 0$.

(6) $AB = AC$ అయినా $BA = CA$ అయినా $B = C$ కానక్కరలేదు.

ఉదాహరణకు, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ అయితే

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.2+0.4 & 0.3+0.5 \\ 1.2+2.4 & 1.3+2.5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 10 & 13 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.4+0.3 & 0.3+0.5 \\ 1.4+2.3 & 1.3+2.5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 10 & 13 \end{pmatrix}$$

కాబట్టి $AB = AC$ అయింది. కాని $B \neq C$

(7) విభాగవ్యయం (*Distributive Law*)

B, C లు ఒకే రూపం గల మాత్రికలయి, *A,B ; A,C* లు గుణకారానికి వీలుగా ఉండే మాత్రికలయితే *A(B+C) = AB+BC.*

ఉదాహరణకు $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ అయితే

$$A(B+C) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2.1+0.6 & 2.2+0.1 \\ 0.1+3.6 & 0.2+3.1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 18 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AB + BC = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 18 & 3 \end{pmatrix}$$

కాబట్టి $A(B+C) = AB + AC$

(8) మాత్రికా విలోమం (*Inverse of Matrix*)

$a \neq 0$ ఒక సంఖ్య అయితే దానికి విలోమం వుంటుందని దానిని $\frac{1}{a}$ అని వ్రాస్తామని మనకి తెలుసు. అంతేకాకుండా, $a.\frac{1}{a} = \frac{1}{a}.a = 1$ కాబట్టి a ను ఎడమ ప్రక్కగాని, కుడి ప్రక్కగా ఏ సంఖ్యతో గుణిస్తే **1** వస్తుందో, ఆ సంఖ్యను a కు గుణకార విలోమం అని అంటున్నాం.

A, B లు మాత్రికలయి $AB = BA = I$ అయితే B ను A కు గుణకార విలోమం, లేదా సూక్ష్మంగా A కు విలోమం అంటాం.

8.4 మాత్రికా వ్యత్యయం:

A అనే మాత్రికలో అడ్డు వరుసలు, నిలువు వరుసలు పరస్పరం మార్పిడి చేస్తే వచ్చే మాత్రికను A కు వ్యత్యయం అని అంటాం. దీనిని A^1 అని గాని A^T అని గాని వ్రాస్తాం. A రూపం $m \times n$ అయితే A^1 రూపం $n \times m$ అవుతుందని గమనించండి.

ఉదాహరణకు $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ అయితే $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

8.4.1 మాత్రికా వ్యత్యయ ధర్మాలు:

1. $\left(A^1\right)^1 = A$
2. $I^1 = I$
3. $(KA)^1 = KA^1, K$ ఒక సంఖ్య
4. $\left(A + B\right)^1 = A^1 + B^1$
5. $(AB)^1 = B^1A^1$ ఈ లక్షణాన్ని వ్యత్యయ తిరోగమన న్యాయం అని అంటాం.

   ఈ ధర్మాలనన్నింటిని ఉదాహరణల ద్వారా పరిసీలించండి.
6. A ఒక సౌష్టవ మాత్రిక అయితే $A = A^1$ కావాలి. ఒక అసౌష్టవ మాత్రిక అయితే $A = -A^1$ కావలెనని గమనించండి.

ఉదాహరణకు, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ అనే సౌష్టవ మాత్రికకు వ్యత్యయం.

$A^1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = A$ అని $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

అదే అసౌష్టవ మాత్రికకు వ్యత్యయం

$B^1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} = -B$ అని గమనించండి.

అంతే కాకుండా, ఏదైని మాత్రికకు $A = A^1$ అయితే, అది సౌష్టవ మాత్రిక అవుతుంది. $A^1 = -A$ అయితే అది అసౌష్టవ మాత్రిక అవుతుంది.

8.5 నిర్ధారకాలు:

నిర్ధారకానికి నిర్వచనం, ఉదాహరణలు: $a_{11}a_{22}, - a_{12}a_{21}$ అనే సంఖ్యను 2×2 రూపం గల $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ అనే చతురస్ర మాత్రికకు నిర్ధారకం అని అంటాం. దీనిని $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ అనే సంకేతంతో సూచిస్తాం. ఈ విధమైన సంకేతం వాడటం వలన ఈ నిర్ధారకం ఏ మాత్రికకు సంబంధించినదీ స్పష్టంగా తెలుస్తుంది. అందుచేత, నిర్ధారకానికి ఇటువంటి సంకేతాన్ని వాడుతాం. కాబట్టి $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ఇది $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ అనే మాత్రికకు నిర్ధారకం. దీనిని సూక్ష్మంగా $|A|$ అని గాని లేదా నిర్ధారకం (A) అని గాని వ్రాస్తాం. అంతేకాకుండా, A కు గల రూపాన్నే $|A|$ అనే నిర్ధారకానికి కూడా రూపంగా వ్యవహరిస్తాం. A లో మూలకాలను $|A|$ లో మూలకాలని కూడా వ్యవహరిస్తాం.

$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ అనే నిర్ధారకానికి రూపం 2×2 (ఇది A రూపమే)

ఇందులో మూలకాలు $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ (ఇవి A మాత్రికలో మూలకాలే). ఉదాహరణకు,

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 5\times6-(-2)4$$

$$= 30+8$$

$$= 38$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ అనే 3×3 రూపం గల మాత్రికను తీసుకోండి.

దీనికి |A|ను నిర్వచిస్తాం. A లో మొదటి అడ్డ వరుసలో ఉన్న మూలకాలు తీసుకుని, ఒక్కొక్క మూలకాన్ని అది ఉన్న అడ్డువరుస (అంటే మొదటి అడ్డ వరుస) అది ఉన్న నిలువు వరుస వదిలివేయగా వచ్చిన నిర్ధారకంతో గుణించి, ఆ లబ్ధాలను $+,-,+$ గుర్తుల ద్వారా కలపగా వచ్చిన మొత్తాన్ని A కు నిర్ధారకం అని నిర్వచిస్తాం. అనగా

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}\right)$$

ఉదాహరణకు,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 1\left(-7 \;\; -0\right) -2\left(35 \;\; -0\right) + 3\left(30 \;\; -(-2)\right)$$

$$= -7-70+96$$

$$= 19$$

గమనిక: - ఒక చతురస్ర మాత్రికను మాత్రమే నిర్ధారకం వుంటుంది.

8.5.1 లఘు నిర్ధారకం: ఒక నిర్ధారకంలో 'ఒక మూలకానికి లఘు నిర్ధారకం' అనగా ఆ మూలకం ఉన్న అడ్డ వరుస, నిలువు వరుసను వదిలి వేయగా మిగిలిన నిర్ధారకం. a_{ij} మూలకం అయితే, దాని లఘు నిర్ధారకాన్ని M_{ij} అని సూచిస్తాం.

ఉదాహరణకు $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ అనే నిర్ధారకంలో **-1** కి లఘు నిర్ధారకం అనగా, **-1** ఉన్న అడ్డ వరుస, అనగా రెండవ అడ్డువరుసను, **-1** ఉన్న నిలువు వరుసను అనగా రెండవ నిలువు వరుసను వదిలివేయగా మిగిలిన నిర్ధారకం, అనగా

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 6 = 1.6$కు లఘు నిర్ధారకం అనగా, 6 ఉన్న అడ్డ వరుసను, అనగా మూడవ అడ్డువరుసను, 6 ఉన్న నిలువు వరుసను అనగా రెండవ నిలువు వరుసను వదిలివేయగా మిగిలిన నిర్ధారకం అనగా $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 15 = -15$.

ఒక నిర్ధారకంలో 'i-1 వ అడ్డ వరుస, j-వ నిలువు వరుసలో వున్న మూలకానికి సహ గుణావయనం' అనగా $(-1)^{i+j}$ x మూలకానికి లఘు నిర్ధారకం. a_{ij} అనే మూలకానికి సహగుణావయమాన్ని A_{ij} అనే a_{ij} సంకేతం తో సూచిస్తాం. కాబట్టి $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

8.6 నిర్ధారకాల ధర్మాలు:

1. ఒక నిర్ధారకంలో అడ్డ వరుసలన్నింటిని, నిలువు వరుసలతో పరస్పరం మార్పిడి చేస్తే, ఆ నిర్ధారకం విలువ మారదు.

   ఉదాహరణ, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$. ఇందులో అడ్డ వరుసలను, నిలువు వరుసలతో పరస్పరం మార్పిడి చేస్తే $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ అనే నిర్ధారకం వస్తుంది. దీని విలువ కూడా $4 - 6 = -2$.

2. ఒక నిర్ధారకంలో ఒక అడ్డ వరుసలో గాని, ఒక నిలువు వరుసలో గాని ప్రతి మూలకం సున్నా అయితే ఆ నిర్ధారకం నిలువు సున్న అవుతుంది.

   ఎందుకంటే ఏ వరుసలో మూలకాలన్నీ సున్నాలయ్యాయో, ఆ వరుసనే మనం నిర్ధారకం విలువను కనుగొనడానికి ఎంపిక చేసుకుంటే ఆ సున్నాల సహ గుణావయవాలు యేమైనప్పటికి, మూలకాల సహగుణావయవాల లబ్ధం సున్నా అవుతుంది. కాబట్టి, ఈ లబ్దాల మొత్తం సున్నా అవుతుంది. ఉదాహరణకు, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0$ (విలువను రెండవ అడ్డువరుసనుపయోగించి కనుగొనండి.)

3. ఒక నిర్ధారకంలో ఒక అడ్డ వరుసలో గాని (ఒక నిలువు వరుసలో గాని) ప్రతి మూలకాన్ని ఒకే సంఖ్యతో గుణిస్తే ఆ నిర్ధారకం విలువ కూడా అదే సంఖ్యతో గుణింపబడుతుంది. ఉదాహరణకు $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$ ఇందులో రెండవ అడ్డ వరుసలో ప్రతి మూలకాన్ని మూడుతో గుణిస్తే $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 12 \end{vmatrix}$ అనే నిర్ధారకం వస్తుంది. దీని విలువ $12 - 18 = -6 = 3 \times -2 = 3 \times$ నిర్ధారకం మొదటి విలువ. కాబట్టి రెండవ వరుసలో మూలకాలన్నీ 3 చే గుణిస్తే నిర్ధారకం విలువ కూడా 3 చే గుణించబడింది.

4. ఒక నిర్ధారకంలో వరుసగా ఉన్న రెండు అడ్డ వరుసలను (నిలువు వరుసలను) మార్పిడి చేస్తే, ఆ నిర్ధారకం విలువ మారదు. కాని గుర్తు మారుతుంది. ఉదాహరణకు, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$. ఇందులో రెండు అడ్డ వరుసలను పరస్పరం మార్పిడి చేస్తే $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ అనే నిరాఅథరకం వస్తుంది. దీని విలువ $6 - 4 = -2$. ఈ విలువ ఇదివరికిటి విలువకు ఋణాత్మకం $(-(-2))$.

5. ఒక నిర్ధారకంలో ఏ రెండు అడ్డు వరుసలలోనైనా (రెండు నిలువు వరుసలలోనైనా) మూలకాలు అనుపాతంలో గాని, సమానంగా గాని వుంటే, ఆ నిర్ధారకం విలువ సున్నా అవుతుంది.

ఉదాహరణకు, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0$ అని చూపవచ్చు. ఇందులో మొదటి రెండు అడ్డువరుసలలోనూ మూలకాలు అనుపాతంలో ఉన్నాయి. $(1{:}2 = 2{:}4 = 3{:}6)$.

ఇదే విధంగా $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ అని చూపవచ్చు. ఇందులో మొదటి అడ్డు వరుసలోనూ, మూడవ అడ్డు వరుసలోను మూలకాలు సమానాలు.

6. ఒక నిర్ధారకంలో ఒక అడ్డు వరుసలో (నిలువు వరుసలో) మూలకాలను ఒకే సంఖ్యతో గుణించి, ఆ లబ్దాలను మరొక అడ్డువరుసలో (నిలువు వరుసలో) సంబంధిత మూలకాలకు కలిపితే, ఆనిర్ధారకం విలువ మారదు.

ఉదాహరణకు $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4-6 = -2$ రెండవ అడ్డు వరుసలో సంబంధిత మూలకాలకు కలిపితే

$\begin{vmatrix} 1+3\times3 & 2+3\times4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 14 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ అనే నిర్ధారకం వస్తుంది. దీని విలువు $10\times4 - 3\times14 = 40-42 = -2$.

ఉదా 1: $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ అనే నిర్ధారకం విలువను కనుగొనండి.

సాధన: ఇందులో మూడవ నిలువు వరుసలో మూలకాలను మొదటి నిలువు వరుసలో సంబంధిత మూలకాలలోనూ, రెండవ నిలువు వరుసలో సంబంధిత మూలకాలలోనూ తీసివేస్తే వచ్చే నిర్ధారకం విలువ ఇచ్చిన నిర్ధారకం విలువకు సమానం అవుతుంది. అందుచేత

ఇచ్చిన నిర్ధారకం $= \begin{vmatrix} 5-4 & 6-4 & 4 \\ 8-7 & 9-7 & 7 \\ 2-1 & 3-1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0$ ((5) ధర్మం వలన)

ఉదా 2: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ అనే నిర్ధారకం విలువను కనుగొనండి.

సాధన : ఇచ్చిన నిర్ధారకం $= \begin{vmatrix} 1+2+3 & 2++3+1 & 3+1+2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ ((6)వ ధర్మం వలన)

$= \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ ((3)వ ధర్మం వలన)

$$= \ 6\begin{vmatrix} 1 & 1\text{-}1 & 1\text{-}1 \\ 2 & 3\text{-}2 & 1\text{-}2 \\ 3 & 1\text{-}3 & 2\text{-}3 \end{vmatrix}$$ ((6)వ ధర్మం వలన)

$$= 6\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 6.1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 6\left(-1 \ \ -2\right) = 6(-3) = -18.$$

8.7 నిర్ధారకాలను ఉపయోగించి సమీకరణాలను సాధించుట:

నిర్ధారకాలకు ఒక ముఖ్యమైన ఉపయోగం సమీకరణాలను సాధించుట. ఈ ప్రయత్నంలో "క్రామర్స్" నియామకం చాలా ఉపయోగపడుతుంది.

"క్రామర్స్" నియమం: $X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots\ldots X_n$ అను n చలరాశుల (అజ్ఞాత రాశులు)లో క్రింది n సమీకరణాలను గమనించండి.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{nn}x_n = b_n$$

ఈ సమీకరణాలలో అజ్ఞాత రాశుల గుణకాలతో n వ క్రమం గల కింది నిర్ధారకాన్ని తయారు చేయవచ్చు.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{pmatrix}$ అనే నిలువు వరుస సదిశను B అనుకోండి. A లో 1-వ నిలువు వరుసను తీసి, ఆ స్థానములో B ని వుంచగా యేర్పడిన నిర్ధారకాన్ని B_1 అని అనుకోండి. ఇటువంటి నిరాఅథరకాలు n వస్తాయి. అవి B_1 , B_2 , ..., B_n. క్రామర్స్ నియమేమనగా $A \neq 0$ అయితే, పై సమీకరణాలకు ఒకే ఒక సాధన ఉంటుంది. ఆ సాధనలో అజ్ఞాత రాశుల విలువలకు సూత్రం

$$X_i = \frac{B_i}{A}, i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots n$$

ఉదాహరణ:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 7 \\ x - 2y + 3z &= 6 \\ 3x - y - z &= 2 \end{aligned}$$ అనే సమీకరణాలను సాధించండి.

సాధన:

ఇక్కడ $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$B_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad B_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}, \quad B_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

నిర్ధారకాల ధర్మాలలో చర్చించిన పద్ధతులను వాడి $A=15,\ b_1=15,\ B_2 = 30,\ B_3 = 45$ అని చూపవచ్చు.

$$\therefore x = \frac{B_1}{A} = \frac{15}{15} = 1,$$

$$y = \frac{B_2}{A} = \frac{30}{15} = 2$$

$$z = \frac{B_3}{A} = \frac{45}{15} = 3$$

8.8 మాత్రికకు విలోమం

A, B లు మాత్రికలై, *AB = BA = I* (*I* ఒక యూనిట్ మాత్రిక) అయితే, *B* ను *A* కు గుణకార విలోమం లేదా సూక్ష్మంగా విలోమం అని అంటాం. అనగా ఒక మాత్రిక *A* ను ఏ మాత్రిక *B* చే ఎడమ వైపుగాని కుడి వైపు గాని గుణిస్తే యూనిట్ మాత్రిక *I* వస్తుందో, ఆ మాత్రిక *B* ను *A*కు విలోమం అని అంటున్నాం. అయితే *A*ను *B* చే గుణించినపుడు అన్ని సందర్భాలలోను *AB, BA* అను రెండు లబ్దాలను తయారు చేయలేకపోవచ్చుని, వాటిని తయారు చేయగలిగిన *AB, BA* లు సమానం కానక్కరలేదని, దీనిని బట్టి ప్రతి మాత్రికకు విలోమం వుండనక్కర లేదని మనకు తెలుస్తోంది. అయితే ఎటువంటి మాత్రికకు విలోమం వుంటుంది? వుంటే ఒకే ఒక విలోమం ఉంటుందా? అంటే ఆ విలోమం కనుక్కోడానికి యే పద్ధతులను అనుసరించాలి? అనే ప్రశ్నలకు సమాధానములను రాబట్టవలసి ఉంది. ఇపుడు ఈ ప్రశ్నలకు సమాధానాలు క్రింది చర్చల ద్వారా తెలుస్తాయి.

అవిలక్షణ మాత్రిక

ఒక మాత్రిక *A* కు విలోమం *B* వుంటే, *AB = BA = I* కావాలి. *AB = BA* కావాలంటే *A, B* లు చతురస్ర మాత్రికలు కావాలి. కాబట్టి వాటికి $|A|$, $|B|$ అను నిర్ధారకాలు ఉంటాయి. అందుచేత, *AB = BA = I* లో నిర్ధారకాలు తీసుకుంటే, $|A|$, $|B| = |I|$ అని వస్తుంది. కాని *I* యూనిట్ మాత్రిక కాబట్టి, *I* క్రమం ఏమయినప్పటికీ $|I| = 1$. అందుచేత, $|A|\,|B| = |I| = 1$ *I* క్రమం ఏమయినప్పటికీ $|I| = 1$. అందుచేత, $|A|\,|B| = |I| = 1$. కాబట్టి $|A| \neq 0$. ఎందుకంటే $|A| = 0$ అయితే ఎడమ వైపు సున్నా వస్తుంది. కాని ఎడమ వైపు **1** ఉంది. అనగా A కు నిర్ధారకం **0** కాకూడదు.

ఈ ఫలితాన్ని బట్టి తెలిసేదేమంటే, A కు విలోమం వుంటే, A కు నిర్ధారకం సున్నా కాకూడదు. ఒక మాత్రికకు నిర్ధారకం సున్నా అయితే ఆ మాత్రికను విలక్షణ మాత్రిక అని అంటాం. కాబట్టి, ఒక మాత్రికకు విలోమం వుంటే, ఆ మాత్రిక అవిలక్షణ మాత్రిక అవుతుందని తెలుస్తుంది. అంతే కాకుండా ప్రతి అవిలక్షణ మాత్రికకు విలోమం ఉంటుందని కూడా క్రింద తెలుపుతున్నాం. కాబట్టి, ఒక మాత్రికకు విలోమం వుండడానికి అవశ్యక పర్యాప్త నియమం ఏమనగా, ఆ మాత్రిక అవిలక్షణ మాత్రిక అయి ఉండాలి.

8.8.1 విలోమాన్ని కనుగొనే పద్ధతి

$A = \left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ అ.మా. అనేది ఒక అవిలక్షణ మాత్రిక అనుకోండి. ఈ మాత్రికలో a_{ij} కు సహగుణావయవంను $A_{ij}\ \left(i, j = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots, n\right)$ అని అనుకోండి.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}\ldots & A_{2n} \\ A_{n1} & a_{n2}\ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

దీనిని గుణావయవాల మాత్రిక అని అంటాం. ఆ మాత్రికకు వ్యయం $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21}\ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22}\ldots & A_{n2} \\ A_{1n} & a_{2n}\ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$ అనే మాత్రిక అవుతుంది.

దీనిని A కు అనుబంధ మాత్రిక అంటాం. దీనిని అనుబంధ మాత్రిక (A) అనిగాని, సూక్ష్మంగా అ.మా. (A) అని గాని వ్రాస్తాం. ఇపుడు A^{-1}కు సూత్రం $A^{-1} = \dfrac{|A|}{|A|}$ అనగా, (A) లో ప్రతి మూలకాన్ని $|A|$చే భాగించగా వచ్చిన మాత్రిక A కు విలోమం అవుతుంది.

ఉదాహరణ:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ అను మాత్రికకు విలోమాన్ని కనుగొనండి.

సాధన:

అ.మా.

$$\begin{aligned} |A| &= 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} -2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} +3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 1\left(1 \quad -6\right) - 2\left(3-4\right) + 3\left(9-2\right) \\ &= -5+2+21 \\ &= 18 \neq 0 \end{aligned}$$

కాబట్టి A ఒక అవిలక్షణ మాత్రిక అందుచేత A^{-1}ఉంటుంది. ఇపుడు A లో మూలకాలకు సహగుణావయలాను కనుగొందాం.

వరుస	**మూలకాలు**	**సహగుణావయాలు**
1. మొదటి అడ్డ వరుస	1	$(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2}\ (1-6) = -5$
	2	$(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3}\ (3-4) = 1$
	3	$(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{4}\ (9-2) = 7$

2. రెండవ అడ్డు వరుస 3 $(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3}\ (2\text{-}9) = \ 7$

1 $(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{4}\ (1\text{-}6) = \ -5$

2 $(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{5}\ (3\text{-}4) = \ 1$

3. మూడవ అడ్డు వరుస 2 $(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{4}\ (4\text{-}3) = \ 1$

3 $(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{5}\ (2\text{-}9) = \ 7$

1 $(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{6}\ (1\text{-}6) = \ -5$

$\therefore$ సహగుణావయవాల మాత్రిక $= \begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 7 & -5 & 1 \\ 1 & 7 & -5 \end{pmatrix}$

$\therefore$ అ.మా. $(A) = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

$$\therefore \mathrm{A}^{-1} = \frac{(\mathrm{A})}{|\mathrm{A}|} = \frac{(\mathrm{A})}{18} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-5}{18} & \frac{7}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & \frac{-5}{18} & \frac{7}{18} \\ \frac{7}{18} & \frac{1}{18} & \frac{-5}{18} \end{pmatrix}$$

8.8.2 విలోమ ధర్మాలు:

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ **(విలోమాలకు తిరోగమ న్యాయం)**
2. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
3. $\left(A^{-1}\right)^{T} = \left(A^{T}\right)^{-1}$

8.9 మాత్రిక కోటి (Rank of Matirx):

A ఒక m x m రూపం గల మాత్రిక అనుకోండి. A లో P అడ్డు వరుసలు, S నిలువ వరుసలు వదిలివేయగా మిగిలిన మాత్రికను A కు ఉపమాత్రిక అంటాం. P, S $\leq$ m, n లలో తక్కువ సంఖ్య అని గమనించండి.

ఉదాహరణకు $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -5 & 1 \\ 6 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ అనే మాత్రికలో **2, 3** అడ్డు వరుసలు, **2, 4** వ నిలువు వరుసలు వదిలి వేయగా మిగిలిన ఉపమాత్రిక **(4, 0).** 1వ అడ్డువరుస, 3వ నిలువు వరుస వదిలివేయగా మిగిలిన ఉపమాత్రిక $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 6 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ **2** వ అడ్డు వరుస, **3, 4** నిలువు వరుసలు వదిలి వేయగా మిగిలిన ఉపమాత్రిక $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

A ఒక $m \times m$ రూపం గల మాత్రిక అయి, A లో కనీసం ఒక Pవ క్రమం గల అవిలక్షణ ఉపమాత్రిక A లో P కంటే ఎక్కువ క్రమం గల మరి ఏ ఇతర అవిలక్షణ ఉపమాత్రిక లేకపోతే, అపుడు n ను A కు కోటి అంటాం. అనగా A లో ఉన్న అన్ని అవిలక్షణ ఉపమాత్రికల క్రమాలలో ఏది పెద్దదో, ఆ క్రమాన్ని A కు కోటి అంటాం.

ఉదాహరణ - 1

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

అయితే $|A| = 0$ ఎందుకంటే మొదటి రెండు నిలువు వరుసలు అనుపాతంలో ఉన్నాయి. కాబట్టి A క్రమం నాలుగు A కు కోటి అవడానికి వీలులేదు. A లో $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ అనే ఉపమాత్రికను నిర్ధారకం **-18** అని చూపవచ్చు. కాబట్టి ఈ ఉపమాత్రిక క్రమం కంటే ఎక్కువ క్రమం గల అవిలక్షణ ఉపమాత్రిక లేదు. తక్కువ క్రమం గల అవిలక్షణ ఉపమాత్రిక ఉన్నప్పటికి అటువంటి క్రమాలలో ఈ ఉపమాత్రిక క్రమమే (అనగా 3) పెద్దది అవుతుంది. కాబట్టి ఈ మాత్రికకు కోటి 3.

8.10 మాత్రికా పద్ధతిన సమీకరణాలను సాధించుట:

సమకాలిక ఏకఘాత సమీకరణాల సాధనలో మాత్రికా విలోమం, కోటి ఉపయోగపడతాయి. ముందుగా మాత్రికా విలోమం వుపయోగాన్ని పరిశీలిద్దాం. అయితే ఈ చర్చలో మూడు అవ్యక్త రాశులలో మూడు సమకాలిక ఏకఘాత సమీకరణాలను తీసుకోవటం జరిగింది.

x_1, x_2, x_3 అను అవ్యక్త రాశులలో కింది సమీకరణాలను తీసుకోండి.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

ఇందులో a_{ij} $\left(i=1 \text{ to } 3,\ j=1 \text{ to } 3\right)$ అవ్యక్త రాసుల గుణకాలు. b_1, b_2, b_3 లు స్థిర సంఖ్యలు. ఇపుడు కింది మాత్రికలను తయారు చేద్దాం.

$$A = \text{ గుణిజాల మాత్రిక } = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$x = \text{ అవ్యక్త రాశుల మాత్రిక } = \begin{pmatrix} \times 1 \\ \times 2 \\ \times 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \text{ కుడి ప్రక్క ఉన్న స్థిర సంఖ్యల మాత్రిక } = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

A, X లు గుణకారానికి వీలుగా ఉన్న మాత్రికలని గమనించవచ్చు. కాబట్టి AX ను తయారు చేయవచ్చు. ఈ లబ్దాన్ని తయారు చేయగా

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} \text{ అని వస్తుంది.}$$

ఈ లబ్దంలో ఉన్న మూలకాలు సమీకరణాలలో ఎడమ ప్రక్క ఉన్న సమాసాలని గమనించవచ్చు. కుడి ప్రక్క $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ఉన్నది. కాబట్టి ఈ సమీకరణాలను $AX = B$ అని మాత్రికా రూపంలో వ్రాయవచ్చు. ఇపుడు A ను అవిలక్షణ మాత్రిక అనుకుంటే A^{-1} వుంటుంది. కాబట్టి $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$ అవుతుంది. అనగా $\left(A^{-1}A\right) \times = A^{-1}B$.

అనగా $IX = A^{-1}B$, అనగా, $X = A^{-1}B$ కాబట్టి $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}B$ అనగా, $A^{-1}B$ లో ఉండే మొదటి మూలకం x_1 విలువ, రెండవ మూలకం x_2 విలువ, మూడవ మూలకం x_3 విలువ.

ఉదాహరణ - క్రింది సమీకరణాలను సాధించండి.

$x + 2y\ 3z = 11$

$3x + y + 2z = 14$

$2x + 3y + z = 11$

సాధన - ఈ సమీకరణాలకు గుణిజాల మాత్రిక $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ అవ్యక్త రాశుల మాత్రిక $= \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}$

మాత్రికా విలోమాన్ని కనుగొనే పద్ధతికి ఇచ్చిన ఉదాహరణలో $|A| = 18$ అని గమనించాలి. అందుచేత A అవిలక్షణ మాత్రిక అయింది. కాబట్టి పైన చర్చించిన పద్ధతి ఈ సమీకరణాలకు వర్తిస్తుంది. అంతేకాకుండా,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{18} & \frac{7}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & \frac{-5}{18} & \frac{7}{18} \\ \frac{7}{18} & \frac{1}{18} & \frac{-5}{18} \end{pmatrix}$$ అని గమనించాం.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times = A^{-1}B$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-5}{18} & \frac{7}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & \frac{-5}{18} & \frac{7}{18} \\ \frac{7}{18} & \frac{1}{18} & \frac{-5}{18} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-55}{18} & + & \frac{98}{18} & + & \frac{11}{18} \\ \frac{11}{18} & - & \frac{70}{18} & + & \frac{77}{18} \\ \frac{77}{18} & + & \frac{14}{18} & - & \frac{55}{18} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{54}{18} \\ \frac{18}{18} \\ \frac{36}{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\therefore\ x=3,\ y=1,\ z=2$

అభ్యాసము:

ఉదాహరణ1 - $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -5 & 6\end{pmatrix}$ మరియు $B=\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ అయినచో A+B ని కనుగొనుము.

$$A+B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -5 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 4 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2-3 & 0+6\\ -5+4 & 6+1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 6\\ -1 & 7\end{pmatrix}$$

ఉదాహరణ2 - $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}$ మరియు $B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 4\\ 6 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ $A-B$ ని కనుగొనండి.

$$A-B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 3 & 4\\ 6 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1-(1) & 2-3 & -3-(4)\\ 0-6 & -1-2 & 2-0\\ 3-2 & 0-1 & 4-3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & -1 & -7\\ -6 & -3 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

ఉదాహరణ3 - $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 6 & 9\\ 7 & 6 & 2\end{pmatrix}$ మరియు $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ అయినచో $A-2B$ ని కనుగొనుము.

$$2B=2\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A - 2B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 \\ 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-0 & 3-2 & 2-0 \\ 2-2 & 6-0 & 9-0 \\ 7-0 & 6-0 & 2-2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 9 \\ 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

ఉదాహరణ4 - $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ మరియు $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ అయినచో *(i) 2A - 3B (ii) ABC* కనుగొనుము.

(1) $2A = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

$$2\mathbf{B} = 2\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore 2A - 2B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+2 & 4-0 \\ 6-4 & 8+2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

(2) $ABC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

మొదటగా *AB* కనుగొని వచ్చిన మాత్రికను *C* తో గుణిస్తే *ABC* వస్తుందని గమనించవలెను.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1+4 & 2-2 \\ -3+8 & 6-4 \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

ఉదాహరణ5 - $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{pmatrix}$ మరియు $(A+B)^2 = A^2 + B^2$ అయినచో A, B లను కనుగొనుము.

$$A^2 = A \times A$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a^2+b) & (a-1) \\ (ab-b) & (a+1) \end{pmatrix}$$

$$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (a^2+b) & a-1 \\ (ab-b) & a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b-1 & a-1 \\ (ab-b) & b \end{pmatrix}$$

అ.మా.

$$(A+B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+a & 0 \\ 2+b & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^2 = (A+B) \times (A+B)$$

$$= \begin{pmatrix} (1+a) & 0 \\ (2+b) & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+a) & 0 \\ (2+b) & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1+a)^2 & 0 \\ 2a-b+ab-2 & 4 \end{pmatrix}$$

పైన ఇవ్వబడిన విధముగా $(A+B)^2 = A^2 + B^2$ ప్రకారము

$$= \begin{pmatrix} (1+a)^2 & 0 \\ 2a-b+ab+2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b-1 & a-1 \\ ab-b & b \end{pmatrix}$$

$$(a-1) = 0 \Rightarrow a = 1$$
$$b = 4$$

ఉదాహరణ6

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ మరియు $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ అయిన $(AB)^1 = B^1A^1$ అని నిరూపించండి.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 10 & 18 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (AB)^1 = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 1 \\ 8 & 18 & 3 \end{pmatrix}$$ అవుతుంది.

అలాగే $B^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$ అవుతుంది.

$$B^1A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 & 10 & 1 \\ 8 & 18 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\therefore (AB)^1 = B^1A^1$$

ఉదాహరణ7 - నిర్ధారకాన్ని కనుగొనుము.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 10 & -2 \end{vmatrix}$$
$$3\times(-2) + (-4)\times 10 = -46$$

ఉదాహరణ8 - A యొక్క నిర్ధారకాన్ని కనుగొనుము.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(1-6) - 2(4-14) + 7(12-7)$$

$$= -15 + 20 + 35 = 40$$

ఉదాహరణ9 - A మాత్రిక యొక్క విలోమాన్ని కనుగొనండి.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2$$

$$A_{11} = 2, \qquad A_{12} = -1$$

$$A_{21} = -4, \qquad A_{22} = 3$$

$\therefore$ సహగుణావయాల మాత్రిక $= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore$ అవిలక్షణ మాత్రిక $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

ఉదాహరణ 10 -

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$ అయినచో A^{-1} కనుగొనండి.

$$A^{-1} = \frac{(A)}{|A|}$$ అవుతుంది.

$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 11,\ A_{12} = (-)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = -7,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{21} = (-)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = -9,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = 9,\ A_{23} = (-)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

$$a_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1,\ A_{32} = (-)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -2,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

సహగుణావయాల మాత్రిక $= \begin{pmatrix} 11 & -7 & 2 \\ -9 & 9 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ అవిలక్షణ మాత్రిక $(A) = \begin{pmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} & -3 & \frac{1}{3} \\ \frac{-7}{3} & 3 & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

ఉదాహరణ 11

$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ అయితే A^{-1} కనుగొనండి.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 54$$

$A_{11} = 12$, $A_{12} = 9$, $A_{13} = 4$

$A_{21} = 12$, $A_{22} = -9$, $A_{23} = -14$

$A_{31} = 6$, $A_{32} = 9$, $A_{33} = 2$

$$\therefore \text{ అవిలక్షణ మాత్రిక } (A) = \begin{pmatrix} 12 & 12 & 6 \\ 9 & -9 & 9 \\ 4 & -14 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 12 & 12 & 6 \\ 9 & -9 & 9 \\ 4 & -14 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 \\ \frac{-9}{2} & \frac{-9}{2} & \frac{9}{2} \\ 2 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

ఉదాహరణ 12 - క్రింది ఇవ్వబడిన సమీకరణముల నుండి x, y, z లను కనుగొనండి.

$x - 2y + 3z = 1$

$3x - y + 4z = 3$

$2x + y - 2z = -1$

పై సమీకరణములను మాత్రిక రూపంలో వ్రాయగా

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$AX = B$

$\therefore X = A^{-1}B$

పైన ఇవ్వబడిన ఉదాహరణ నుండి A^{-1}ను కనుగొనగా $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{-14}{15} & \frac{8}{15} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$ అవుతుంది.

$$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{-14}{15} & \frac{8}{15} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad = \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \therefore A^{-1} = \frac{\text{అవిలక్షణ మాత్రిక } (A)}{|A|}$$

ఉదాహరణ 13

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ అయినచో $A^2 - 3A + 2I = 0$

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1\times 1)+(0\times 2)+(-2\times 0) & (1\times 0)+(0\times 2)+(0\times 0) & (1\times -2)+(0\times 4)+(-2\times 2) \\ (2\times 1)+(2\times 2)+(4\times 0) & (2\times 0)+(2\times 2)+(4\times 0) & (2\times -2)+(2\times 4)+(4\times 2) \\ (0\times 1)+(0\times 2)+(2\times 0) & (0\times 0)+(0\times 2)+(2\times 0) & (0\times -2)+(0\times 4)+(2\times 2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 6 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^2 - 3A + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 6 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 6 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 6 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-3+2 & 0-0+0 & -6+6+0 \\ 6-6+0 & 4-6+2 & 12-12+0 \\ 0+0+0 & 0-0-0 & 4+6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad = 0$$

$\therefore A^2 - 3A + 2I = 0$

ఉదాహరణ 14

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ అయినచో $(AB)^T = B^T \times A^T$ అని చూపించండి.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-1 & -4+1 \\ 3-4 & -6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B^T \times A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-1 & 3-4 \\ -4+1 & -6+4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$\therefore (AB)^T = B^T.A^T$

ఉదాహరణ 15

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ అయినచో $AB \neq \mathrm{BA}$ అని చూపించండి.

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1 \\ 0+1+0 & 0+1+0 & 0+2+0 \\ 1+2+0 & 0+2+0 & 1+4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0+0+1 & 0+0+2 & 1+0+2 \\ 0+0+2 & 0+1+4 & 1+0+4 \\ 0+0+1 & 0+0+2 & 0+0+2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\therefore \mathrm{AB} \neq \mathrm{BA}$

ఉదాహరణ16

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$ అయిన A విలోమాన్ని కనుగొనండి.

$|\mathrm{A}| = 1(12-6) - 2(4-3) + 3(2-3)$

$= 6 - 2 - 3 = 1.$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{22} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

సహగుణావయాల మాత్రిక $= \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{\text{అ.వా (A)}}{A}$$

$\therefore$అవిలక్షణ మాత్రిక $= \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ఉదాహరణ17

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ అయిన $A^3 - 6A^2 + 9A - 4I = 0$ అని నిరూపించండి. A^{-1}కనుగొనండి.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4+1+1 & -2-2-1 & 2+1+2 \\ -2-2-1 & 1+4+1 & -1-2-2 \\ 2+1+2 & -1-2-2 & 1+1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A^3 = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12+5+5 & -6-10-5 & 6+5+10 \\ -10-6-5 & 5+12+5 & -5-6-10 \\ 10+5+6 & -5-10-6 & 5+5+12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 22 & -21 & 21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 21 & -21 & 22 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A^3 - 6A^2 + 9A - 4J\ =$$

$$\begin{pmatrix} 22 & -21 & 21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 21 & -21 & 22 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 22 & -21 & 21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 21 & -21 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 36 & -30 & 30 \\ -30 & 36 & -30 \\ 30 & -30 & 36 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & -9 & 9 \\ -9 & 18 & -9 \\ 9 & -9 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 40 & -30 & 30 \\ -30 & 40 & -30 \\ 30 & -30 & 40 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 40 & -30 & 30 \\ -30 & 40 & -30 \\ 30 & -30 & 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^3 - 6A^2 + 9A - 4I = 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{అ.వ}\overline{\text{ూ}}\ (A)}{A}$$

$|A| = 2(4-1)+1(-2+1)+1(1-2)$
$= 2(3)-1-1 = 4$

$A_{11} = 3 \quad A_{12} = 1 \quad A_{13} = -1$
$A_{21} = 1 \quad A_{22} = 3 \quad A_{23} = 1$
$A_{31} = 3 \quad A_{32} = 1 \quad A_{33} = 3$

సహగుణావయాల మాత్రిక $= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

ఉదాహరణ18 - క్రింది సమీకరణాలను సాధించండి క్రామర్స్ రూల్ ఉపయోగించి సాధించండి.

$4x_1 + x_2 - 5x_3 = 8$
$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12$

$3x_1 - x_2 + 4x_3 = 5$

$D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \; c = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ అనుకోండి.

$|D| = 4(12+1)-1(-8-3)-5(2-9)$
$= 52+11+35 = 98$

D_1, D_2, D_3 లను మొదటి, రెండవ, మూడవ నిలువు వరుసలలో L ను ఉంచినచో వచ్చినవి.

$D_1 = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -5 \\ 12 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

$|D_1| = 8(12+1)-1(48-5)-5(-12-15)$
$= 96-43+135$
$= 196$

$$D_2 \begin{pmatrix} 4 & 8 & -5 \\ -2 & 12 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|D_2| = 4(48-5) - 8(-8-3) - 5(-10-36)$$
$$= 490$$

$$D_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ -2 & 3 & 12 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{196}{98} = 2$$
$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{490}{98} = 5$$

$$x_3 = \frac{98}{98} = 1$$

ఉదాహరణ 19

$$x+2y+3z = 14$$
$$2x+3y+z = 11$$
$$3x+y+2z = 11$$

సమీకరణాలను సాధించండి.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$|D| = 1(6-1) - 2(4-3) + 3(2-9)$$
$$= 5 - 2 - 21 = -18$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 11 & 3 & 1 \\ 11 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|D_1| = 14(6-1) - 2(22-11) + 3(11-33)$$
$$= -18$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 2 & 11 & 1 \\ 3 & 11 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|D_2| = 1(22-11) - 14(4-3) + 3(22-33)$$
$$= -36$$

$$D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 2 & 3 & 11 \\ 3 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$
$$= 1(23-11) - 2(22-33) + 14(2-9) = 22 + 22 - 98 = -54$$

$$X = \frac{D_1}{D} = \frac{-18}{-18} = 1$$
$$Y = \frac{D_2}{D} = \frac{-36}{-18} = 2$$
$$Z = \frac{D_3}{D} = \frac{-54}{18} = 3$$

8.12 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు:

I. 1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ అయితే $2A + 2B$ ని కనుగొనండి.

2. A, B లు పై ప్రశఅనలో మాత్రికలయితే AB, BA లను కనుగొని $AB = BA$ నిజయో కాదో నిర్ణయించండి.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ అనే మాత్రికకు విలోమాన్ని కనుగొనండి.

4. "క్రామర్స్" రూలు ఉపయోగించి $7x_1 - x_2 - x_3 = 0$, $10x_1 - 2x_2 + x_3 = 8$, $6x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7$ అనే సమీకరణాలను సాధించండి.

5. మాత్రిక పద్ధతి ద్వారా, సమీకరణాలను సాధించే పద్ధతులను తెలపండి.

6. అర్థశాస్త్రంలో మాత్రిక ఉపయోగాలు సోదాహరణముగా వివరించండి.

8.13 చదువవలసిన గ్రంథాలు/సంప్రదింపు గ్రంథాలు:

1. *A.C. Chiang* : *Fundametal Methods of Mathematical Economics (The Chapter on Matrices and Determinants)*
2. *G.D. Allen* : *Mathematics for Economics (The chapter on Matrics and Determinants).*
1. *Barnald and Child* : *Higher Algebra (The chapter on Determinante)*
2. *Shanti Narayan* : *A text book on Matrices*

పాఠం సంఖ్య : 9

కేంద్రస్థానపు కొలతలు - విస్తరణ కొలతలు

(Measures of Central Tendency - Measures of Dispersion)

విషయక్రమం

లక్ష్యాలు :
- ఈ పాఠం చదివిన తరువాత మీరు
- కేంద్రీయ కొలతలు లేదా సగటు ప్రాముఖ్యత
- ఆదర్శ సగటుల ఆవశ్యకత
- వివిధ సగటులను గణనచేయు విధానం
- విస్తరణ, దాని ప్రాముఖ్యత, ఉత్తమ విస్తరణాంశములు
- విస్తరణ, వైషమ్యము, కకుదత్వములు
- వివిధ విస్తరణ కొలతలు
- వివిధ వైషమ్య కొలతలు మొ॥ వాటి గురించి తెలుసుకుంటాం.

9.1. ఉపోద్ఘాతము

సాధారణ భాషలో "సరాసరి'' అనే పదాలను ఉపయోగిస్తుంటాము. ఈ పదాలను సమానము అనే అర్థములో వాడటము జరుగుతుంది. ఎక్కువతక్కువ కాదని దీని భావము. కాని గణాంకశాస్త్రములో దీని అర్థము ఇంకొకరకముగా తెలియజేస్తారు. చలనాల వ్యక్తిత్వపు విలువలు సగటు చుట్టు చేరటము వలన అటువంటి విలువలు అత్యధిక, అత్యల్ప విలువలకు మధ్యస్థంగా ఉంటాయి. అందువలన సగటును కేంద్రస్థానపు కొలత అని అందురు. కొన్ని విలువలు మధ్యస్థానంలో కేంద్రీకృతము కావడము వలన వాటి కొలతలు కేంద్రస్థానపు కొలతలు అనికూడా పిలిచెదరు.

"డి.సి.జోన్సు'' అభిప్రాయములో సగటు అనగా ఏక కుటుంబానికి చెందిన కొన్ని పరిమాణాలు లేదా ఫలితాలను కుదించి చెప్పే గణాంక సంఖ్యల తరగతికి చెందిన దానిని సగటు అని వివరించడము జరిగినది. సగటు నిర్దుష్టముగాను, సమగ్రముగాను, సులభముగాను ఉండవలయును.

ఒక వర్గపు విలువలకు ప్రాతినిధ్యం వహించే 'ఏకవిలువ' ను (Single Value) సగటుగా గుర్తించినాము.

కేంద్రస్థానపు కొలతలు స్పష్టంగా, నిర్దుష్టంగా చెప్పవలెను. కేంద్రస్థానపు కొలతలు అనేక తరగతులుగా ఉన్నాయి. ప్రతి ఒక్కదానికి కొన్ని లక్షణాలు (Characteristics) లాభాలు, నష్టాలు ఉన్నాయి. మనము ఈ పాఠంలో అయిదు సగటుల గురించి తెలుసుకొంటాము. అవి -

1. అంకమధ్యమము (Arithmetic Mean)
2. మధ్యగతము (Median)
3. బాహుళకము (Mode)
4. గుణమధ్యమము (Geometric Mean)
5. హరమధ్యమము (Harmonic Mean)

పైన పేర్కొన్న సగటులలో అంకమధ్యమము, గుణమధ్యమము, హరమధ్యమము, గణనచేస్తే వచ్చిన సగటులు (Calculated Averages). మిగిలిన మధ్యగతము, బాహుళకము, స్థాన నిర్ణయ (positional) సగటు లంటారు.

9.2. అంకమధ్యమము (Arithmetic Mean)

సామాన్య మానవుడు ప్రతినిత్యము ఉపయోగించే పదము "సరాసరి లేదా సగటు'' కు, గణాంకశాస్త్ర పరిభాషలో (Statistical Terminology) అంకమధ్యమ మంటారు. ఇది గణాంక సగటులలో ఒక రకము. అంటే అంకమధ్యమము గణనరూపమైన సగటని (Calculated Average) అర్థము.

వ్యక్తి శ్రేణుల నుంచి అంకమధ్యమము :

"శ్రేణులలో ఉన్న అంశాల మొత్తాన్ని అంశాల సంఖ్యతో భాగిస్తే వచ్చే వ్యుత్పన్నమే అంకమధ్యమము. ఉదాహరణకు దత్తాంశములోని చలనాలు 6, 11, 16 అయినప్పుడు వాటి అంకమధ్యమము $\frac{6+11+16}{3}=\frac{33}{11}=11$ కు సమానమవుతుంది.

పై నిర్వచనాన్నే సాంకేతికంగా చూపవలసివస్తే $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ అనే N సంఖ్యల అంకమధ్యమము

చలనాల విలువల సంకలనము / చలనాల సంఖ్య

అంక మాధ్యానికి సాంకేతికము $\overline{X}$ (X - బార్ అని చదవవలెను) లేదా $\overline{X} = \frac{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n}{N}$

లేదా $\overline{X} = \frac{\sum x}{N}$ అవుతుంది.

దీనిలో $\overline{X}$ = అంక మధ్యమము

$\sum$ = సంకలనము

x = చలనము విలువ

N = చలనాల సంఖ్య

అంకమధ్యమము - గణన (దగ్గర పద్ధతి) :

ఒక్కొక్కప్పుడు అంకమధ్యమము గణన చాలా కష్టమవుతుంది. అంతేకాకుండా పైన పేర్కొన్న ప్రత్యక్ష పద్ధతి ఎక్కువ విలువలు వున్నప్పుడు ఉపయోగించడం కష్టము. అటువంటి పరిస్థితులలో దగ్గర పద్ధతి చాల ఉపయోగపడుతుంది. "వ్యక్తి శ్రేణుల విచలనాల బీజీయ సంకలనము అంకమధ్యమం నుంచి 'సున్నా'కు సమానమవుతుంది అనే ముఖ్య ధర్మం ఆధారంగా సులభ పద్ధతి వ్యాప్తిలోకి వచ్చింది.

ఈ ముఖ్య ధర్మము ఆధారంగా చేసుకొని దగ్గరపద్ధతిలో మనమొక సగటును ఊహించుకొంటాము. అట్లా ఊహించిన మధ్యమం నుంచి విచలనాలను తీసుకొనవలెను. ఊహామాత్రపు అంకమధ్యమం నుంచి వచ్చిన విచలనాల మొత్తము శ్రేణులలో ఉన్న అంశాలన్నిటి విచలనాల మొత్తము. విచలనాల సంకలనాన్ని మొత్తం విలువల సంఖ్యచే భాగిస్తే ఒక్కొక్క విలువకి ఉన్న సగటు తేడా తెలుస్తుంది. అటువంటి తేడాను మనము ఊహించిన సగటుకు కలిపితే నిజమైన అంకమద్యము వస్తుంది.

ఊహించిన అంకమధ్యము A అనుకుంటే దాని నుంచి వచ్చే విచలనాలను $f(x)$ అనుకొందాము. N సంఖ్యల మొత్తము విచలనము $\sum dx$ అయితే, ఒక్కొక్క అంశానికి $\frac{\sum dx}{N}$ అవుతుంది. అందువల్ల ఈ తేడాను ఊహించిన అంకమధ్యము A కు కలిపినపుడు నిజమైన అంకమధ్యమం వస్తుంది. అంటే $\bar{x} = A + \frac{\sum dx}{N}$

విచ్ఛిన్న శ్రేణులు :

ప్రత్యక్ష పద్ధతి : విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో ఉన్న చలనాల విలువలను వాటి అనుబంధ పౌనఃపున్యము చేత గుణిస్తే వచ్చిన లబ్దాల సంకలనాన్ని మొత్తము సంఖ్యతో భాగిస్తే అంకమధ్యమము అంటారు. విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో మొత్తము సంఖ్య అంటే పౌనఃపున్య మొత్తము $(\sum f = N)$.

$x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ లు సంఖ్యలున్న N చలనాలనుకుంటే

వాటి అనుబంధ పౌనఃపున్యాలు $f_1, f_2, f_3 ...., f_n$ అయితే

అంకమధ్యము $\overline{X} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + ... + x_n f_n}{N}$ అవుతుంది. $= \frac{\sum x f}{N}$

అంకము $\sum x f$ = చలనాలను వాటి పౌనఃపున్యంతో గుణిస్తే వచ్చిన లబ్దాల మొత్తము

N = మొత్తము సంఖ్యలు అంటే మొత్తం పౌనఃపున్యం $\sum f$

దగ్గర పద్ధతి : దగ్గర పద్ధతిని విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో కూడా ఉపయోగించవచ్చు. విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో ఊహించిన సగటునుంచి వచ్చే విచలనము ఒక్క విలువకి సంబంధించినది కాబట్టి మొత్తము విలువల సంఖ్యతో అంటే పౌనఃపున్యంతో విచలనాలను గుణిస్తే వచ్చిన లబ్ధము మొత్తము సంఖ్యల విచలనమవుతుంది. అట్లా వచ్చిన లబ్ధాల సంకలనాన్ని మొత్తం సంఖ్యతో (పౌనఃపున్యము) భాగించినపుడు సగటు విచలనము వస్తుంది. ఈ సగటు విచలనాన్ని ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమానికి కలిపినపుడు నిజమైన అంకగణిత మధ్యమము వస్తుంది.

సాంకేతికంగా $\overline{X} = A + \left(\frac{\sum fdx}{N}\right)$

ఇక్కడ A = ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమము

$\sum f\ dx$ = విచలనాలను వాటి పౌనఃపున్యంతో గుణించగా వచ్చిన లబ్ధాల సంకలనము.

N = మొత్తము సంఖ్య లేదా పౌనఃపున్యము.

సోపాన విచలనాలు : విచలనాలకు సమాన లక్షణము తీసుకుంటే వచ్చే విచలనాలను సోపాన విచలనాలు అంటారు. అప్పుడు అంకగణిత మాధ్యమగణనకు సూత్రము ఇట్లా వుంటుంది.

$$\overline{X} = A \pm \left(\frac{\sum fdx}{N}\right) \times i$$

ఇక్కడ A = ఊహించిన అంకమధ్యమము

$\sum f\ dx$ = సోపాన విచలనాలను వాటి పౌనఃపున్యంతో గుణించగా వచ్చిన లబ్ధాల సంకలనము.

N = మొత్తము సంఖ్య (పౌనఃపున్యము)

f = విచలన సమాన లక్షణము.

విచ్ఛిన్న శ్రేణులు : అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో వివిధ తరగతుల అంతరాల మధ్య బిందువులను తీసుకొని, వాటినుపయోగించి అంకమధ్యాన్ని గణన చేయవలసి ఉంటుంది. తరగతి అంతరాల మధ్య బిందువులు తీసుకొంటే విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో ఉపయోగించిన సూత్రాలనే ఉపయోగించి అంకమధ్యమాన్ని సులువుగా కనుగొనవచ్చును. తరగతుల మధ్య బిందువులను వాటి పౌనఃపున్యంతో గుణించవలసి వుంటుంది. అట్లా గుణించగా వచ్చిన లబ్ధాల సంకలనాన్ని మొత్తం సంఖ్యతో భాగిస్తే అంకమధ్యమము వస్తుంది.

అంకమధ్యమము - లాభ నష్టాలు :

లాభాలు :

1. అంకమధ్యమాన్ని అతిసులువుగా అర్థం చేసుకోవచ్చు. సామాన్య మానవుడికి "సగటు" అంటే అంకమధ్యము అని అర్థమవుతుంది.
2. సగటు అన్ని అంశాలమీద ఆధారపడవలెననే ముఖ్య లక్షణాన్ని కూడా నిర్వర్తిస్తుంది. ఏ ఒక్క అంశము తెలియకపోయినా అంకమధ్యపు గణన అసాధ్యమే.
3. ఇది స్పష్టంగాను, ఖచ్చితంగాను నిర్వహించబడిన సగటు.
4. ఇది బీజీయ ప్రస్తావనకు వీలుగా ఉండును.

నష్టాలు :

1. అతిస్వల్ప, అతిపెద్ద అంశాల వల్ల అంకమధ్యమము బాగా ప్రాభావితం అవుతుంది.
2. అంకమధ్యమము ఒక్కొక్కప్పుడు అసహజ ఫలితాలనిస్తుంది.
3. ఒక్క అంకమధ్యాన్ని తెలుసుకొని విలువలన్నిటికి తెలుసుకోవడం వల్ల ఒక్కొక్కప్పుడు మోసపోవలసి వస్తుంది.
4. అంకమధ్యాన్ని కేవలం పరిశీలన వల్ల కనుగొనలేము.

9.3. భారిత అంకమధ్యమము (Weighted Arithmetic Mean):

అంకమధ్యమం గణన చేయడంలో అంశాలన్నిటికి సమానత్వం కలదు. వ్యక్తిగతంగా విలువలకు వేర్వేరు ప్రాముఖ్యాలున్నప్పుడు అన్ని విలువలకు సమాన ప్రాముఖ్యం ఇవ్వడం ఒకరకంగా తప్పుత్రోవ పట్టించడం అవుతుంది. సాపేక్షత ప్రాముఖ్యాన్ని అలక్ష్యం చేయడం వల్ల సగటుల యదార్థత కనబడదు. ఉదాహరణకు ఒక పనిని ఒక పురుషుడు, ఒక స్త్రీ ఒక బాలుడు పూర్తి చేసారనుకొందాము. మొత్తం పనిని పూర్తిచేయడానికి మనం చెల్లించిన కూలి రు. 9 ను, ముగ్గురు పనివారికి సమానంగా (సగటున) రూ. 3 చొప్పున చెల్లించినపుడు అది సమంజసంగా ఉండదు. కారణమేమంటే వారు ముగ్గురు పనివారే అయినా వారి పని సాపేక్షత ప్రాముఖ్యాలు వేర్వేరుగా ఉన్నాయి. కాబట్టి రూ. 3 కూలిని చెల్లించేముందు వారి వ్యక్తిగత ప్రాముఖ్యాన్ని తెలుసుకొని ఆ మొత్తాన్ని వారికి పంచవలెను. అంటే పురుషుడు చేసే పనిలో $\frac{3}{4}$ వంతు స్త్రీలు, మళ్ళీ $\frac{1}{2}$ వంతు బాలుడు చేస్తారనుకొంటే మొత్తం చేసే పని $1+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$ లేదా $(4:3:2)=\frac{9}{4}$ అవుతుంది. అప్పుడు మొత్తం కూలిని వాళ్ళు చేసేపని నిష్పత్తిలో పంచినపుడు మగవాడికి రూ. 4, స్త్రీకి రూ. 3, బాలునికి రూ. 2 చొప్పున చెల్లించవలసి వుంటుంది.

విలువల సాపేక్షిక ప్రాముఖ్యాన్ని బట్టి భారాలు ఏర్పడతాయి. చలనాలను వాటి భారాలతో గణిస్తే వచ్చిన లబ్దాల సంకలనాన్ని వాటి మొత్తపు భారాలచే భాగిస్తే వచ్చే ఫలితాన్ని భారాల అంకమధ్యమము అంటారు.

సాంకేతికంగా -

$x_1, x_2, x_3, ...x_n$ లు N సంఖ్యలున్న చలనానికి వాటి అనురూప భారాలు $w_1, w_2, ...w_n$ అనుకొందాము. అప్పుడు భారిత అంకమధ్యమము $\frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + ... + x_n w_n}{w_1 + w_2 + ... + w_n} = \frac{\sum xw}{\sum w}$

ఇక్కడ $\sum xw$ చలనాలను వాటి భారాలతో గుణిస్తే వచ్చిన లబ్దాల సంకలనము, $\sum w$ భారాల మొత్తము.

భారిత అంకమధ్యమం లక్షణాలు :

1. అన్ని అంశాలకు సమాన భారాలిచ్చినపుడు, భారిత అంకమధ్యమము సామాన్య అంకమధ్యానికి సమానంగా ఉంటుంది.
   సామాన్య అంకమధ్యమం = భారిత అంకమధ్యమం
2. పెద్ద అంశాలకు చిన్న భారాలు, చిన్న అంశాలకు పెద్ద భారాలు ఇచ్చినపుడు అంకమధ్యమం, భారిత అంకమధ్యమం కంటే ఎక్కువగా ఉంటుంది.
   అంకమధ్యమము > భారిత అంకమధ్యము $> a > wa$
3. పెద్ద అంశాలకు పెద్ద భారాలు, చిన్న అంశాలకు చిన్న భారాలు, ఇచ్చినపుడు సాధారణ అంకమధ్యమం కంటే తక్కువగా ఉంటుంది.

   అంకమధ్యమము < భారిత అంకమధ్యమము $a < wa$

భారిత అంకమధ్యమపు ఉపయోగము :

భారిత అంకమధ్యమము రెండుగాని అంతకంటె ఎక్కువగాని ఉన్న దత్తాంశంలో ఆధిక్యతను పోల్చి చెప్పటానికి, ప్రామాణీకృత మరణాల రేటు, ప్రామాణీకృత జననాల రేటులను గణన చేయడానికి, ఇంకా సూచీసంఖ్యలు నిర్మించడానికి చాలా ఉపయోగపడుతుంది. మనము కనుక్కొమనిన సగటు మాద్యాల మద్యమము అయినప్పుడు భారిత అంకమధ్యమము ప్రత్యేకముగా ఉపయోగపడుతుంది.

ఉదా : 9.1. ఈ క్రింది 10 కుటుంబాల సంవత్సరాదాయము నుండి సగటు ఆదాయము కనుగొనండి.

కుటుంబము	ఆదాయము	విచలనాలు dx
A	1,200	1,300
B	1,500	1,000
C	1,800	700
D	2,000	500
E	2,500	-0-
F	3,000	+ 500
G	2,290	- 300
H	3,500	+ 1,000
I	3,700	+ 1,200
J	2,000	+ 400
N = 10	m = 24,300	dx = - 700

ఈ విధమైన వివరాలను బట్టి అంకమధ్యమము లేదా సగటును ప్రత్యక్ష పద్ధతి ద్వారా లేదా పరోక్ష పద్ధతి ద్వారా కనుగొనవచ్చును.

సూత్రము : $X = \frac{m}{n} = \frac{23,490}{10} = 2,349$, సగటు ఆదాయము : **2,349** రూ.లు.

అంకమధ్యమము : ఉదా : 9.2. దిగువ దత్తాంశములలో 80 మంది వ్యక్తుల రాబడులున్నాయి. వాటి సగటు రాబడి గణన చేయండి.

రాబడి రూపాయలలో :	30-50	50-70	70-100	100-110	110-120	120
వ్యక్తుల సంఖ్య :	8	12	20	30	7	3

రాబడి రూపాయలలో	వ్యక్తుల సంఖ్య (f)	మధ్యబిందువులు $(M.V.)$	ఊహించిన సగటు నుండి విచలనాలు (dx)	లబ్ధము $f\ dx$
30 - 50	8	40	- 45	- 360
50 - 70	12	60	- 25	- 300
70 - 100	20	85	0	0
100 - 110	30	105	+20	+600
110 - 120	77	115	+30	+210
120 - 130	3	125	+40	+120

మొత్తం : N = 80 $\sum f\ dx =$ +930 - 660 = 270

ఊహించిన సగటు 85 అయితే i.e. a

అంక మధ్యమము : $\overline{X} = a + \frac{\sum f\, dx}{N}$

అంక మధ్యమము $85 + \frac{270}{80} = 85 + 3.37$

వ్యక్తి సగటు రాబడి : $= 88.37$

ఉదా : 9.3. అంకమధ్యమం గణన చేయండి.

విద్యార్థుల సంఖ్య 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50

వచ్చిన మార్కులు 30, 32, 24, 20, 35, 38, 40, 20, 42, 50

విద్యార్థుల సంఖ్య	**మార్కులు**	$f_i\, x_i$
5	1	150
10	32	320
15	24	360
20	20	400
25	35	875
30	38	11,100
35	40	1,400
40	20	800
45	42	1,890
50	50	2,500

$\sum f_i = 331$ $\sum f_i\ x_i = 9{,}835$

$$Mean = \frac{\sum f_i\, x_i}{\sum f_i} = \frac{9835}{331} = 29.7129$$

ఉదా : 9.4. ఒక తరగతి నందలి 5 మంది విద్యార్థుల బరువు క్రింది విధముగా ఉన్నది. ఆ విద్యార్థుల సగటు బరువును గణన చేయండి.

వరుస సంఖ్య	:	1	2	3	4	5
బరువు కిలోలలో	:	35	40	38	42	45

అంకమధ్యమము : 40 కిలోలు (సగటు విద్యార్థి బరువు)

విచ్ఛిన్న శ్రేణులు - ప్రత్యక్ష పద్ధతి :

ఈ పద్ధతిలో ప్రతి చలనాన్ని పౌనఃపున్యంచే గుణించవలెను. $[fx]$ లబ్ధాలన్నింటిని కూడవలెను. $[\sum fx]$ పౌనఃపున్య మొత్తాన్ని కూడవలెను.

క్రింది సూత్రం ద్వారా అంకమధ్యమాన్ని గణన చేయవలెను. $\overline{X} = \frac{\sum fx}{\sum f}$

ఉదా : 9.5. ఒక ఫ్యాక్టరీ నందలి 20 మంది కార్మికుల వేతనాలలో, ఒక్కొక్క శ్రామికుని సగటు వేతనమును లెక్కించండి.

వేతనము రూ. (X)	కార్మికుల సంఖ్య (f)	fx
5	2	10
8	5	40
100	3	30
15	6	90
20	4	80
మొత్తం	$\sum +20$	$\sum fx = 250$

$$\overline{X} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{250}{20} = 12.5$$

అంకమధ్యమము గణన - అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు - ప్రత్యక్ష పద్ధతి :

ఈ పద్ధతిలో తరగతి అంతరాలమధ్య విలువను కనుగొనవలెను. $[x]$ ప్రతి మధ్య విలువను దాని పౌనఃపున్యములో గుణించవలెను. $[fx]$ గుణించగా వచ్చిన లబ్ధాలను కూడి $[\sum fx]$ వచ్చిన దానిని పౌనఃపున్య మొత్తాలలో $[\sum f]$ చే భాగించగా వచ్చిన భాగఫలమే అంకమధ్యమము.

ఉదా : 9.6. క్రింది దత్తాంశపు అంకమధ్యమాన్ని గణన చేయండి.

మార్కులు :	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
విద్యార్థుల సంఖ్య :	12	15	28	25	20

వివరణ :

మార్కులు	మధ్యవిలువ x	విద్యార్థుల సంఖ్య f	fx
0 - 10	5	12	60
10 - 20	15	15	225
20 - 30	25	28	700
30 - 40	35	25	875
40 - 50	45	20	900
మొత్తం		$\sum f = 100$	$\sum fx = 2760$

అంకమధ్యమము = 27.6

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు - పరోక్ష లేక దగ్గర పద్ధతి :

ఈ పద్ధతిలో ప్రతి తరగతి యొక్క మధ్యవిలువను కనుగొనవలెను. మధ్య విలువ నుండి ఒక దానిని ఊహించిన సగటుగా తీసుకొనవలెను. పౌనఃపున్యము నుండి ఊహించిన సగటును తీసివేసి విచలనాలను లెక్కించవలెను. లబ్దాలను కూడగా వస్తుంది. పౌనఃపున్యాలను కూడగా వస్తుంది. అంకమధ్యమము క్రింది సూత్రం ద్వారా లెక్కించవలెను.

$$\overline{X} = A + \frac{\sum f\, dx}{\sum f}$$

ఉదా : 9.7. క్రింది ఇచ్చిన దత్తాంశముకు అంకమధ్యమమును లెక్కించుము.

బరువు కిలోలలో	48 - 52	52 - 56	56 - 60	60 - 64	64 - 68	68-72
విద్యార్థుల సంఖ్య	6	12	28	30	20	4

బరువు x	**మధ్యవిలువ** **M.V.**	**పౌనఃపున్యము** (f)	**విచలనము** **dx (Mv - A)**	$f\,dx$
48 - 52	50	6	-	-72
52 - 56	55	12	- 8	- 96
56 - 60	58	28	- 4	112
60 - 64	62	30	0	- 80
64 - 68	66	20	+4	+32
68 - 72	70	4	+8	
		$\sum f$ 100	$\sum f\, dx -168$	

$$\overline{X} = A + \frac{\sum f\, dx}{\sum f} = 62 + \frac{-168}{100} = 62 + (-1.68) = 62 - 1.68 = 60.32$$

ఉదా : 9.8 ప్రథమ, ద్వితీయ మరియు తృతీయ సంవత్సరాల్లోని విద్యార్థులకు అర్థశాస్త్రంలో వచ్చిన సగటు మార్కులు ఈ క్రిందివిధంగా వున్నాయి. మూడు సంవత్సరాల విద్యార్థులకు సమగ్ర అంకమధ్యమాన్ని (Combined Arithmetic Mean) **గణించండి?**

సాధన :

సంవత్సరము	సగటు మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
ప్రథమ	57	30
ద్వితీయ	60	45
తృతీయ	63	25

$$\overline{X}_{123} = \frac{N_1 \overline{X} + N_2 \overline{X}_2 + N_3 \overline{X}_3}{N_1 + N_2 + N_3} = \frac{30 \times 57 + 45 \times 60 + 25 \times 63}{30 + 45 + 25}$$

$$\overline{X}_{123} = \frac{1710+2700+1575}{100} = \frac{5985}{100} = 59.85$$

మూడు సమూహాల సగటు = మూడు సమూహాల్లోని అంశాల విలువ మొత్తం మూడు సమూహాల్లోని అంశాల సంఖ్య.

$$\overline{X}_{123} = \frac{\sum X_1 + \sum X_2 + \sum X_3}{N_1 + N_2 + N_3} \text{ కాని } \sum X_1 = N_1 \overline{X}_1$$

$$\text{కాబట్టి } \overline{X}_{123} = \frac{N_1\overline{X}_1 + N_2\overline{X}_2 + N_3\overline{X}_3}{N_1 + N_2 + N_3}$$

9.4. మధ్యగతము (Median):

మధ్యగతాన్ని స్థానాన్ని పురస్కరించుకొని నిర్ణయిస్తాము. స్థాన మంటే ఇక్కడ శ్రేణులలో క్రమానుగతమైన ఉనికి అని గ్రహించవలెను. ఈ విషయాన్నే యూల్ కెంటెల్ అనే శాస్త్రజ్ఞులు ఈవిధంగా నిర్వచించినారు " పరిమాణాలను బట్టి విలువను సక్రమంగా అమర్చినప్పుడు, వాటి కేంద్ర విలువ, లేదా అధికమైన అల్పమైన విలువలు సమాన పౌనఃపున్యంతో ' ఏ విలువకు' రెండు ప్రక్కలా అమరిఉంటాయో ఆ విలువను మధ్యగతంగా నిర్వచించవచ్చు.

వ్యక్తిగత శ్రేణులలో మధ్యగతాన్ని గణించడం : వ్యక్తిగత శ్రేణులలో మధ్యగత స్థానాన్ని నిర్ణయించడానికి విలువల పరిమాణాన్ని బట్టి వృత్తాంశాన్ని బట్టి అమర్చుకోవలె. అట్లా ఏర్పరచిన విలువలను ఆరోహణక్రమంలోగాని; అవరోహణక్రమంలో గాని ఉండవచ్చు. తరువాత వాటి మధ్యస్థానాన్ని గుర్తించవచ్చు. విలువలను వాటి పరిమాణాల క్రమంలో అమర్చిన తరువాత సర్వసాధారణంగా సంఖ్యల మధ్యగత స్థానాన్ని $\frac{N+1}{2}$ వ విలువగా తీసుకొంటాము.

ఒక్కొక్కప్పుడు దత్తాంశంలో సరిసంఖ్య లుండటం కూడ కద్దు. అటువంటి స్థానంలో శ్రేణుల మధ్యస్థానంగా, నిజమైన విలువలు ఉండటం అసంభవము. అందువల్ల ఏ రెండు విలువల మధ్య, మధ్యస్థానము గుర్తించబడిందో ఆ విలువల సగటును మధ్యగతంగా చెప్పవచ్చు.

మధ్యగతము - విచ్ఛిన్న శ్రేణులు : మధ్యగతాన్ని తెలుసుకోవడానికి విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో కూడా దత్తాంశాన్ని అమర్చుకొని ఆరోహణ లేదా అవరోహణ క్రమాలలో వాటి పరిమాణాలను బట్టి వ్రాయవలెను. తరువాత వాటి పౌనఃపున్యాలను వాటి కెదురుగా వ్రాయవలెను. అట్లా వ్రాసిన పౌనఃపున్యాలను సంచితము చేస్తే విలువల ముఖ్య విలువలను సులువుగా కనుగొనవచ్చును.

మధ్యగతము - అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు : అవిచ్ఛిన్న శ్రేణుల నుండి మధ్యగతాన్ని గణన చేయడంలో రెండు పద్ధతులు గలవు. అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో ప్రత్యేకించి ఒక విలువని తెలుసుకోవలసిన ప్రయత్నము అవసరం లేదు. కాని వక్రరేఖపై ప్రత్యేక బిందువును కనుక్కోవలసిన అవసరం వున్నది.

అట్లా గుర్తించడానికి పౌనఃపున్య మొత్తములు అయితే దాని మధ్య బిందువు $\frac{N}{2}$ గా గుర్తించవలె. అంటే వక్రరేఖ వైశాల్యాన్ని రెండు సమాన భాగాలుగా చేయవలెను. వ్యక్తిగత శ్రేణులలోను, విచ్ఛిన్న శ్రేణులలోను చేసినట్లుగా మొత్తము పౌనఃపున్యానికి ఒకటి కలిపి రెండుతో భాగించగా $\frac{N+1}{2}$ వంటివి చేయనక్కరలేదు. దత్తాంశంలోఖచ్చితమైన విలువలు, ఇంకా

వ్యక్తిగత విలువలు స్పష్టంగా తెలుసుకోవచ్చు. అయితే $\frac{N}{2}$ వ విలువ ఇక్కడ మనకు 'మధ్యగతమైన తరగతినే' ఇవ్వగలదు. మొత్తం విభాజనంలో మధ్య విలువ ఏ తరగతి అంతరాల మధ్య ఉంటుందో దానిని మధ్యగతమైన తరగతి అని అంటారు. మొత్తం పౌనః పున్యాలను సంచితం చేసి, వచ్చిన మొత్తంలో $\frac{N}{2}$ కనుక్కొంటే మధ్య విలువ తెలుస్తుంది. అప్పుడా విలువున్న సంచిత పౌనఃపున్యం ఏ తరగతిలో ఉన్నదో తెలుసుకుంటే, అది మధ్యగతమైన తరగతి అవుతుంది.

మధ్యగతమైన తరగతిని నిర్ణయించిన తరువాత -

మధ్యగతము $M = \frac{l + \frac{N}{2} - p.c.f.}{f} \times i$

ఇక్కడ l = మధ్యగతమైన తరగతిలో దిగువ అవధి

$p.c.f.$ = మధ్యగత స్థానానికి ముందు (preceeding) ఉన్న తరగతి సంచిత పౌనఃపున్యానికి / ఉండే తేడా

i = తరగతి అంతరము

f = మధ్యగతమైన తరగతి పౌనఃపున్యము

N = మొత్తం పౌనఃపున్యము

ఏ చివరనుంచి మధ్యగతాన్ని గణన చేసినప్పటికి వచ్చే ఫలితము సమానంగా ఉంటుంది. అంటే దిగువ అవధికి బదులు ఎగువ అవధిని కూడా తీసుకొని గణన చేయవచ్చు.

మధ్యగతము - ప్రయోజనము - లోపాలు :

1. మధ్యగతాన్ని సులభంగా గణన చేయవచ్చు. చాలా త్వరితంగా అర్థం చేసుకోవచ్చు.
2. ఇది విపరీత అంశాల వల్ల ప్రభావితం కాదు.
3. వివృత అవధులున్న తరగతులున్నప్పుడు ప్రత్యేకంగా ఇది ఉపయోగపడుతుంది.
4. గుణాత్మక దత్తాంశాన్ని ఉపయోగించేటప్పుడు, అంటే తెలివితేటలు, బీదరికము, అంతస్థులు మొ॥ కనుగొనడానికి ఇది చాలా ఉపయోగపడుతుంది.
5. అంకమధ్యము వలె కాక, మధ్యగతాన్ని అసంపూర్తి దత్తాంశాన్ని ఇచ్చిన, అసమాన తరగతి అంతరాలలో ఇచ్చిన గణన కనుగొనవచ్చును.
6. రేఖాచిత్ర పటం వల్ల మధ్యగతాన్ని నిర్ణయించవచ్చు. కాని అంకమధ్యాన్ని అట్లా గుర్తించడం సాధ్యం కాదు.
7. ఎక్కువ విషయాలలో దీనిని పరిశీలించి చెప్పవచ్చు.

లోపాలు :

1. ఇది స్థానాన్ని బట్టి నిర్ణయించే సగటు కాబట్టి సరిసంఖ్య గల అంశాలున్నప్పుడు నిజమైన కనుక్కోవడం సాధ్యం కాదు.
2. బీజీయ ప్రస్తావనకు ఇది నిలబడలేదు.
3. ఎక్కువ విషయాలలో ఇది దత్తాంశానికి ప్రాతినిధ్యం వహించే సగటుగా ఉండదు.
4. ఇది విపరీత అంశాలను పరిగణనలోనికి తీసుకోనదు.
5. దత్తాంశాని - "కంటే తక్కువ" - "కంటే ఎక్కువ" అనే రూపాలలో ఇచ్చినపుడు పౌనఃపున్యాన్ని సంచితం చేసి "ఆరోహణ" "అవరోహణ" క్రమాలలో అమర్చుకోవడం ఒక్కొక్కప్పుడు చాలా కష్టము.

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు - మధ్యగత గణన :

ఈ పద్ధతి ప్రకారము మధ్యగతమును లెక్కించుటకు ఇచ్చిన దత్తాంశమును క్రమముగా (లేనట్లయితే) అమర్చవలెను. పౌనఃపున్యమును సంచిత పౌనఃపున్యము లోకి మార్చవలెను. 12 సూత్ర సహాయంతో మధ్యగత అంశం కనుగొనవలెను. ఈ మధ్యగత అంశం ఏ తరగతిలో ఉన్నదో పరిశీలించి, ఆ తరగతిని మధ్యగత తరగతిగా నిర్ణయించవలెను. మధ్యగతమును గణన చేయుటకు క్రింది సూత్రమును ఉపయోగించవలెను.

$$M = l_1 + \frac{l_2 + l_1}{f_1}(m - c)$$

2. మధ్యగతము : l_1 మధ్యగత దిగువ అవధి, $l_2 =$ మధ్యగత ఎగువ అవధి

ఉదా : 9.9. మధ్యగత తరగతి అవధి మధ్యగత తరగతి పౌనఃపున్యము 'm' మధ్యగతి అంశము. 'C' మధ్యగత తరగతికి ముందున్న తరగతి యొక్క సంచిత పౌనఃపున్యము. క్రింది దత్తాంశమునకు మధ్యగత విలువ గణన చేయుము.

తరగతి	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60
పౌనఃపున్యము	5	15	30	25	20	5

తరగతి	**పౌనఃపున్యము**	**సంచిత పౌనఃపున్యము**
0 - 10	5	5
10 - 20	15	20
20 - 30	30	50
30 - 40	25	75
40 - 50	20	95
50 - 60	5	100

మధ్యగత అంశము N/2 = 100/2 = 50 మధ్యగత తరగతి 20 - 30

$$l_1 = 20,\ l_2 = 30,\ f_1 = 30,\ m = 50,\ c = 20 \ = m = 20 + \frac{30-20}{30}(50-20) = 20+10=30$$

కాబట్టి రేఖాచిత్ర పద్ధతి ద్వారా కనుక్కొన్న మధ్యగతము, సూత్రం ద్వారా గణన చేసిన దానికి సమానంగా వుందని చెప్పవచ్చు.

ఉదా : 9.10. ఈ క్రింది ఇచ్చిన దత్తాంశం నుండి మధ్యగతాన్ని రేఖాచిత్రపటం ద్వారా కనుక్కోండి?

ఈ దత్తాంశంలోని పౌనఃపున్యాలను ఆరోహణ క్రమంలో సంచితం చేసి క్రింద చూపడమైనది.

ఆదాయము రూ॥లలో	**కుటుంబాల సంఖ్య** (f)	**సంచిత పౌనఃపున్యం** $(C.F.)$
125 - 150	7	7
150 - 175	12	19
175 - 200	21	40 - Median Class
200 - 225	14	54
225 - 250	10	64
250 - 275	3	67
275 - 300	3	N = 70

మధ్యగతం లేదా $Median = \frac{N}{2}$ వ అంశం విలువ = $\frac{70}{2}$ వ అంశం విలువ = 35 వ అంశం విలువ.

35వ అంశం 40వ సంచిత పౌనఃపున్యంలో చేరి ఉంది. కనుక ఆ పౌనఃపున్యానికి ఎదురుగా వున్న 175 - 200 తరగతి మధ్యగతి తరగతి అవుతుంది. ఈ తరగతిలో 35వ అంశం విలువ ఎంతో అంతర్వేశనం ద్వారా కనుక్కోవాలి. ఈ సూత్రం ప్రకారం

$$\text{మధ్యగతం లేదా } Median = l_1 + \left(\frac{\frac{N}{2} - c.f.}{f} \right) \times i$$

ఇక్కడ $l_1 = 75$ (మధ్యగత తరగతి దిగువ అవధి)

$i = 25$ (మధ్యగత తరగతి అంతరం)

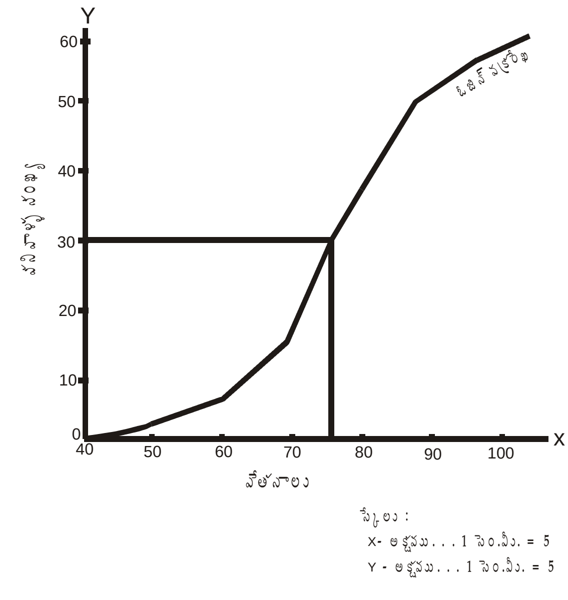
$C.F. = 19$ మధ్యగత తరగతికి వెనకవున్న తరగతి సంచిత పౌనఃపున్యం

$f = 21$ (మధ్యగత తరగతి పౌనఃపున్యంలో)

$\frac{N}{2} = 35$ (మొత్తం పౌనఃపున్యంలో సగభాగం) కాబట్టి

$$Median = 175 + \left(\frac{35-19}{21} \right) \times 25 \quad = 175 + \frac{16 \times 25}{21} = 175 + 19.05 = 194.05$$

$\therefore$ కార్మిక కుటుంబాల మధ్యగత ఆదాయం రూ. 194.05



పటం

పైన ఇచ్చిన దత్తాంశంలో మధ్యగత స్థానాన్ని $\frac{N}{2}$ సూత్రం ద్వారా నిర్ణయించడం జరిగింది. ఇది $35\left(\frac{70}{2}\right)$ కనుక పటంలో Y- అక్షం మీద **35** చూపే బిందువు నుంచి X- అక్షానికి సమాంతరంగా ఒక రేఖను గీస్తాం. ఈ రేఖ ఓజివ్ వక్రాన్ని తాకిన బిందువు నుంచి X- అక్షానికి లంబరేఖ గీయడమైంది. ఈ లంబరేఖ X- అక్షం మీద తాకిన బిందువు వద్ద విలువ **194.05** కనుక మధ్యగతం కూడా **194.05** అవుతుంది. అంటే మధ్యగతం రూ. **194.05.**

ఈ ఓజివ్ వక్రాన్ని పైన ఇచ్చిన దత్తాంశం ఆధారంగా గీస్తాం. ఈ ఉదాహరణలో మధ్యగతం విలువ రూ. **194.05.** కాబట్టి రేఖా చిత్రం ద్వారా కనుక్కొన్న మధ్యగతం, సూత్రాన్ని ఉపయోగించి గణన చేసిన మధ్యగతానికి సమానంగా వుందని చెప్పవచ్చు.

పై దత్తాంశంలోని పౌనఃపున్యాలను ఆరోహణ క్రమంలో సంచితం చేసి ఓజివ్ వక్రాన్ని గీసి తద్వారా మధ్యగతాన్ని కనుక్కొన్నాం. ఈ పద్ధతిలో సంచిత పౌనఃపున్యాలను తరగతుల ఎగువ అవధులపై గుర్తించడం జరిగింది. ఇలా గీసిన ఓజివ్ వక్రాన్ని 'కంటే తక్కువ వక్రం (less than curve) అని అంటారు. ఐతే ఇవే పౌనఃపున్యాలను అవరోహణ క్రమంలో సంచితం చేసి, వాటిని తరగతుల దిగువ అవధులపై గుర్తించి ఓజివ్ వక్రాన్ని గీయవచ్చు. ఇట్లా గీసిన ఓజివ్ వక్రాన్ని 'కంటె ఎక్కువ వక్రము' (more than curve) అని అంటారు. ఈ ఎక్కువ వక్రం నుంచి మధ్యగతాన్ని కనుక్కొంటే దాని విలువ కూడా **194.05** వస్తుంది.

మధ్యగతాన్ని కనుక్కోవడానికి ఇంకో పద్ధతి కూడా వుంది. ఒకే రేఖా చిత్రపటంలో ఓజివ్ వక్రరేఖ కంటే తక్కువ, ఎక్కువ అయిన వక్రరేఖలా గీసి ఆ రెండు వక్రరేఖలు ఒకదానినొకటి ఖండించుకొనే బిందువు నుంచి X- అక్షానికి లంబరేఖ గీయాలి. ఈ లంబరేఖ X- అక్షం మీద ఏ బిందువునైతే తాకుతుందో ఆ బిందువు విలువే మధ్యగతమవుతుంది.

ఈ రెండు పద్ధతులలో ఏదో ఒక పద్ధతి నవలంబించి సంచిత పౌనఃపున్యాల వక్రాన్ని గీయాలి. ఆ తరువాత దాని మధ్య బిందువును N అనే సూత్రం ద్వారా తెలుసుకోవాలి. ఈ బిందువును Y- అక్షం మీద గుర్తించి దాని నుంచి X- అక్షానికి సమాంతరం (parallel) గా ఒక రేఖ గీయాలి. ఈ రేఖ ఓజివ్ వక్రాన్ని ఏదో ఒక బిందువు వద్ద తాకుతుంది. ఇట్లా తాకిన బిందువు వద్ద నుండి X-అక్షానికి లంబరేఖ (perpendicular) గీయాలి. ఈ లంబరేఖ X- అక్షం మీద ఏ బిందువునైతే తాకుతుందో ఆ బిందువు నిలువే మధ్యగతమవుతుంది.

ఉదాహరణకు క్రింద ఇచ్చిన దత్తాంశంలో "కంటే తక్కువ", "కంటె ఎక్కువ" సంచిత పౌనఃపున్య వక్రరేఖలను గీసి వాటి నుంచి మధ్యగతాన్ని ఆ తరువాత సూత్రాన్ని ఉపయోగించి ఫలితాన్ని సరిచూస్తాము.

మధ్యగతం లేదా $Median = \frac{N}{2}$ వ అంశం విలువ. $= \frac{80}{2} = 40$ వ అంశం విలువ పౌనఃపున్యంలో చేరి ఉంది కనుక ఆ పౌనఃపున్యానికి ఎదురుగా వున్న **40 - 50** తరగతి మధ్యగత తరగతి అవుతుంది. ఈ తరగతిలో **40**వ అంశం విలువ ఎంతో అంతర్వేశనం ద్వారా కనుక్కొందాం.

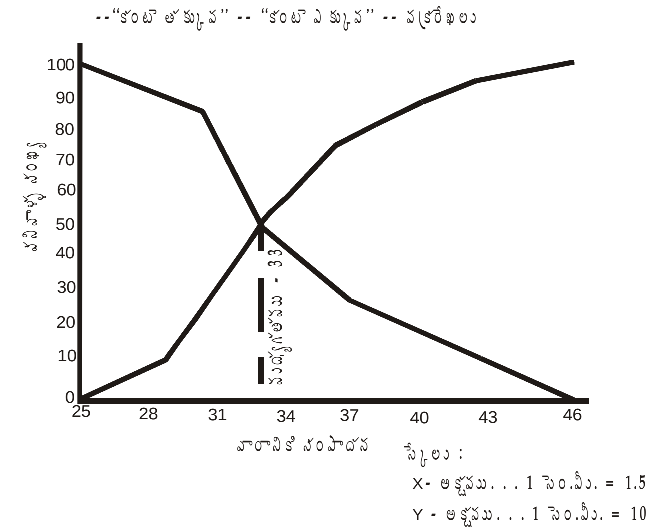
$$Median = l_1 + \left(\frac{\frac{N}{2} - C.F.}{F}\right) \times i$$ ఇక్కడ $l_1 = 40, C.F.28, I = 10, f = 30, \frac{N}{2} = 40$

కాబట్టి మధ్యగతము = $40 + \left(\frac{40-28}{30}\right) \times 10 = 40 + \frac{12 \times 10}{30} = 40 + 4 = 44$ మార్కులు

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
10-20	2
20-30	7
30-40	19
40 - 50	30
50 - 60	12
60 - 70	6
70 - 80	4

తక్కువ, ఎక్కువ ఓజివ్ వక్రరేఖలను గీయడానికి ముందు దత్తాంశంలోని పౌనఃపున్యాలను ఆరోహణ, అవరోహణ క్రమంలో సంచితం చేసి క్రింది విధంగా అమర్చుకోవాలి.

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య	సంచిత పౌనఃపున్యం ఆరోహణ క్రమంలో (కంటె తక్కువ)	అవరోహణ క్రమంలో (కంటె ఎక్కువ)
10 - 20	2	2	80
20 - 30	7	9	78
30 - 40	19	28	71
40 - 50	30	58	52
50 - 60	12	70	22
60 - 70	6	76	10
70 - 80	4	80	4



(పటం)

పై పటం నుంచి మధ్యగత మార్కులు **44** అని తెలిసింది. కాబట్టి రేఖాచిత్ర పద్ధతి ద్వారా కనుక్కొన్న మధ్యగతము, సూత్రం ద్వారా గణన చేసిన దానికి సమానంగా వుందని చెప్పవచ్చు.

ఉదా : 9. 12. ఈ క్రింది ఇచ్చిన దత్తాంశం నుండి మధ్యగతాన్ని కనుక్కోండి?

ఈ దత్తాంశంలోని పౌనఃపున్యాలను ఆరోహణ క్రమంలో సంచితం చేసి క్రింద చూపడమైనది.

ఆదాయము రూ॥లలో	**కుటుంబాల సంఖ్య (f)**	**సంచిత పౌనఃపున్యం $(C.F.)$**
125 - 150	7	7
150 - 175	12	19
175 - 200	21	40 - Median
200 - 225	14	54
225 - 250	10	64
250 - 275	3	67
275 - 300	3	N = 70

మధ్యగతం లేదా $Median = \frac{N}{2}$ వ అంశం విలువ $= \frac{70}{2}$ వ అంశం విలువ = 35 వ అంశం విలువ.

35వ అంశం 40వ సంచిత పౌనఃపున్యంలో చేరి ఉంది. కనుక ఆ పౌనఃపున్యానికి ఎదురుగా వున్న 175 - 200 తరగతి మధ్యగతి తరగతి అవుతుంది. ఈ తరగతిలో 35వ అంశం విలువ ఎంతో అంతర్వేశనం ద్వారా కనుక్కోవాలి. ఈ సూత్రం ప్రకారం మధ్యగతం లేదా $Median = l_1 + \left(\frac{\frac{N}{2} - c.f.}{f}\right) \times i$ ఇక్కడ $l_1 = 175$ (మధ్యగత తరగతి దిగువ అవధి), i = 25 (మధ్యగత తరగతి అంతరం) C.f. = 19, మధ్యగత తరగతికి వెనకవున్న తరగతి సంచిత పౌనఃపున్యం, $f = 21$ (మధ్యగత తరగతి పౌనః పున్యంలో)

$\frac{N}{2} = 35$ (మొత్తం పౌనఃపున్యంలో సగభాగం) కాబట్టి $Median = 175 + \left(\frac{35-19}{21}\right) \times 25$

$= 175 + \frac{16 \times 25}{21} = 175 + 19.05 = 194.05$ $\therefore$ కార్మిక కుటుంబాల మధ్యగత ఆదాయం రూ. 194.05

ఉదా : 9. 13. దిగువ దత్తాంశము నుండి మధ్యగత ఆదాయము కనుగొనండి :

ఆదాయము (రూపాయలలో)	**కార్మికులు**
100	24
150	26
80	16
200	20
250	6
180	30
	122

దత్తాంశమును ఆరోహణా క్రమములో వ్రాసి పౌనఃపున్యమును సంచితము చేయవలెను.

ఆదాయము (రూపాయలలో)	కార్మికులు	సంచిత పౌనఃపున్యము
(m)	(f)	(cf)
80	16	16
100	24	40
150	26	66
180	30	96
200	20	116
250	6	122
	122	

మధ్యగత ఆదాయము : $\frac{(n+1)}{2}$, పౌనఃపున్యము మొత్తము : $\frac{(122+1)}{2}$

61.5 సంచిత పౌనఃపున్యము 66లొ నున్నది కనుక మధ్యగత అంశము దీనినిబట్టి 122 ఉంది కనుక మధ్యగత ఆదాయము రూ. 150/-లు అవుతుంది.

9.5. బాహుళకము (Mode):

"Mode" అనే పదము అనే "La Mode" ఫ్రెంచి పదము నుండి ఉద్భవించినది. దీని అర్థము fascion. బాహుళకము అంటే బాహుళక పర్యాయములు లేదా అనేకసార్లు కనబడే అంశము. పౌనఃపున్య విభజనములో ఏ విలువ మిగతా విలువల కంటే ఎక్కువసార్లు కనిపిస్తుందో ఆ విలువను బాహుళకము అని అందురు. ఒక సంఘటన ఎక్కువ సార్లు రావడము బాహుళకము ఆ విలువను నమూనా విలువ లేదా మాదిరి విలువగా చెప్పవచ్చును. ఆ విలువ మొత్తం దత్తాంశానికి ప్రాతినిధ్యం వహిస్తుంది.

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణి బాహుళకము :

సాధారణముగా విచ్ఛిన్న శ్రేణియందు అత్యధిక పౌనఃపున్యము కన్న అంశములను బహుళకముగా పరిశీలన ద్వారా నిర్ణయించవచ్చును. అయితే శ్రేణిలోని పౌనఃపున్య సాంద్రత క్రమపద్ధతిలో లేనప్పుడు పరిశీలన పద్ధతి ద్వారా నిర్ణయించిన బాహుళకాన్ని ఆదర్శ విలువగా పేర్కొనలేము. అటువంటప్పుడు బాహుళకాన్ని వర్గీకృత విశ్లేషణ ద్వారా నిర్ణయించవలసిన ఆవశ్యకత ఏర్పడుతుంది.

అవిచ్ఛిన్న బాహుళకము గణన :

ఈ పద్ధతిలో బహుళకమును లెక్కించుటకు ఇచ్చిన దత్తాంశమును ఆరోహణ లేదా అవరోహణ క్రమములో మార్చవలెను. క్రింది సూత్రము ద్వారా బహుళకమును కనుగొనవచ్చును.

సూత్రము : $$Z = l_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i \;\; OR \;\; z = l_1 + \frac{f_2}{f_0 + f_2} \times i$$

Z = బహుళకము

l_1 = బహుళక తరగతి దిగువ అవధి

f_1 = బహుళక తరగతి పౌనఃపున్యము

f_0 = బహుళ తరగతి ముందున్న తరగతి పౌనఃపున్యము

f_2 = బాహుళక తరగతి యొక్క తరువాత పౌనఃపున్యము

i = తరగతి అంతరము

ఉదా : 9. 14. ఈ క్రింది దత్తాంశమునకు బాహుళకమును గుణించండి.

తరగతి	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
పౌనఃపున్యము	5	15	30	25	20	5

బాహుళక తరగతి : అధిక పౌనఃపున్యము గల తరగతి : 20-30

$$l_1 = 20,\ f_0 = 15,\ f_2 = 25,\ f_1 = 30, i = 10$$

$$z = l_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

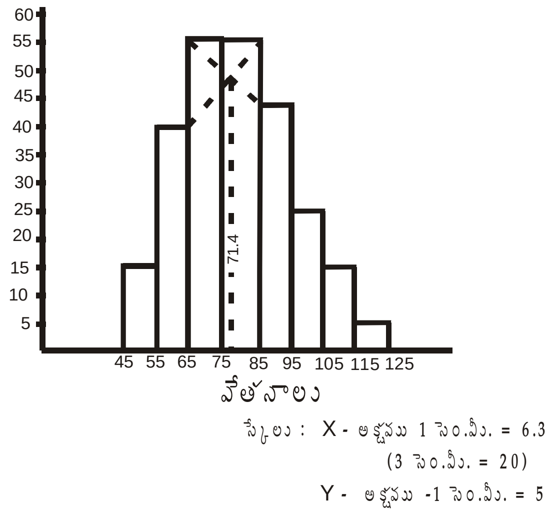
$$= 20 + \frac{30-15}{60-15-25} \times 10 = 20 + \frac{15}{20} \times 10 = 20 + 7.5 = 27.5$$

$$= 20 + \frac{25}{45} \times 10 = 20 + \frac{25}{15+25} \times 10 = 20 + \frac{25}{45} \times 10 = 20 + 6.25 = 26.25$$

ఉదా : 9. 15. .క్రింద ఇవ్వబడిన దత్తాంశానికి రేఖాచిత్ర పద్ధతి ద్వారా బాహుళకాన్ని కనుక్కోండి?

లాభాలు (రూ॥లలో)	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40	40 - 45
సంస్థల సంఖ్య	15	100	120	58	26	5	3	2	1

సాధన : రేఖాచిత్ర పద్ధతి ద్వారా బాహుళకాన్ని కనుక్కోవడం.



పటం

పౌనఃపున్య బహుభుజి లేదా పౌనఃపున్య వక్రం ద్వారా బాహుళకాన్ని కనుక్కోవలెనంటే ఇచ్చిన దత్తాంశానికి పౌనఃపున్య బహుభుజిని లేదా పౌనఃపున్య వక్రాన్ని గీయాలి. ఆ తరువాత బహుభుజి లేదా వక్రం శిఖరము (Highest point) నుండి X- అక్షానికి

లంబరేఖ గీయాలి. ఈ లంబరేఖ X- అక్షాన్ని తాకిన బిందువు వద్ద ఉన్న విలువ ఇంచుమించు బహుళకానికి సమానం అవుతుంది.

సంచిత పౌనఃపున్య వక్రం ద్వారా బాహుళకాన్ని కనుక్కోవడానికి ఆ వక్రము ఎక్కడ ఎక్కువ నిలువుగా (Steepest Slope) ఉన్నదో ఒక బిందువు గుర్తించాలి. ఈ బిందువు నుంచి X- అక్షానికి లంబరేఖ గీస్తే ఈ రేఖ X- అక్షానికి తాకిన బిందువు వద్ద వున్న విలువ బాహుళకానికి ఇంచుమించు సమానమవుతుందని చెప్పవచ్చు.

ఉదా : **9. 16.** అంకమధ్యమము, మధ్యగతము, బాహుళకము - గణన :

X	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
F	5	14	24	15	12

Class	**Frequency**	X_1	$f_1\ x_1$	**Cumulative Frequency**
0-10	5	5	25	5
10-20	14	15	210	19
20-30	24	25	600	43
30-40	15	35	525	58
40-50	12	45	540	70
	70		1,900	

$$Mean : \frac{f_1 x_1}{f_1} = \frac{1,900}{70} = 27.1429$$

$$\frac{N}{2} = \frac{70}{2} = 35 \quad = 20 + \frac{35-10}{24} \times 10$$

$$= 20 + \frac{16}{24} \times 10 = 20 + \frac{160}{24} = 20 + 6.6666 = 26.6666$$

$$\text{Mode} = 1 + \frac{f_1 - f_0}{2 f_1 - f_0 - f_2} \times c \quad = 20 + \frac{24-14}{2 \times 24 - 14 - 15} \times 10 = 20 + \frac{10}{15} \times 10 = 25.\ 2632$$

ఉదా : 9. 17. దిగువ ఇచ్చిన పౌనఃపున్య విభాజనం నుండి మధ్యగతాన్ని చతుర్థాంశం కనుగొనుము - గణాంక శాస్త్రములో 146 మంది విద్యార్థులకు వచ్చిన మార్కులు :

Marks Below	10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
No. of Students	8	12	20	32	30	28

Marks :	60-70	above 70
No. of Students :	12	4

ఇక్కడ ఉన్న దత్తాంశము విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో ఉన్నది. కనుక స్థాన నిర్ణయము చేయడానికి N/3 తీసుకొనవలయును.

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య	సంచిత పౌనఃపున్యము
0 - 10	8	8
10 - 20	12	20
20 - 30	20	40
30 - 40	32	72
40 - 50	30	102
50 - 60	28	130
60 - 70	12	142
70 above	4	146

N = 146

మధ్యగతము : మధ్యగత స్థానము $-N/2 = \frac{146}{2} = 73$

73వ అంశము సంచిత పౌనఃపున్యము 102లో ఉన్నది. కాబట్టి మధ్యగతమైన తరగతి 40-50కి సమానము.

మధ్యగతము : $= M = 1 + C \times \frac{i}{f}$, $\quad 1_i = 40, c = 73 - 72 = 1$

$$= 40 + \frac{1 \times 10}{30} = 40 + 0.33 \;\; = 40.33$$

చతుర్థాంశము :

దిగువ చతుర్థాంశ స్థానము : N / 4 వ అంశము

$$\frac{146}{4} = 36.5$$

36.5వ అంశము సంచిత పౌనఃపున్యము 40 లో ఉన్నది. కనుక దిగువ చతుర్థాంశమైన తరగతి 20-30కి సమానము. చతుర్థాంశాన్ని గణన చేయడానికి మధ్యగత సిద్ధాంతమును పోలిన సిద్ధాంతమును ఉపయోగించవలయును.

కనుక దిగువ చతుర్థాంశము : $Q_1 = 1 + c \times \frac{1}{f}, c = 36.5 - 20 = 16.5$

దిగువ చతుర్థాంశము : $20 + \frac{16.5 \times 10}{20}$ = $20 + 8.25$ = 28.25

ఉదా 9. 18 : 42మంది నేరస్థుల వయస్సును బట్టి తరగతి అంతరము 10గా అంకమధ్యమము, మధ్యగతము, బాహుళకమును కనుగొనుము.

40, 32, 23, 22, 15, 10, 8, 36, 25, 22, 9, 43, 12, 48, 20, 27

57, 63, 33, 23, 38, (39), 19, 45, 53, 19, 55, 19, 52, 58, 61,

51, 52, 35, 37, 21, 18, 21, 24, 26, 28, 30, 3.

తరగతి అంతరము	ట్యాలీ మార్కులు	పౌనఃపున్యము
0 - 10	I I	2
10 - 20	I I I I I I	7
20 - 30	I I I I I I I I I I I I	12
30 - 40	I I I I I I I I	8
40 - 50	I I I I	4
50 - 60	I I I I I I I I	7
60 - 70	I I	

అంకమధ్యమము, మధ్యగతము, బాహుళకము కనుగొను విధానము :

తరగతి అంతరము	మధ్య విలువలు (m)	పౌనఃపున్యం (f)	సంచిత పౌనఃపున్యం $(C.F.)$	విచలనము (dx)	$(f)x(dx)$ $(f\,dx)$
0 - 10	5	2	2	- 20	- 40
0 - 20	15	7	9	- 10	- 70
20 - 30	25	12	21	0	0
30 - 40	35	8	29	10	80
40 - 50	45	4	33	20	80
50 - 60	55	7	40	30	110
60 - 70	65	2	42	40	80
		42			+ 340

అంకమధ్యమము : $(A.M.) = A + -\frac{fdx}{N} = 25 + \frac{340}{42} =$ 25 + 8.4 = 33.4

బాహుళకము : $= 1_i + \frac{f_2}{F_o + f_2} \times i = L + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times i \;(or)\; L + \frac{f_1 - f_0}{f_1 - f_0 + f_p - f_2}$

$= 20 + \frac{8}{7+8} \times 10 = 20 + \frac{8 \times 10}{15}$

= 20 + 5.3 = 25.3

మధ్యగతము : $= 1_2 + \frac{i}{f} x(m - c)$

$= 20 + \frac{10}{12}(21 - 9)$ = 20 + 10 = 30

9.6 గుణమధ్యమము

శ్రేణులలోని N అంశాల లబ్ధానికి N వ మూలాన్ని గుణమధ్యమముగా పిలుస్తారు.

ఒకవేళ రెండు అంశాలు ఉంటే మనము గుణమధ్యమము తెలుసుకొవటానికి రెండు అంశాల వర్గమూలాన్ని కనుగొనవలెను. మూడు అంశాలు ఉన్నట్లుఅయితే ఘన మూలము తెలుసుకొంటాము. గుణమధ్యమములో ప్రతిఅంశాన్ని తీసుకొంటాము కాబట్టి విపరీత అంశాల ప్రభావము మనకు తెలుస్తుంది. ఇది అంకమధ్యమము కంటే పెద్దదికాదు. విలువలలో ఏఒక్క విలువఅయిన సున్న అయినప్పుడు గుణమధ్యమము అసాధ్యము, అసంభవము. శ్రేణులలో x_1, x_2, x_3, ..., x_n అనే n అంశాలు ఉన్నాయి అని అనుకొందాము. అప్పుడు గుణమధ్యమము.

గుణమధ్యమము = $\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 .... x_n}$

ఉదా : $x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 5$

అయిన G.M. = $\sqrt[3]{3 \times 4 \times 5}$

హెచ్చు అంశాలు ఉన్నప్పుడు మూలము గణన చేయడం చాలా క్లిష్టసమస్యఅవుతుంది. కాబట్టి గు.మ. గణన సులభం చేయటానికి సంవర్గమానాలను ఉపయోగిస్తాము.

$$\log G.M. = (\log x_1 + \log x_2 + \log x_3 + ...\log x_n)/n \quad = \sum(\log x / n)$$

కాబట్టి గు.మ. అంటే గుణమధ్యమము = Anti log of $\sum(\log x / n)$

"సంవర్గమానాల గుణమధ్యమము వ్యక్తిగత విలువల సంవర్గమానాల అంకమధ్యమానికి సమానం. గుణమధ్యమము అంకమధ్యమముతో సమానంకాని, తక్కువగాని ఉంటుంది.

గుణమధ్యమము సుగుణాలు, లోపాలు :

సుగుణాలు : (Merits)

1. ఇది ఖచ్చితంగా నిర్వచించబడిన సగటు.
2. ఇది శ్రేణిలోని అన్ని అంశాల విలువలపై ఆధారపడి ఉంటుంది.
3. సగటు శాతం పెరుగుదల మరియు తరుగుదల రేట్లను గణించడంలో గుణమధ్యమం చాలా ఉపయోగపడుతుంది.
4. అంకమధ్యమం వలెగాక ఇది శ్రేణిలోని చిన్న అంశాలకు ఎక్కువ మరియు పెద్ద అంశాలకు తక్కువ ప్రాధాన్యత నిస్తుంది. కాబట్టే గుణ మధ్యమము కంటే తక్కువగా ఉంటుంది. శ్రేణిలోని అంశాలన్నీ సమానం అయినప్పుడు మాత్రమే గుణమధ్యమం అంకమధ్యమానికి సమానం అవుతుంది. కానీ, ఎప్పుడూ అంకమధ్యమం కంటె ఎక్కువ వుండదు.
5. ఇది బీజగణిత పద్ధతులకు అనువైనది. ఉదాహరణకు రెండు లేదా ఎక్కువ సమూహాల గుణమధ్యమాలు మరియు సమూహాల్లోని అంశాల సంఖ్య తెలిసినప్పుడు వాటికి సమిష్టి (Combined GM) గుణ మధ్యమాన్ని గణించవచ్చు.

$\log GM = \dfrac{\sum \log x}{N}$ కాబట్టి $\sum \log x = n \times \log GM$ అయితే రెండు సమూహాల్లోని అంశాలు $N_1 N_2$ అయినప్పుడు వాటికి సంబంధించిన గుణమధ్యమం

$$\log GM_{12} = \frac{N_1 \log GM_1 + N_2 \log GM_2}{N_1 + N_2}$$

$$GM_{12} = Anti\log = \frac{N_1 \log GM_1 + N_2 \log GM_2}{N_1 + N_2}$$

కాని పైన ఇవ్వబడిన సమీకరణం ప్రకారం

6. ప్రతిచయన చాంచల్యాల ప్రభావం గుణమధ్యమంపై అంతగా వుండదు.

లోపాలు (De-merits) :

1. శ్రేణిలో ఏ అంశం అయినా సున్నా అయినపుడుగాని, ఋణాత్మక మయినప్పుడుగాని గుణమధ్యమాన్ని గుణించలేము.
2. దీన్ని గణన చేయడం అంత సులభమైన విషయం కాదు.
3. సామాన్య జనం దీనిని అర్థం చేసుకోవడం కష్టం.
4. వాటి వాటి విలువలను బట్టి అంశాల ప్రాధాన్యత సగటులో ప్రతిబింబించాలంటే గుణమధ్యమం అంత మంచి సగటు కాదు.
5. గుణ మధ్యమంగా వచ్చిన విలువ శ్రేణిలోని ఏ అంశం విలువకూ సమానంగా వుండదు.

9.7 హరమధ్యమము :

దత్తాంశాన్ని రేటులలో ఇచ్చినప్పుడు దీని ఉపయోగం ఉంటుంది.

దత్తాంశంలోని విలువల యొక్క వ్యుత్క్రమాల అంకమధ్యమానికి గల వ్యుత్క్రమము హరమధ్యమానికి సమానము. అంటే దత్తాంశంలోని వ్యక్తిగత విలువలకు వ్యుత్క్రమాన్ని కనుగొని వాటి మొత్తానికి అంకమధ్యమం గణన చేయవలెను. అట్లే వచ్చిన అంకమధ్యమానికి మరల వ్యుత్రమాన్ని కనుకొంటే అది హరమధ్యమానికి సమానమవుతుంది. ఇచ్చిన దత్తాంశములో $x_1, x_2, x_3 .....x_n$ లు చలరాశి విలువలు అయితే, హరమధ్యమము ఈ క్రింది విధముగా గణన చేస్తాము.

$$HM = \mathrm{Reci}\left\{\frac{\sum f.\mathrm{Reci}\,x}{N}\right\} = \mathrm{Reci}\left\{\frac{\sum f\left(\frac{1}{x}\right)}{N}\right\} \quad \text{లేదా} \quad HM = \frac{N}{\sum\left(\frac{f}{x}\right)}$$

ఇక్కడ x = చలరాశి విలువలు.

$$H.M. = \mathrm{Reci}\left\{\frac{\sum f.\mathrm{Reci}\,x}{N}\right\}$$

ఉదా : 9. 19. క్రింది దత్తాంశమునకు హరమధ్యమము కనుక్కోండి?

తరగతి అంతరము	5 -10	10 -15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35
పౌనఃపున్యము	2	9	29	54	11	5

సాధన :

తరగతి అంతరము	మధ్యగతము (m)	పౌనఃపున్యం (f)	$\frac{1}{x}$	$f.\frac{1}{x}$
5-10	7.5	2	0.1333	0.2666
10-15	12.5	9	0.0800	0.7200
15-20	17.5	29	0.0571	1.6571
20-25	22.5	54	0.0444	2.4000
25-30	27.5	11	0.0364	0.4000
30-35	32.5	5	0.0308	0.1540
		110		5.5977

$$HM = \mathrm{Re}ci\left\{\frac{\sum f.\mathrm{Re}cim}{N}\right\} = \mathrm{Re}ci\left\{\frac{\sum f\left(\frac{1}{m}\right)}{N}\right\} \text{ లేదా } \quad HM = \frac{N}{\sum\left(\frac{f}{m}\right)}$$

ఇక్కడ m = తరగతి అంతరాల మధ్య విలువలు.

$$H.M. = \mathrm{Re}ci\left\{\frac{\sum f.\mathrm{Re}cim}{N}\right\} = \mathrm{Re\,ci}\left\{\frac{5.5977}{100}\right\} = \frac{110}{5.5977} = 20.$$

విస్తరణ కొలతలు (Measures of Dispersion)

9.8. ఉపోద్ఘాతం

"కేంద్రస్థాన విలువకు అసలు విభాజనంలో గల అంశములకు ఉన్న తేడా లేదా విచరణ తెలుసుకొనే కొలతనే విస్తరణ అంటారు" పౌనఃపున్య విభాజనాలన్నీ సమానంగా ఉండటం అరుదు. ఒక్కొక్కప్పుడు వాటిలో ఒకదానితో ఒకటి పోల్చవలసిన అవసరం వచ్చినప్పుడు కేంద్రస్థానపు విలువలు లేదా ప్రథమశ్రేణి సగటులు తప్పుదారిని పట్టించేవిగా ఉంటాయి. అటువంటప్పుడు కేంద్రస్థాన విలువలకు విభాజనంలోగల అంశాలకు తేడాలు తెలుసుకొని తద్వారా విభాజనం యొక్క స్వరూపం తెలుసుకోవడం ఎంతైనా అవసరం. ఈ పద్ధతినే విస్తరణ తెలుసుకోవడమంటారు. వీటిని ద్వితీయశ్రేణి సగటులు అని కూడా అంటారు. ఉదాహరణకు ఒక తరగతిలో ఇద్దరు విద్యార్థులకు వచ్చిన మార్కులు తీసుకొందాము. మొదటి విద్యార్థికి గణాంక శాస్త్రంలో జరిపిన పరీక్షలు మూడింటిలో 30,60,90 వచ్చినాయనుకొందాము. రెండో విద్యార్థికి ఆ మూడు పరీక్షలలో 58,60,62 వచ్చినాయి అనుకొంటే, ఇద్దరికి వచ్చిన సగటు మార్కులు 60 కాబట్టి వారియొక్క స్థిరత్వాన్ని లేదా నిలకడ గుర్తించడం కష్టము. కాని వారికొచ్చిన సగటు మార్కులు చుట్టూగల శ్రేణులలోని అంశాల విచరణత్వములో చాలా తేడా ఉన్నది. అటువంటి తేడాలను విస్తరణ కొలతల ద్వారా మాత్రమే తెలుసుకోగలము. విద్యార్థుల సగటు మార్కులు సమానమే అయినా వారి మార్కుల విచరణత్వం తేడాల వల్ల మొదటి విద్యార్థికంటె రెండో విద్యార్థికొచ్చిన మార్కులలో స్థిరత్వమున్నట్లు గుర్తించవచ్చు. విస్తరణ ఎంత తక్కువగా ఉండే సగటు ప్రాతి నిధ్యం అంత ఎక్కువగా ఉంటుంది. విస్తరణనే విచరణము లేదా విస్తృతి అని కూడా అంటారు.

9.9. విస్తరణ కొలతలు :

వ్యాప్తి : సగటు యొక్క విశ్వసనీయతను తెలుసుకోవడానికి - సగటు రాశికి ఎంతవరకు ప్రాతినిధ్యం వహిస్తుందో విస్తరణ కొలతల ద్వారా తెలుసుకోవచ్చు. విస్తరణ మానాలలో అతి సులభంగా అర్థం చేసుకోగలిగేది అతిత్వరితంగా, సునాయాసంగా గణన చేయగలిగేది వ్యాప్తి ఒక్కటే. దత్తాంశంలో గల "అత్యధిక, అత్యల్ప విలువల తేడాను వ్యాప్తిగా" అని అంటారు.

ఉదాహరణకు, ఒక కర్మాగారంలో పనిచేసే కూలివాని వేతనాలు వారంలో 3, 2, 4, 5, 3, 7 రూపాయల చొప్పునవస్తే, వాని రాబడి వ్యాప్తి (7 - 2) =5, అంటే అత్యధికరాబడి రూ॥ 7 నుంచి అతిస్వల్ప రాబడి రూ.2 తీసివేస్తే వచ్చే రూ. 5లకు వ్యాప్తి అంటాము.

వ్యాప్తి = అత్యధిక విలువ - అత్యల్ప విలువ

వ్యాప్తిగుణకము సాపేక్షిక విస్తరణ మూలంగా తెలుసుకొంటాము. అంటే అత్యధిక, అత్యల్ప విలువల తేడాను వాటి సంకలనంతో భాగిస్తే వచ్చే విలువ అని అర్థము.

ఇక్కడ విస్తరణ గుణకము

అత్యధిక విలువ - అత్యల్ప విలువ $\quad$ 40 - 10

అత్యధిక విలువ + అత్యల్ప విలువ $\quad$ 40 + 10

$$= \frac{30}{50} = 0.6$$

9. 10 చతుర్థాంశ విచలనము :

చతుర్థాంశాలను విచలనగణన చేయడానికి దిగువ, ఎగువ చతుర్దాంశాలను తీసుకొంటాము. అంటే శ్రేణులలో ఉన్న అంశాల మొత్తంలో దిగువ 25శాతం ఎగువ 25శాతం విడిచి, మిగిలిన 50 శాతం గణనకు తీసుకొంటాము. దీనివల్ల విస్తరణ గణనచేయడంలో విపరీత అంశాల ప్రభావం తగ్గుతుంది.

చతుర్థాంశ విచలనము $Q.D = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

ఇక్కడ Q.D. = చతుర్థాంశ విచలనము

Q_1 = దిగువ చతుర్థాంశము

Q_3 = ఎగువ చతుర్థాంశమ

చతుర్థాంశ విచలన గుణకము $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$ (శుద్ధసంఖ్య)

Q_1, Q_3 లు దిగువ ఎగువ అవధులు.

9.11 మాధ్యమ విచలనం :

"కేంద్ర స్థానపు విలువనుంచి వివిధ అంశాలకు ఉన్న విచలనాల అంకమాధ్యమాన్ని శ్రేణులు మాధ్యమ విచలనంగా నిర్వచించవచ్చు" మాధ్యమ విచలనాన్ని గణన చేయడానికి విచలనాలను, అంకమధ్యమము మధ్యగతము లేదా బాహుళకం నుంచి తీసుకోవచ్చు. మధ్యగతం నుంచి తీసుకొన్న విచలనాలసంకలనం మిగిలిన సగటులనుంచి తీసుకొన్న విచలనాల సంకలనం కంటె తక్కువగా ఉంటుంది. విచలనాలను తీసుకొనేటప్పుడు వాటిగుర్తులను ($\pm$ signs) అలక్ష్యం చేసి విచలనాల సంకలనం తీసుకోవలె. ఎందువల్లనంటే అంక మధ్యమంనుంచి తీసుకొనే విచలనాల సంకలనం సునానకు సమానం కాబట్టి గుర్తులతో సహా విచలనాలను తీసుకొంటో మాధ్యమ విచలనం గణన చేయలేము. అట్లా గుర్తులను అలక్ష్యం చేస్తూ తీసుకొన్న విచలనాలను "పరమ" విచలనాలు అంటారు. అట్లాంటి అసలు లేదా "పరమవిచలనాల" సంకలనానికి అంకమధ్యమం తీసుకొంటే మాధ్యమ విచలనం వస్తుంది.

వ్యక్తిగత శ్రేణుల మాధ్యమవిచలన గణన

దత్తాంశంలో $x_1, x_2, x_3 \dots x_n, N$ సంఖ్య గల అంశాలు అయితే వాటి యొక్క సగటు X అనుకొంటే, ప్రతి అంశం యొక్క విచలనాలు కింది విధంగా ఉంటాయి.

విచలనాలు $= (x_1 - x), (x_2 - x), (x_3 - x)\dots\dots\dots(x_n - x)$

విచలనాలకు $|d_x|$ అనే సాంకేతికం ఉపయోగిస్తే వాటి సంకలము $\sum|dx|$ అవుతుంది.అప్పుడు $\sum|dx|$ అంటే గుర్తులను అలక్ష్యం చేసి తీసుకొన్న విచలనాల సంకలనం అని సుస్పష్టమవుతుంది.

ఇప్పుడు మాధ్యమవిచలనము $M.D. = \frac{\sum|dx|}{N}$ ఇక్కడ M.D. = మాధ్యమ విచలనము

$\sum|dx|$ = గుర్తులను అలక్ష్యంచేస్తూ సగటునుంచి తీసుకొన్న విచలనాల సంకలనము

N = అంశాల సంఖ్య

విచ్ఛిన్న శ్రేణులు - మాధ్యమ విచలన గణన

అంకమధ్యమంనుంచి లేదా మధ్యగతంనుంచి తీసుకొన్న విచలనాలను వాటి యొక్క పౌనః పున్యాలతో గుణిస్తే వచ్చిన లబ్ధాలను సంకలనంచేసి మొత్తం సంఖ్యతో భాగించితే విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో మాధ్యమ విచలనం వస్తుంది.

=¶^ Ì¼° qKÇ#=ò M.D. = $\frac{\sum|dx| f}{N}$

ఇక్కడ $\sum|dx| f$ గుర్తులను అలక్ష్యం చేస్తూ సగటు నుంచి తీసిన విచలనాలను వాటి పౌనః పున్యంతో గుణిస్తే వచ్చిన లబ్ధాల సంకలనము

N = మొత్తం సంఖ్యలు (మొత్తం పౌనఃపున్యము)

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు - మాధ్యమ విచలనము

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో తరగతుల మధ్య విలువలను తీసుకొంటే అవి విచ్ఛిన్న శ్రేణుల రూపంలో ఉంటాయి. అప్పుడు వాటి నుంచి మాధ్యమ విచలనాన్ని గణనచేయవలెను.

మాధ్యవిచలనము - ప్రయోజనాలు - లోపాలు

1. ప్రామాణిక విచలనంతో పోల్చిచూస్తే మాధ్యమవిచలనం గణన సులభము. ఇంకా దీనిని అర్థంచేసుకోవడం కూడా తేలిక.
2. ఇది స్పష్టంగా, నిర్దుష్టంగా నిర్వచించినది కాబట్టి దీని విలువ కచ్చితంగాను, నిజమైనదిగాను ఉంటుంది.
3. ఇది అన్ని అంశాల మీద ఆధారపడి ఉన్నది. కాబట్టి ఒక అంశంలో మార్పువస్తే మాధ్యమవిచలన విలువలో కూడా మార్పు వస్తుంది.
4. విచలనాలు కేంద్రవిలువనుంచి తీసుకొంటాము. కాబట్టి వివిధ విభాజనాల స్వరూపాల తేడాలను పోల్చిచెప్పడం చాలా సులభము.

లోపాలు:

1. మాధ్యమవిచలన గణనలో బీజీయ చిహ్నాలను అలక్ష్యం చేయడం దీనిలో చాలా పెద్దలోపము. అంటే +9 అయినా -9 అయినా ఒకే దృష్టితో తీసుకోవడం అంకగణిత శాస్త్రం ప్రకారం తప్పే అవుతుంది.
2. ఈ పద్ధతి ఎల్లప్పుడు నిజమైన ఫలితాలను ఇవ్వలేకపోవచ్చు.
3. బీజీయ ప్రస్తావనకు ఇది సరిపోదు.

9.12 ప్రామాణిక విచలనం :

విస్తరణ అధ్యయనం చేయడంలో ప్రామాణిక విచలనము అతిముఖ్యమైనది. అత్యధికంగా ఉపయోగించే మానము. గణాంకశాస్త్రానికి విచరణము మూలస్తంభము."అంక మధ్యమం నుంచి తీసుకొన్న విచలనాలవర్గాల అంకమధ్యమము యొక్క వర్గమూలాన్ని ప్రామాణిక విచలనంగా" గణాంకశాస్త్రవేత్తలు నిర్వచించినారు. అంకమధ్యమం నుంచి విచలనాలను తీసుకోవలె. అట్లాతీసుకొన్న విచలనాలకు వర్గాలు కనుక్కొంటే మాధ్యమ విచలన గణనలో బీజీయ చిహ్నాలను అలక్ష్యం చేయడం అనే లోపము

పోతుంది. తరువాత అట్లా తీసుకొన్న వర్గాలకు అంకమధ్యమం కనుక్కొని మళ్ళీదానికి వర్గమూలాన్ని కనుక్కోవలె. అట్లావచ్చిన ఫలితాన్నే ప్రమాణిక విచలనమంటారు. ప్రామాణిక విచలనము గణనచేసేటప్పుడు అంకమాధ్యమాన్ని మాత్రమే ఉపయోగించవలసి ఉన్నది. సాంకేతికంగా చెప్పవలెనంటే ప్రామాణిక విచలనానికి గ్రీకు చిన్న అక్షరము (σ సిగ్మా అని చదవవలె) ఉపయోగిస్తే, అంశాలకు అంకమాధ్యానికి గల తేడా లేదా విచలనము 'd' అయితే విచలనాల వర్గాల సంకలనము $\sum d^2$ అవుతుంది.

ఇప్పుడు ప్రామాణిక విచలనము $\sqrt{\dfrac{\sum d^2}{N}}$

ఇక్కడ σ = (సిగ్మా) ప్రామాణిక విచలనము

$\sum d^2$ = అంకమధ్యమం నుంచి తీసుకొన్న విచలనాల వర్గాల సంకలనము

N = మొత్తం సంఖ్యలు.

విచలనాల వర్గాల అంకమాధ్యానికి స్ృతము అంటారు. దీనిని సాంకేతికంగా $\dfrac{\sum d^2}{N}$ లేదా ప్రామాణిక విచలన వర్గము అని చెప్పవచ్చు.

వ్యక్తి గత శ్రేణులు - ప్రామాణిక విచలనం గణన :వ్యక్తి గత శ్రేణులలో అంశాలకు అంకమధ్యమాన్ని గణనచేసి దాని నుంచి విచలనాలను తీసుకోవలె. అట్లా తీసుకొన్న విచలనాలకు వర్గాలనుకట్టి సంకలనం చేయవలె. అప్పుడు మొత్తం సంకలనాన్ని సంఖ్యల మొత్తంతో భాగిస్తే వచ్చిన దానికి వర్గమూలాన్ని తెలుసుకొంటే అది ప్రామాణిక విచలనము అవుతుంది.

దగ్గర పద్ధతి: ఒక్కొక్కప్పుడు అంకమధ్యమం భిన్నంలో వస్తుంది. ఉదాహరణకు, మనకు ఇచ్చిన దత్తాంశంలో అంకమద్యమం 54,288 వచ్చినదనుకొంటే, దీని నుంచి విచలనాలను తీసి వాటికి వర్గాలను కట్టడం చాలాకష్టమవుతుంది. కాబట్టి అటువంటి సమయాలలో విచలనాలను ఊహించిన అంకమధ్యమంనుంచి తీసుకొని తరువాత అవసరమైన సర్దుబాట్లు చేసుకొని ప్రామాణిక విచలనం కట్టడం సులభమవుతుంది.

అయితే ప్రామాణిక విచలనము ఊహించిన అంకమధ్యమం నుంచి గణనచేసేటప్పుడు దిగువ ఇచ్చిన సూత్రాన్ని ఉపయోగించవలె.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d_x^{\,2}}{N} - \left(\frac{\sum d_x}{N}\right)^2}$$

ఇక్కడ σ = ప్రామాణిక విచలనము.

$\sum d_x^{\,2}$ = ఊహించిన అంకమధ్యమంనుంచి తీసుకొన్న విచలనాల వర్గాల సంకలనము

N = మొత్తం సంఖ్యలు.

విచలనాలు తీసుకొన్నప్పుడు సమాన లక్షణం ఉంటే అది తీసుకోవచ్చు, అప్పుడు ఆ విచలనాలు సోపాన విచలనాలు వలె ఉంటాయి. ఉదాహరణకు విచలనాలు 5, 10, 15, ... 25 ఇట్లా ఉంటే 5 ను సమాన లక్షణంగా తీసుకొని 1, 2, 3,..... 5 అని చూపవచ్చు.

విచ్ఛిన్న శ్రేణులు - ప్రామాణిక విచలనం గణన

విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో ప్రామాణిక విచలనం గణన చేయడానికి వ్యక్తి గత శ్రేణులలో ఉపయోగించిన పద్ధతినే ఉపయోగిస్తాము. అయితే విచలనాల వర్గాలను వాటి పౌనఃపున్యంతో గుణించి వచ్చిన లబ్ధాలను సంకలనం చేయవలె. అట్లా వచ్చిన మొత్తాన్ని పౌనఃపున్యాల మొత్తంతో భాగించి తరవాత వర్గమూలాన్ని కనుక్కోవలె.

ప్రామాణిక విచలనము $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}}$

ఇక్కడ $\sum fd^2$ = అంకమధ్యమం నుంచి తీసుకొన్న విచలనాల వర్గాలను వాటి పౌనఃపున్యంచేత గుణించగా వచ్చిన లబ్ధాల సంకలనము

N = మొత్తం సంఖ్యలు (పౌనఃపున్య మొత్తం)

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు - ప్రామాణిక విచలనము

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో "సోపానవిచలన" పద్ధతి చాలా ఎక్కువగా ఉపయోగిస్తారు అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో ఉన్న తరగతులకు మధ్య విలువలు తెలుసుకొన్న ఓ పద్ధతినైనా ఉపయోగించి తరగతుల అంతరాలు సమానంగా ఉన్నప్పుడు మాత్రమే సమాన లక్షణాన్ని తీసుకొని, సాధారణ విచలనాలకు బదులు, సోపాన విచలనాలను తీసుకొని గణన చేయవలె. అప్పుడు సూత్రము ఇట్లా ఉంటుంది.

ప్రామాణిక విచలనము $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f\,dx^2}{N} - \left(\frac{\sum f\,dx}{N}\right)^2} \times i$

ఇక్కడి $\sum f\,dx^2$ = ఊహించిన సగటునుంచి తీసుకొన్న సోపాన విచలనాలను వాటి పౌనఃపున్యంతో గుణిస్తే వచ్చిన లబ్ధాల సంకలనము

$\sum f\,dx^2$ = ఊహించిన సగటు నుంచి తీసుకొన్న సోపాన విచలనాల వర్గాలను వాటి పౌనఃపున్యంతో గుణిస్తే వచ్చిన లబ్ధాల సంకలనము.

N = మొత్తం సంఖ్యలు (మొత్తం పౌనఃపున్యము)

i = సమాన లక్షణము (తరగతి అంతరము)

ప్రామాణిక విచలనాన్ని అంకమధ్యమంతో బాగిస్తే వచ్చిన ఫలితమేగుణకమవుతుంది. సాంకేతికంగా ఇట్లా చూపవచ్చు.

ప్రామాణిక విచలన గుణకము (Coefficient of Variation) = $\frac{\sigma}{\bar{X}}$ = ã•–¶} ‡HqKÇ#=ò / JO‡°^î¼°=ò

ఒక్కొక్కప్పుడు అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో అసమాన తరగతులలో దత్తాంశాన్ని ఇవ్వవచ్చు. కాబట్టి అసమాన తరగతులిచ్చినప్పుడు దగ్గర పద్ధతిలో గణన చేయవచ్చు. అంటే మధ్యవిలువలలో ఒకాదానిని అంకమధ్యమంగా ఊహించి, దానినుంచి విచలనాలను తీసుకోవలె. అటువంటి విచలనాల వర్గాలను పౌనఃపున్యంతో గుణిస్తే మొత్తం విచలనాలు వస్తాయి ఇంకా విచలనాల వర్గాలను పౌనః

పున్యంతో గుణించి $f\,dx \times dx$ లబ్దాల $f\,dx^2$ సంకలనాన్ని కనుక్కోవలె. తరువాత మనకుతెలిసిన సూత్రాన్ని ఉపయోగించి ప్రామాణిక విచలనాన్ని గణన చేయవచ్చు.

విచలన గుణకము : ప్రామాణిక విచలనానికి, అంకమాధ్యమానికి గల నిష్పత్తిని ప్రామాణిక విచలనగుణక మంటారు. దానిని శాతంలో చూపించినప్పుడు అది విచరణగుణకము అవుతుంది. విచరణ గుణకము $C.V = \frac{\sigma}{\overline{X}} \times 100.$ ఇటువంటి మానానికి వాడుకలో చాలా ప్రాధాన్యము ఉన్నది. ఎందుకంటే రెండు లేదా అంతకంటె ఎక్కువ శ్రేణులలోని విచరణను సరిపోల్చి చెప్పడానికి దీనిని ఉపయోగిస్తాము.

ప్రామాణిక విచలనము - ప్రయోజనాలు - లోపాలు

ప్రయోజనాలు:

1. పరమ విస్తరణ మానాలన్నిటిలో ప్రామాణిక విచలనము చాలా ప్రధానమైనది. ప్రతిచయనంలోను, సహసంబంధంలోను ఇది గీటురాయివంటిది. ఆదర్శవిస్తరణ మానానికి ఉండవలసిన లక్షణాలు చాలావరకు దీనికి ఉన్నాయి.
2. ప్రామాణిక విచలనము అన్ని అంశాల మీద ఆధారపడి ఉన్నది.
3. దీని నిర్వచనము నిర్దుష్టమైనది. దీని విలువ కచ్చితము - స్పష్టము
4. బీజీయ ప్రస్తావనకు అనుకూలమైనది.
5. ప్రతిచయనాల మార్పులకు ఇతర విస్తరణ మానాల కంటె ఇది తక్కువగా ప్రభావిత మవుతుంది
6. గుర్తులను ఆలక్ష్యం చేయడం అనే బీజీయ హేత్వాభాసము ఇక్కడ విచలనాలను వర్గం చేయడం వల్ల తొలగిపోతుంది.

లోపాలు:

1. దీని గణన మిగిలిన మానాలకంటె కొంచెం కష్టము
2. విపరీత అంశాలకు ఎక్కువ భారాన్ని అంకమాధ్యానికి దగ్గరలో ఉన్న, అంశాలకు తక్కువ భారాన్ని ఇస్తుంది.

ఉదా : 9. 21. ఊహించిన అంకమధ్యము నుండి ప్రామాణిక విచలనం కనుక్కోవడం :

తరగతి అంతరం	పౌనఃపున్యం (f)	మధ్యవిలువ (m)	$x-8$ dx	$dx^1 = \frac{dx}{2}$	$f\,dx^1$	dx^1	$f\,dx^2$
1-3	4	2	-6	-3	-12	9	36
3-5	6	4	-4	-2	-12	4	24
5-7	9	6	-2	-1	-9	1	9
7-9	12	8	0	0	0	0	0
9-11	5	10	+2	1	+5	1	- 5
11-13	5	12	+4	2	+8	4	20

m=40 $\sum f\,dx^1 = -20$ $\sum f\,dx^2 = 94$

అంకమధ్యమము : $(A.M.) = X + \frac{\sum f\, dx^1}{m} \times i \; = 8 + \frac{(-20)}{40} \times 2$ = 8 + (- 0.5) $\times$ 2 = 8 + 1. 0 = 9

ప్రామాణిక విచలనము : $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f\, dx^2}{m} - \frac{\left(\sum f\, dx^2\right)}{m}} \times i$

$$= \sqrt{\frac{94}{40} - \left(\frac{-20}{40}\right)} \times 2 = \sqrt{2.35 - (-0.5)^2} \times 2$$

$$= \sqrt{2.25 - (-0.5)^2} \times 2 = \sqrt{2.35 - 0.25} \times 2$$

$$= \sqrt{2.25 - (0.25)} \times 2 = \sqrt{2.1} \times 2$$

$$= \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2} = 1.449 \times 2 = 2.898$$

ఉదా : 9. 22

పరిమాణము	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30- 40	40 - 50
పౌనఃపున్యము	7	10	18	12	3

పరిమాణం	**మధ్యవిలువ** (m)	**పౌనఃపున్యం** (f)	$x-25$ dx^1	$dx^{12} = \frac{dx}{10}$	fdx^1	dx^{12}	fdx^{12}
0-10	5	7	-20	-2	-14	4	28
10-20	15	10	-10	-1	-10	1	10
20-30	25	18	0	0	0	0	0
30-40	35	12	10	1	12	1	12
40-50	45	3	20	2	6	4	12

$n = 50$ $\qquad \sum f\, dx^1 = -6$ $\qquad \sum f\, dx^{12} = 62$

ప్రామాణ విచలనము : $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f\, dx^2}{n} - \left(\frac{\sum f\, dx}{n}\right)^2} \times i$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(62)}{(50)} - \left(\frac{0.6}{50}\right)^2} \times 10 = \sqrt{1.24 - 0.14} \times 10$$

$$= \sqrt{1.10} \times 10 = 1.048 \times 10 = 10.48$$

ఉదా : 9. 23. క్రమ విచలనము గణన చేయండి.

x	10	15	30	25	30	35	40
y	5	8	12	17	9	10	5

x	f	x_1^2	$f_i\, x$	$f_i\, x_i^2$
10	5	100	50	500
15	8	225	120	1,800
20	12	400	240	4,800
25	17	605	425	10,625
30	9	900	270	8,100
35	10	1,225	350	12,250
40	5	1,600	200	8,000
	66		**1,685**	**46,075**

Standard Deviation :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{X_1}\frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \frac{\left(\Sigma f_i x_i\right)^2}{\Sigma f_i}} = \sqrt{\frac{1}{66}\times 46{,}075 - \frac{(1{,}655)^2}{66}} = \sqrt{698.1060 - 628.7936} = \sqrt{69.3124} = 8.3254$$

ఉదా : 9. 23. ఈ క్రింది దత్తాంశాలను ప్రామాణిక విచలన గుణకాన్ని గణన చేయుము :

ఆదాయము	1000	900	800	700	600	500	400	300	200	100
వ్యక్తుల సంఖ్య	0	50	100	200	400	600	750	850	800	1000

ఆదాయము	మధ్య విలువ	f	$dx = x - 550$	fdx	fdx^2
100-200	150	100	- 400	- 40,000	1,60,00,000
200 - 300	250	50	- 300	- 15,000	45,00,000
300 - 400	350	100	- 200	- 20,000	40,00,000
400 - 500	450	150	- 100	- 15,000	15,00,000
500 - 600	550	200	0		0
600 - 700	650	200	100	20,000	20,00,000
700 - 800	750	100	200	20,000	40,00,000
800 - 900	850	50	300	15,000	45,00,000
900 - 1000	950	50	400	20,000	80,00,000

$\sum f\,dx = 15{,}000$ $\quad \sum f\,dx^2 = 4{,}45{,}00{,}000$

$$\Sigma f = 1000,\ \Sigma f\,dx = -15{,}000$$

$$\Sigma f\,dx^2 = 4{,}45{,}00{,}000$$

$$\overline{X} = A + (\Sigma fdx / \Sigma f) = 550 + (-15000/1000) = 550 + (-15) = 550 - 15 \quad \overline{X} = 535$$

$$\sigma = \sqrt{\left(\sum fd^2x/\sum f\right) - \left(\sum fdx/\sum f\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{(4{,}45{,}00{,}000/1000) - (-15{,}000/1000)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{44{,}500 - (-15)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{44{,}500 - 225} = \sqrt{44{,}275}$$

$$\sigma = 210.41$$

విచలన గుణకం : $c.v. = (\sigma / \overline{X}) \times 100 = 210.4/535) \times 100 = 39.33\%$

ఉదా : 9. 24. ఈ క్రింది దత్తాంశానికి ప్రామాణిక విచలనాన్ని గణన చేయుము :

చలనాలు : 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23

పౌనఃపున్యము : 3, 6, 11, 20, 8, 1, 1

x	f	$dx=x-20$	fdx	fdx^2
17	3	-3	-9	27
18	6	-2	-12	24
19	11	-1	-11	11
20	20	0	0	0
21	18	+1	+18	18
22	1	+2	+2	4
23	1	+3	+3	9
				93

$\sum f = 60$ $\sum f\,dx = -9$

ప్రామాణిక విచలనము : $(\sigma) = \sqrt{\dfrac{\sum f\,dx^2}{\sum f} - \left(\dfrac{\sum f\,dx}{\sum f}\right)^2}$

$$\sigma = \sqrt{\frac{93}{60} - \left(\frac{-9}{60}\right)^2} = 1.5 = (0.15)$$

$$\sigma = \sqrt{1.55 - 0.0225}$$

$$\sigma = \sqrt{1.5275} = 1.2359$$

ప్రామాణిక విచలనము : 1 . 2359

ఉదా : 9. 25. దిగువ ఇచ్చిన 10 మంది విద్యార్థుల మార్కుల నుండి అంకమధ్యమము ప్రామాణిక విచలనమును గణన చేయుము

తరగతిలోని వరుస సంఖ్య : 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208 ,209, 210

మార్కులు : 84, 51, 91, 60, 68, 62, 86, 58, 53, 47

వరుస సంఖ్య (m)	మార్కులు (x)	సగటు 66 విచలనాలు $(dx) = x-\bar{x}$	విచలనాల వర్గము $(dx^2) = (x-\bar{x})^2$
201	84	18	324
202	51	15	225
203	91	25	625
204	60	- 6	34
205	68	2	4
206	62	- 4	16
207	86	20	400
208	58	- 8	64
209	53	- 13	169
210	47	- 19	361
	660	$dx=0$	$\sum dx^2 = 2224$

సగటు $\mathrm{x} = \frac{660}{10} = 66$, అంకమధ్యమము : $x + \frac{\sum dx}{n} = 66 + \frac{0}{10}$

ప్రామాణిక విచలనము : $= \sqrt{\frac{\sum dx^2}{n} - \left(\frac{\sum dx}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{2224}{10} - \frac{(0)^2}{(10)}}$

$$= \sqrt{222.4 - (0)^2} = \sqrt{222.4 - 0}$$

9.13. వైషమ్యము మరియు కకుదత్వం :

క్రమరహితంగా ఉన్నరాశుల యొక్క అపరిష్కృత దత్తాంశము శ్రేణులను సరిపోల్చి చెప్పడానికి తగిన ఆధారాలను ఇవ్వలేదు. దత్తాంశ రాశులను సరిపోల్చి చెప్పవలెననుకొంటే, రాశుల యొక్క లక్షణాలను చేప్పే వైఖరులు అవసరము. కేంద్రస్థాన మానాలు, విస్తరణ మానాలు, సగటుకు రెండు వైపులా విస్తరించిన విలువ సౌష్ఠవంగా విభాజనం చెందినాయా లేదా ఏ విషయాన్ని వెల్లడి చేయలేవు. కాబట్టి సరిపోల్చే లక్షణాలు గల మరి రెండు మానాలను గురించి తెలుసుకోవలె, అవి అసౌష్ఠవము శిఖరత్వము వీటినే వైషమ్యము మరియు కకుదత్వం అంటారు.

వైషమ్యము :

వైషమ్యానికి అర్థము సౌష్టవలోపము అని చెప్పుకోవచ్చు. దీనినే అసౌష్ఠవ విభాజనం అని కూడా పిలవవచ్చు. సౌష్ఠవవిభాజనంలో అంశాలు కేంద్రస్థాన మానాల చుట్టూ సౌష్ఠవ క్రమంలో అమర్చి ఉంటాయి. సామాన్య వక్ర రేఖ అంటే గంటాకార పౌనఃపున్య వక్రరేఖ అని మనకు తెలుసుకదా కాబట్టి సౌష్ఠవ విభాజనంలో అంకమధ్యమము మధ్యగతము, బాహుళకము ఎల్లప్పుడూ సర్వసామ్యంగా

ఉంటాయనీ, వైషమ్య విభాజనలో మధ్యగతము, బాహుళకము, అంకమధ్యమము సమానంగా ఉండవు. వైషమ్యము సౌష్ఠవానికి వ్యతిరేకము.

అసౌష్ఠవ విభాజనము

సౌష్ఠవంగా లేని విబాజనము అసౌష్ఠవము లేదా వైషమ్యంతో ఉంటుందని అయితే ఆ వైషమ్యము ధనాత్మకంగాకాని, ఋణాత్మకంగా కాని ఉండవచ్చు. ధనాత్మక వైషమ్యం ఉన్న విభాజనంలో వైషమ్యం తోక కుడివైపుకు ఉంటుంది. అంకమధ్యమం విలువ. మధ్యగతము బాహుళకం విలువల కంటె ఎక్కువగా ఉంటుంది. మధ్యగతము విలువ బాహుళకం విలువ కంటే ఎక్కువగా ఉంటుంది. ఋణాత్మక వైషమ్యం ఉన్న విభాజనంలో వైషమ్యము (ఎడమ) వామ భాగం వైపుకు ఉంటుంది. ఇది అంకమధ్యమం విలువ, మధ్యగతము బాహుళకాల విలువకంటె తక్కువగా ఉంటుంది. మధ్యగతం విలువ బాహుళకం విలువకంటే తక్కువగా ఉంటుంది.

కార్ల్ పియర్సన్ వైషమ్యగుణకము

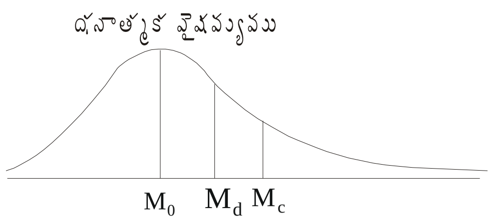
పియర్సన్ వైషమ్యగుణకము అంటే సాపేక్షిక వైషమ్యమానం తెలుసుకోవడానికి అంకమధ్యమము బాహుళకాల మధ్యగల తేడాను ప్రామాణిక విచలనంతో భాగించవలె. కాబట్టి పియర్సన్ వైషమ్యగుణక సూత్రాన్ని సాంకేతికంగా ఇట్లా చూపవచ్చు.

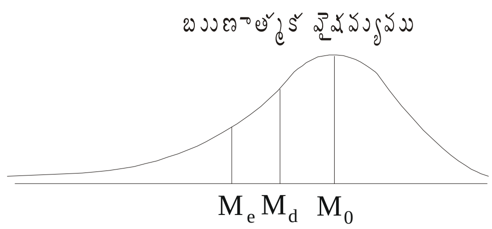
వైషమ్యగణకము = JO‡^¼=ò Ðƒì, •ˆ Ç‡ò / ã‡•¶} Hq KÇ#=ò

వైషమ్యము కుడివైపునకు ఉంటే ధనాత్మక వైషమైనప్పుడు + గుర్తు, వైషమ్యము ఎడమవైపుకు ఉండే అంటే ఋణాత్మకమైనప్పుడు - గుర్తువస్తాయి. బాహుళకస్థానాన్ని నిర్ణయించడం ఒక్కొక్కప్పుడు అంత సులభంకాదు.

వైషమ్యము = 3(JO‡^¼=ò Ð=^ÎQ®Çò) / ã‡•¶} Hq KÇ#=ò

పై గుణకంలో విలువ ± 3ల మధ్య ఉండవచ్చు





బౌలే వైషమ్య గుణకము

"మధ్యగతంనుంచి తీసుకొన్న చతుర్థాంశ విచలనాల తేడాను వాటి మొత్తంతో భాగిస్తే వైషమ్యం వస్తుంది'' సౌష్ఠవ విభాజనంలో చతుర్థాంశాలు మధ్యగతానికి సమాన దూరంలో ఉంటాయి. కాబట్టి 0 అవుతుంది కాని అసౌష్ఠవ విభాజనంలో ఈ రెండు సమానంగా ఉండవు. కాబట్టి బౌలే వైషమ్యగుణకాన్ని సాంకేతికంగా ఇట్లా చూపవచ్చు.

బౌలే వైషమ్యగుణకము $$SK_B = \frac{(Q_3 - M) - (M - Q_1)}{(Q_3 - M) + (M - Q_1)} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$$

లేదా

$$\frac{\text{ఎగువ చతుర్థాంశము + దిగువ చతుర్థాంశము - 2 మధ్యగతము}}{\text{ఎగువ చతుర్థాంశము - దిగువ చతుర్థాంశము}}$$

$$\frac{\text{చతుర్థాంశాల మొత్తము - 2 మధ్యగతము}}{\text{చతుర్థాంశ విచలనము}}$$

వీలైనంత వరకు కార్ల్ పియర్సన్ వైషమ్యగుణకాన్నే ఉపయోగించడం మంచిది.

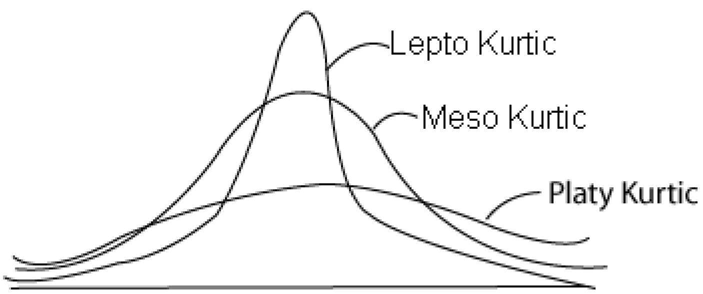
9.14. కకుదత్వం లేదా శిఖరీయత :

ఒక విభాజనానికి గల పౌనఃపున్య వక్రం యొక్క శిఖరానికి (Peak) గల పదను (Sharpness) ను శిఖరీయత (Peakedness) లేదా కకుదత్వం (Kurtosis) అంటాం. ఒక పౌనఃపున్య విభాజన దత్తాంశానికి కేంద్రస్థానం, విస్తరణ, అసౌష్టవత కొలతలు తెలిసినంత మాత్రాన ఆ విభాజనపు స్వరూప, స్వభావాలు పూర్తిగా తెలిసినట్లు కాదు. వీటితో బాటు విభాజనానికి గీసిన వక్ర రూపాలను గురించి తెలుసుకోవడం కూడా ఎంతైనా అవసరం.

పౌనఃపున్య విభాజన దత్తాంశాలకు గీసిన వక్రాలు సౌష్టవంగా ఉండవచ్చు. వాటి సగటులు సమానం కావచ్చు. క్రమ విచలనం విలువ సమానం కావచ్చు. కాని సౌష్టవ వక్రాల పొందిక సమానం కాకపోవచ్చు. అంటే కొన్ని వక్రాలు మొనదేలి ఉండవచ్చు. మరికొన్ని వక్రాలు చదునుగా ఉండవచ్చు.

కకుదత్వం రకాలు : ఏదైనా సౌష్ఠవ పౌనఃపున్య వక్రం మధ్యభాగం చదునుగా ఉందా లేదా కొనతేలి ఉందా అని తెలిపే లక్షణాన్ని కకుదత్వం (Kurtosis) అంటారు. గ్రీకు భాషలో కకుదత్వం అంటే “ఉబికి ఉండడం” (bulginess or humpedness) అని అర్థం.

మూడు సౌష్ఠవ పౌనఃపున్య విభాజన దత్తాంశాలకు గీసిన పౌనఃపున్య వక్రాలను క్రింది పటంలో చూద్దాం.



పటం

ఇంకో విధంగా

దత్తాంశాల సగటుకు పైమూడు వక్రాలు సౌష్ఠవంగా ఉన్నాయి. వక్రాల ఉపరితలం ఉబ్బెత్తు (Convexity) లక్షణం దృష్ట్యా వీటి మధ్య భేదం ఉంది. ఒక సౌష్ఠవ వక్రం ఎక్కువ చదునుగా ఉందా లేదా ఎక్కువ శిఖరం కలిగి మొనదేలి ఉందా అని తెలిపే గుణాత్మక లక్షణాన్ని ‘కకుదత్వం’ (Kurtosis) అని కార్ల్ పియర్సన్ మహాశయుడు వివరించారు.

దీనికి 'కొలమానం'గా $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2}$ ను వేరే ప్రతిపాదించారు.

ఎక్కువ చదునుగా గాని లేదా ఎక్కువ శిఖరంతో మొనదేలిగాని లేనట్టి (A) రకం వక్రాన్ని మెసోకర్టిక్ అంటారు. దీనినే 'సామాన్య వక్రం' అంటారు. ఈ వక్రానికి $\beta_2 = 3$ కు సమానం. సామాన్య వక్రాన్ని ప్రాతిపదికగా ఇతర వక్రాలను పోల్చుతాం.

సామాన్య వక్రంతో పోల్చితే B వక్రం చాలా చదునుగాను, విశాలంగానూ ఉంది. ఇట్టి వక్రాన్ని లఘు కకుదత్వ వక్రం (Platy Kurtic Curve) అంటారు. అటువంటి పౌనఃపున్య విభాజన దత్తాంశాలకు $\beta_2 < 3$ అంటే $\Upsilon_2 < 0$ అవుతుంది. అట్లాగాక C-వక్రం మాదిరి సామాన్య వక్రం కంటే ఉపరితలం ఎత్తుగా, సన్నమైన కొనదేలినదైతే దానిని బృహత్ కకుదత్వ వక్రం (lepto kurtic curve) అంటారు. ఈ వక్రానికి $\beta_2 > 3, \gamma_2 > 0$ గా ఉంటాయి. కకుదత్వ ఆధిక్యత $\gamma_2 = \beta_2 - 3$ సామాన్య విభాజనానికి $\gamma_2 = 0.$

ఉదా : 9. 26. ఈ క్రింది దత్తాంశానికి వైషమ్య గుణకాన్ని గణన చేయుము :

వేతనాలు : 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000

కార్మికుల సంఖ్య : 50, 20, 25, 10, 30, 30, 40, 15, 15, 2

వైషమ్య గుణక విభజన

Salaries	f	$x - 500$	$dx = \frac{x-500}{100}$	$f\,d_x$	dx^2	$f\,d_x^{\,2}$
100	50	- 400	- 4	- 200	16	800
200	20	- 300	- 3	- 60	9	180
300	25	- 200	- 2	- 50	4	100
400	10	- 100	- 1	- 100	1	10
500	30	0	0	0	0	0
600	30	+100	+1	30	-1	30
700	40	+200	+2	+80	4	160
800	15	+300	+3	+45	9	135
900	15	+400	+4	+60	16	240
1000	2	+500	+5	+10	25	50

$\sum f = 237$ $\sum f\,dx = -95$ $\sum f\,dx^2 = 170$

$$\overline{X} = A + \left(\sum f\,d_x + \sum f\right) \times i = 500 + \left(-95/237\right) \times 100$$

$$= 500 + (-0.4008)x100 = 500 - 40.08 = 459.92$$

$$\sigma = \sqrt{(\sum Fdx^2 / \sum f) - (\sum Fdx / \sum f)^2} \times i = \sqrt{(1705/237) - (-95/237)^2} \times 100$$

$$= \sqrt{7.194 - (0.4008)^2} \times 100$$

$$= \sqrt{7.194 - (0.1606} \times 100 = \sqrt{7.0334} \times 100 = 2.652 \times 100 = 265.2$$

బాహుళకము = 100

∴ వైషమ్య గుణకము = JOI‡^Î¼°=ò Ð ƒì, •ˆ K‡ò / ã‡¶} ‡qKÇ#=ò

$$= \frac{459.92 - 100}{265.2} = 1.357$$

ఉదా : 9. 27. ఈ క్రిందివానిలో గల ప్రామాణిక వైషమ్యమును కనుగొనుము :

తరగతి అంతరము	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60
పౌనఃపున్యము	3	5	9	10	12	12

ప్రామాణిక వైషమ్యము : 3 (a - m)

తరగతి అంతరము	మధ్య విలువలు (m)	పౌనఃపున్యం (f)	సంచిత పౌనఃపున్యం $(C.F.)$	మధ్యగతం (dx)	$(f)x\,dx$ $f\,dx$	$(fdx)^2$
0 - 10	5	3	3	-30	-90	2700
10-20	15	5	8	-20	-100	2000
20-30	25	8	16	-10	-80	800
30-40	35	10	26	0	0	0
40-50	45	12	38	+10	+120	1200
50-60	55	12	50	+20+240	4800	
		50		+90	11500	

$$a = x + \frac{\sum f\ dx}{n} = 35 + \frac{90}{50} \quad = \text{ma}35 + 1.8 = 36.8$$

$$\text{Middle Item} = \text{N}/2 = \frac{50}{2} = 25$$

$$Median = l_1 + \frac{i}{f}(m-c) \;=30+\frac{10}{10}(25-16) \;=30+\frac{10\times 9}{10} \;=\; 39$$

$$S.D.(\sigma) = \sqrt{\left[\frac{\sum f\,dx^2}{n}\right]-\left[\frac{\sum f\,dx}{n}\right]^2}$$

$$=\sqrt{\left[\frac{11500}{2}\right]-\left[\frac{90^2}{50}\right]}$$

$$=\sqrt{230-3.24} \;=\sqrt{226.76} \;=\; 15.06$$

Coeff. of skewness = $\frac{3(a-M)}{\sigma}$ $=\frac{3(36.9-39)}{15.06}$ $=\frac{-66}{1506}$ $=\; 0.44$

ఉదా : 9. 28. కార్ల్ పియర్సన్ వైషమ్య గణకము క్రింద దత్తాంశం నుండి కనుగొనండి.

వేతనాలు రూ.లలో	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 -40	40 - 45	45-50
పనివారి సంఖ్య	8	16	30	45	62	32	15	6

వేతనాలు	**పనివారిసంఖ్య** (f)	**మధ్యవిలువలు** **M.V.**	**సగటు నుండి సోపాన విచలనం** dx	**మొత్తము విచలనాలు** $f\,dx$	**లబ్ధం** $f\,dx^2$
10 - 15	8	12.5	-4	-32	128
15 - 20	16	17.5	-3	-48	144
20 - 25	30	22.5	-2	-60	120
25 - 30	25	27.5	-1	-45	45
30 - 35	62	32.5	0	0	0
35 - 40	32	37.5	+1	+32	32
40 - 45	15	42.5	+2	+30	60
45 - 50	0	47.5	+3	+18	54
	214			$\sum f\,dx =$ -185+80	583

అంక మధ్యమము : $x^1+\frac{fdx}{N}\times i$

$$=32.5+\frac{-105}{214}\times 5 \;=\; 32.5 - 2.46 \;=\; 30.04$$

బాహుళకము : $=Z=1+\frac{f_1-f_0}{2f_1-f_0-f_2}\times i$ $\;=30+\frac{62-45}{124-45-32}\times 5$ $\;=30+\frac{17\times 5}{47}$

$= 30 + 1.81 = 31.81$

ప్రామాణిక విచలనము : $\sqrt{\left[\frac{\sum f\,dx^2}{N}\right] - \left[\frac{\sum f\,dx}{N}\right]^2} \times 1$

$= \sqrt{\frac{583}{214} - \frac{-105^2}{214}} \times 5 = \sqrt{2.5034 \times 5} = 1.582 \times 5 = 7.91$

పియర్సన్ వైషమ్య గుణకము : మధ్యగతము - బాహుళకము

: అంకమధ్యమము - బాహుళకము

ప్రామాణిక విచలనము

$= \frac{30.04 - 31.01}{7.91} = \frac{-1.77}{7.91} = -0.2237$

9.15 సారాంశము :

కేంద్రస్థానపు కొలతలు సాంఖ్యాకశాస్త్రములో గణనియమైన పాత్రకలిగియున్నది. దత్తాంశముయొక్క ప్రాతినిద్యము తెలియుటకు కేంద్రస్థానపు కొలతలు అవసరము వీటిలో అంకమధ్యమము ఆదర్శసరాసరి, ఈ పాఠంలో మనము భారిత అంకమధ్యమము, గుణమధ్యమము, హరమధ్యమము వంటి బీజీయ సరాసరులను మరియు మధ్యగతము, బహుళకము స్థాన నిర్ణయ సరాసరులను తెలుసుకొన్నాము. విచ్ఛిన మరియు అవిచ్ఛిన దత్తాంశాలలో వాటి గణన మరియు వాటి లక్షణాలను చదివినాము. విస్తరణ కొలతలు దత్తాంశము యొక్క విచలన గురించి తెలుసుకొన్నాము. వీటిలో క్రమవిచలనము మరియు వైషమ్యములు అతిముఖ్యమైనవి. క్రమవిచలనాంక గుణకము గణించుట ద్వారా దత్తాంశము యొక్క లక్షణాలు తెలుసుకొనవచ్చును. అంతేగాక వివిద దత్తాంశాల మధ్యను తారతమ్యతను, సాపేక్షతను తెలుసుకొనవచ్చును, సౌష్ఠవము ఇచ్చిన దత్తాంశమునకు గణింపవచ్చును. ఈ పాఠంలో కకుద్వత్వము బట్టి దత్తాంశము యొక్క శిఖరీయతను తెలుసుకొనవచ్చును.

9.16 గుర్తుంచుకోవలసిన విషయాలు

1. యాదృచ్ఛిక చలరాశి దాని ప్రాధాన్యత, సరాసరులు అన్నింటిలోకి అంకమధ్యమము శ్రేష్ఠమైనదని గుర్తుంచుకోవాలి.

2. విస్తరణ కొలతలలో ప్రామాణిక విచలనముకు అత్యధిక ప్రాధాన్యత కలిగి వున్నదని గుర్తుంచుకోవాలి.

9.17 స్వయం సమాధాన ప్రశ్నలు

1. ఈ క్రింది దత్తాంశానికి అంకమద్యమము, మధ్యగతము, బాహుళకము గణించండి.

X :	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
Y :	1	20	69	108	78	22	2

2. అంకమధ్యయము, మధ్యగతము, బాహుళకము ఈ క్రింది దత్తాంశానికి గణించండి.

X:	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89
Y:	5	9	14	20	25	15	8	4

3. క్రింది దత్తాంశమునకు అంకమధ్యమము కనుక్కోండి.

తరగతి అంతరం:	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
పౌనఃపున్యము:	9	10	23	41	39	9

4. హర మధ్యమమును ఈ క్రింది దత్తాంశమునకు కనుక్కొనుము.

తరగతి అంతరము:	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
పౌనఃపున్యము:	8	11	34	49	31	20	5

5. క్రింది దత్తాంశానికి వైషమ్య గుణకాన్ని గణన చేయుము.

వేతనాలు:	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
కార్మికుల సంఖ్య:	50	22	20	13	30	35	41	16	14	3

6. ఈ క్రింది వానిలో గల ప్రామాణిక వైషమ్యమును కనుగొనుము.

తరగతి అంతరము:	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
పౌనఃపున్యము:	4	6	8	11	13	14

7. కార్లపియర్సన్ వైషమ్య గుణకము క్రింద దత్తాంశం నుండి కనుగొనండి.

వేతనాలు రూ॥లలో:	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
పని వారి సంఖ్య:	9	17	28	45	63	35	18	8

9.18 సంప్రదించవలసిన పుస్తకాలు

1. Fundamentals of Mathematical Statistics : S.C. Gupta & V.K. Kapoor, Publisher S.S. Chand&Co

2. Basic Statistics by B.L. Agarwal, Third Edition, New Age International (P) Limited.

పాఠం : 10

సహసంబంధము

(Correlation)

పాఠ్య నిర్మాణ క్రమము

లక్ష్యం :

ఈ పాఠం చదివిన తరువాత మీరు

- ద్విచలరాశులు
- సహసంబంధము వాటి ఉపయోగములు
- వివిధ సహసంబంధములు / ధన లేదా ఋణ సంబంధము, సరళరేఖా లేదా వక్రరేఖీయ సహసంబంధము
- వివిధ సహసంబంధ గుణకములను గణన చేయు పద్ధతులు
- కోటిసహసంబంధము
- సహసంబంధము యొక్క లక్షణములు
- పాక్షిక మరియు బహు సహసంబంధ గుణకములను గణన చేయుట.

గురించి తెలుసుకుంటారు.

10.1 ఉపోద్ఘాతం:

శ్రేణుల విశ్లేషణ గురించి సరిపోల్చి చదవడానికి, కేంద్రస్థానపు మానాలు, విస్తరణమానాలు, వైషమ్యం కూడా గణనచేసినాము. అయితే మనము ఇంత వరకు అధ్యయనం చేసిన అవి ఒకే ఒక్క చలనానికి సంబంధించినవి మాత్రమే. కాని ఆచరణలో రెండు లేదా రెండు కంటె ఎక్కువ చలనాలను ఉపయోగించవలసిన అనేక సమస్యలు వస్తాయి. ఉదాహరణకు భార్యా, భర్తల వయస్సులకు ఎత్తు, బరువులకు, వర్షపుదినాలకు, గొడుగుల అమ్మకాలకు ఉన్న సంబంధాన్ని తెలుసుకొనే కుతూహలం ఉండవచ్చు. ఎందువల్లనంటే సాధారణంగా భార్యల వయస్సు ఎక్కువ అయ్యేకొద్దీ భర్తల వయస్సు కూడా ఎక్కువకావడం, ఎత్తు ఎక్కువ అంటే పొడవుగా ఉన్న వ్యక్తుల బరువులు ఎక్కువగా ఉండడం, లేదా వర్షాలు ఎక్కువగాపడే రోజులలో గొడుగుల అమ్మకం ఎక్కువకావడం అనే రెండు (లేదా అంతకంటె ఎక్కువ) చలనాల మధ్యఉన్న సంబంధాన్ని తెలుసుకోవడానికి ఉపయోగపడే గణాంక సాధనను (Statistical tool)

సహసంబంధము (Correlation) అంటారు. కాబట్టి దర్యాప్తుదారు (శోధకుడు) సహసంబంధ విలువను వివరించేటప్పుడు తనదత్తాంశాన్ని క్షుణ్ణంగా అర్థంచేసుకొంటే వివరణలో వచ్చే దోషాలు తొలగిపోతాయి. అంటే సమస్యా పరిష్కారానికి అవసరమైన అన్ని విషయాలను బాగా తెలుసుకోవలె. అట్లా తెలుసుకొని చాలా అప్రమత్తతతో ప్రవర్తించి ఈ సాధనాన్ని (Tool) ఉపయోగించుకోవలె. అజాగ్రత్తగా ఉపయోగిస్తే సహసంబంధ విశ్లేషణము తప్పు మార్గాన్ని పట్టిస్తుంది.

కాబట్టి ఏవైనా రెండు చలరాశుల మధ్య పరస్పర మార్పు, అంటే ఒక చలరాశిలోని మార్పు (పెరుగుదల లేదా తగ్గుదల) ఇంకొక చలరాశిలో కూడా మార్పును కలిగించగలిగితే అటువంటి చలరాశుల మధ్య సహసంబంధం ఉందని అర్థం. ఇదేవిధంగా (ధర, సరఫరా), (ఉత్పత్తి, అవసరం), (ఆదాయం, వ్యయం) మొదలైనవి పరస్పర సంబంధాన్ని కలిగి ఉన్న చలరాశులే.

రెండు చలరాశులూ ఒకే దిశవైపు మార్పు చెందుతుంటే, అంటే రెండూ పెరుగుదలను లేదా తగ్గుదలను చూపుతుంటే అటువంటి చలరాశుల మధ్య ధనాత్మక సహసంబంధత ఉందని అర్థం. ఉదాహరణకు ఆదాయం పెరిగితే వ్యయం కూడా పెరుగుతుంది లేదా ఆదాయం తగ్గితే వ్యయం కూడా తగ్గుతుంది.

రెండు చలరాశులూ పరస్పర విరుద్ధ దిశలవైపు మార్పు చెందుతుంటే, అంటే ఒక చలరాశిలోని పెరుగుదల (లేదా తగ్గుదల) ఇంకొక చలరాశిలో తగ్గుదల (లేదా పెరుగుదల)ను చెందించగలిగితే అటువంటి చలరాశుల మధ్య రుణాత్మక సహసంబంధం ఉందని అర్థం. ఉదాహరణకు వస్తువుల ఉత్పత్తి లేదా సరఫరా పెరిగితే వాటి గిరాకీ (డిమాండు) లేదా ధర తగ్గుతుంది.

రెండు చలరాశులూ సమాన అంతరాలలో పెరిగితే లేదా రెండూ సమాన అంతరాలలో తగ్గితే వాటి మధ్య సంపూర్ణ ధనాత్మక సహసంబంధం ఉన్నదని అర్థం.

రెండు చలరాశులూ సమాన అంతరాలలో పరస్పర విరుద్ధ దిశలలో మార్పు చెందితే వాటి మధ్య సంపూర్ణ రుణాత్మక సహసంబంధం ఉందని అర్థం.

10.2 సహసంబంధము - రకాలు:

సహసంబంధము రెండు రకాలలో ఉండవచ్చు.

1. ధన లేదా ఋణ సంబంధము
2. లైనియర్ లేదా నాన్ - లైనియర్ సహసంబంధము (సరళరేఖా లేదా వక్రరేఖీయ సహసంబంధము).

ధన లేదా ఋణ సహసంబంధము:

సహసంబంధము ధనాత్మకము : రెండు చలనాలు ఒకే దిక్కులో ప్రయాణం చేస్తే వాటి మధ్య ఉన్న సహసంబంధాన్ని ధనాత్మకము అంటారు. ఉదాహరణకు ధరలు పెరిగితే సప్లయ్ కూడా పెరుగుతుందని. ధరలు తగ్గితే సప్లయ్ కూడా తగ్గుతుందని మనం చెప్పుకొంటే వాటి మధ్యఉన్న సంబంధము ధనాత్మకము అంటాము. రెండు చలనాలలో ఒక చలనం విలువ పెరిగితే రెండో చలనం విలువ తగ్గినట్లయితే ఆ రెండు చలనాల మధ్య సంబంధము ఋణాత్మకమంటారు. లేదా రెండు చలనాల విలువలు వ్యతిరేక దిక్కులలో చలిస్తే వాటి మధ్య ఉన్న సంబంధాన్ని ఋణ సహసంబంధము లేదా విలోమ సహసంబంధము (Inverse correlation) అంటారు.

లైనియర్ సరళరేఖా లేదా వక్రరేఖీయ (అసరళ) సహసంబంధము: రెండు చలనాలమధ్య విచరణము స్థిర నిష్పత్తిలో ఉంటే వాటిమధ్య సహసంబంధాన్ని లైనియర్ లేదా సరళరేఖా సహసంబంధమంటారు. అంటే ఒక చలనంలోని మార్పు రెండో చలనంలోని మార్పుకు సమాన నిష్పత్తిలో ఉండే అవి సరళరేఖా సహసం బంధంతో ఉన్నట్లు చెప్పవచ్చు. ఉదాహరణకు ధరల పెరుగుదల 20

శాతం అనుకుంటే సప్లయ్‌కూడా 20 శాతం పెరిగినప్పుడు వాటి మార్పు స్థిరనిష్పత్తిలో ఉన్నది. అట్లాంటి బిందువులతో రేఖా చిత్రపటం గీస్తే ఆ బిందువులు ఒక సరళరేఖవలె ఏర్పడతాయి.

సహసంబంధాన్ని అనేక గణాంకశాస్త్రవేత్తలు నిర్వచించినారు. కాని వాటి సారాంశమంతా ఒక్కటే. కాబట్టి కొన్ని నిర్వచనాలు ఇక్కడ ఇవ్వడమైంది.

"రెండు పరిమాణాలమధ్య సంబంధము, ఒకదానిలోని మార్పులకు, రెండోదానిలోని మార్పులు సహకరించినట్లునప్పుడు, అంటే ఒకదానిలో పెరుగుదలకు లేదా తరుగుదలకు రెండో దానిలో పెరుగుదల లేదా తరుగుదలకు సంబంధమున్నట్లు ఒక దాని పరిమాణంలో ఎంత ఎక్కువమార్పువస్తే రెండో దానిలో అంత ఎక్కువ పరిమాణంలో మార్పు వచ్చినట్లు కనబడినట్లయితే, ఆ రెండు పరిమాణాలమధ్య సహసంబంధము ఉంటుంది. అని బౌలే మహాశయుడు నిర్వచించినాడు. ఇంచుమించు ఇదే అర్థాన్ని ఇచ్చేటట్లు కోనార్ మహాశయుడు నిర్వచనము ఇచ్చినాడు. "రెండు లేదా అంతకంటె ఎక్కువ పరిమాణాలు సహకరించి చలించినప్పుడు అంటే ఒకదాని గమనాలకు అనురూపంగా మిగిలినదాని గమనాలు సమీపించి, అనుసరించి నప్పుడు రెండింటికి సహసంబంధము ఏర్పడుతుంది". రెండు చలనాల మధ్యసంబంధాన్ని సామాన్య సహసంబంధము (Simple correlation) అంటారు, ఇక్కడ 'సంబంధము' అనే పదము చలనాలు పరస్పరం ఆధారపడినట్లు తెలపడానికి ఉపయోగించడమైంది. అయితే పరస్పరం ఒకదాని మీద ఒకటి ఆధారపడటం వల్లనే రెండు శ్రేణులమధ్య సహసంబందము ఏర్పడకపోవచ్చు. ఒక్కొక్కప్పుడు ఒక శ్రేణిలోని మార్పులు, రెండో శ్రేణిలో మార్పులను తీసుకొని రావచ్చు. అట్లా రెండు శ్రేణుల మధ్య కార్య - కారణసంబంధము ఉండవచ్చు. ఉదాహరణకు మనము, వర్షపు రోజులు, గొడుగుల అమ్మకాలమధ్య చాలా ఎక్కువ డిగ్రీలో (స్థాయి) సంబంధము ఉన్నది అన్నప్పుడు వర్షపు రోజులు కారణం గాను, గొడుగుల అమ్మకము తత్‌కార్యం గాను ఉన్నవి. అంటే వర్షపురోజులు ఎక్కువ అయితే గొడుగుల అమ్మకము ఎక్కువ, లేదా వర్షపురోజులు తక్కువ అయితే గొడుగుల అమ్మకము తక్కువ అని చెప్పవచ్చు. ఇంకా ఎక్కువ సహ సంబంధమున్నంత మాత్రంతో కార్య-కారణసంబంధము ఉన్నదని కూడా ఒక్కొక్కప్పుడు ఊహించనవసరంలేదని కూడా గుర్తించవలె. అయితే సహసంబంధము సార్థకమైన డిగ్రీలో ఉండటం ఏ ఒక్క కారణంచేతనైనా కావచ్చు, లైదా అనేక కారణాల వల్ల కూడా కావచ్చు.

సహసంబంధము ఒక్కొక్కప్పుడు రెండు శ్రేణులలో కాకతాళీయంగా జరిగింది నిజానికి ఆ రెండింటికి ఏ విధమైన సంబంధంలేదు. కాని అది నిరర్థక సహసంబంధము లేదా క్లుప్తంగా చెప్పవలెనంటే మిథ్యా సహసంబంధము అంటారు. అట్లాగే బరువుగా ఉన్న విద్యార్థులకు గణాంక శాస్త్రంలో ఎక్కువ మార్కులు వస్తున్నాయంటే వాటి సహసంబంధము అర్థరహితమే.

ఒక చలనంలోని మార్పుకు రెండో చలనంలోనిమార్పు స్థిర నిష్పత్తిలో లేనప్పుడు వక్రీయ సహసంబంధ మంటారు.కర్మాగారంలో పనిచేసేవారి సంఖ్య రెండింతలు చేసినప్పుడు వారు చేసే ఉత్పత్తి రెట్టింపు కాకపోవచ్చు. అట్లాంటప్పుడు అంటే మార్పులలో స్థిరనిష్పిత్తి ఏర్పడినప్పుడు వాటి మధ్య మహసంబందాన్ని వక్రిరేఖీయ సహసంబంధమ మంటారు.

పైన చెప్పిన రెండు రకాల సహసంబంధము ఒక్కొక్కప్పుడు సామాన్యమని, పాక్షికమని, బహుళమని కూడా చెబుతారు. సామాన్యసహ సంబంధంలో రెండు చలనాలనే అధ్యయనం చేస్తాము. అట్లాకాక రెండు కెంటె ఎక్కువ చలనాలను గురించి అధ్యయనం చేస్తే దానిని బహుళ సహసంబంధ మంటారు. ఉదాహరణకు రాబడి ఖర్చ రెండు చలనాలను తీసుకొంటే అది సామాన్యసహసంబంధము అవుతుంది. అట్లాకాక రాబడి, కర్చులు, ధరల పెరుగదల కూడా తీసుకొంటే అది బహుళ సహసంబంధము అవుతుంది. అట్లాఏ వయస్సు. బరువు, ఎత్తు తీసుకోవచ్చు. రాబడి, ఖర్చులు, ధరల పెరుగుదల మొదలైన చలనాల మూడింటిలో రెండు చలనాలను మాత్రమే గురించి (ఉదాహరణకు రాబడి, ఖర్చుల మధ్యగల సహసంబంధాన్నే) అధ్యయనం చేస్తే అది పాక్షిక సహసంబంధము అవుతుంది. అట్లాగే వయస్సు బరువు ఎత్తులలో వయస్సు బరువు తీసుకోవచ్చు. మనము ఈ అధ్యాయంలో సామాన్య సహసంబంధం గురించి మాత్రమే తెలుసుకొంటాము.

సహసంబంధము అధ్యయనం చేయడానికి కొన్ని పద్ధతులు ఈ దిగువ ఇచ్చినారు. వాటివల్ల రెండు చలనాల మధ్య సహసంబంధము 'ఉన్నదా' 'లేదా' అని తెలుసుకోవచ్చు.

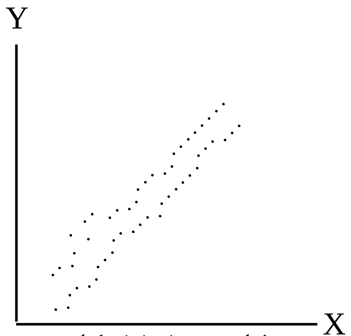
1. వ్యాపన పటము 2. సహసంబంధ గుణకము

1. వ్యాపనపటము : వ్యాపన పటంద్వారా సంబంధంగల రెండు చలనాలను గురించి అధ్యయనం చేయడం చాల సులువైన ప్రక్రియ. ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించేటప్పుడు ఇచ్చిన దత్తాంశాన్ని గ్రాఫ్ కాగితం పై బిందువులు ద్వారా గుర్తించవలే. రెండు చలనాలమధ్య సంబంధాన్ని తెలుసుకోవడం సహసంబంధ విశ్లేషణలో మొదటి మెట్టు. సహసంబంధ విశ్లేషణలో ప్రతి అంశము యొక్క పరిమాణానికి ఒక జత (జంట) సంఖ్యావిలువలు ఉంటాయి. అ జంట విలువలలో ఎకటి స్వతంత్ర చలనం అయితే రెండోది మొదటి దానిపై ఆధారరపడిన అస్వతంత్ర చలనము అవుతుంది. ఈ రెండు చలనాలను X, Y అనుకొంటే రేఖా చిత్రపటం గీయడానికి ఒక చలనాన్ని (స్వతంత్ర విచలనాన్ని X - అక్షం మీద, రెండో (స్వతంత్ర చలనాన్ని) Y- అక్షం మీదా తీసుకొని, ఒక జత విలువలకు ఒక బిందువు చొప్పున, అంటే X - మీద విలువకు అనురూపంగా Y - మీద విలు ఉండేటట్లు ఒక బిందువును గుర్తించవలె, అట్లా మొత్తం దత్తాంశాన్ని గుర్తిస్తే దత్తాంశంలో ఎన్ని జతల విలువలుంటే రేఖా చిత్రపటం మీద అన్ని బిందువులు మనకు వస్తాయి ఇప్పుడు ఆ బిందువుల వ్యాపనాన్ని బట్టి, రెండు చలనాలమధ్య సంబంధము ఉన్నదీ లేనిదీ ఒక నిర్ణయానికి రావచ్చు అంటే ఆ బిందువులు ఒక బిందుక్రమాన్ని ఊర్ధ్వదిశ లేదా ఆధోదిశగా చూపిస్తే ఆ రెండు చలనాలు సహసంబంధము కలిగి ఉన్నట్లు చెప్పవచ్చు మనము గుర్చించిన బిందువులు ఏవిధమైన బిందుక్రమాన్ని చుపనప్పుడు రెండు చలనాల మధ్య సహసంబంధం లేనట్లు చెప్పవచ్చు బిందువులు ఏ విధంగా అయితే వ్యాపనం చెందుతాయో దానినిబట్టి రెండు చలనాలమధ్య సంబంధము ఉన్నదీ లేనిదీ ఒక నిర్ణయానికి రావచ్చు. అంటే ఆ బిందువులు ఒక బిందుక్రమాన్ని ఊర్ధ్వదిశ లేదా ఆధోదిశగా చూపిస్తే ఆ రెండు చలనాలు సహసంబందము కలిగి ఉన్నట్లు చెప్పవచ్చు మనము గుర్తించిన బిందువుల ఏ విధమైన బిందుక్రమాన్ని చూపనప్పుడు రెండు చలనాల మధ్య సహసంబంధం లోనట్లు చెప్పవచ్చు బిందువులు ఏ విధంగా అయితే వ్యాపనం చెందుతాయో దానిని బట్టి రెండు చలనాల మధ్య సంబంధం యొక్క ఉనికిని చ్పెవచ్చు. అట్లా బిందువులతో ఏర్పడిన మార్గము ఇంచుమించుగా దిగువ ఎడమ మూలనుంచి ఎగువ కుడి మూలకు పోతే అట్లాంటి సంబంధాన్ని ధన సహసంబంధ మంటారు. ఇక్కడ తక్కువ విలువలు, రెండో చలనం తక్కువ విలువలతోను, ఎక్కువ విలువలు రెండో చలనం ఎక్కువ విలువలతోను పోయినప్పుడు ధన సహసంబంధము ఏర్పడుతుంది.

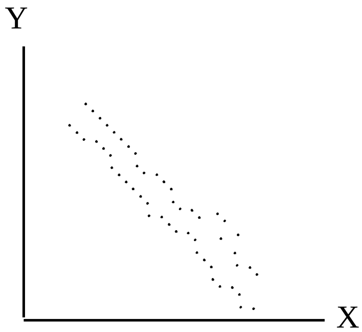
దిగువ చూపిన మొదటి పటంలో బిందుపథము ఎడమపక్క దిగువ మూల నుంచి క్రమేణ వృద్ధిచెందుతూ కుడివైపు ఎగువమూలకు చేరింది. దీనిని ధనసహసంబంధ మంటారు. అయితే సంపూర్ణ ధనసహసంబంధము ఉన్నప్పుడు, మనకు వచ్చే బిందుపథము సరళరేఖగా ఉంటుంది కాని ఆర్థిక దత్తాంశాలలో సంపూర్ణ సహసంబంధము సాధారణంగా ఉండదు.

అట్లాగే ఎక్కువ విలువలు రెండో చలనం తక్కువ విలువలతోను, తక్కువ విలువలు రెండే చలనం ఎక్కువ విలువతోను పోయినప్పుడు ఋణసహసంబంధము ఏర్పడుతుంది. పైన చూపిన రెండో పటంలో అది చూడవచ్చు. అక్కడ బిందుపథము ఎడమవైపు ఎగువ మూలనుంచి కూడివైపు దిగువమూలకు ఉంటే దీనిని ఋణసహసంబంధమంటారు. కాని సంపూర్ణ ఋణ సహసంబంధము ఉన్నప్పుడు మనకు ఎగువ ఎడమనుంచి కుడి దిగువ మూలకు ఒక సరళరేఖ ఏర్పడుతుంది అనికూడా ఇది వరకే తెలుసుకొన్నాము.

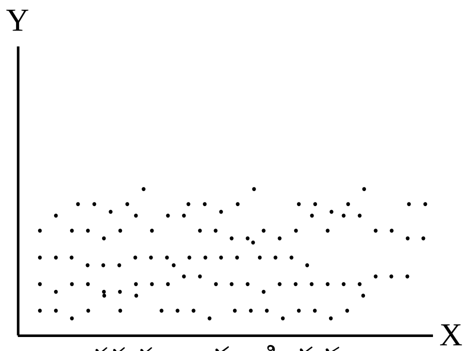
ఒక గుర్తించిన బిందువువల్ల ఒక పథము ఏర్పడకపోయినట్లయితే, అ రెండు చలనాల మధ్య సహచర్యము లేదని, అంటే స్వతంత్రంగా ఉన్న చలనానికి, అస్వతంత్రంగా ఉన్న చలనంపై ప్రభావం లేదని చెప్పవచ్చు. సంబంధ లేపాన్ని, అంటే ఒక చలనం, రెండో దాని విలువను నిరూపించడానికి సహయకారిగాలేనప్పుడు సహసంబంధ రాహిత్యము అంటారు. ఉదాహరణకు విద్యార్థులకు గణాంకశాస్త్రంలో వచ్చిన మార్కులకు, వారి బరువుకు సంబంధం లేదు. కాబట్టి వాటి సంబంధాన్ని వ్యాపనపటం ద్వారా చూపితే ఈ క్రింది విధంగా ఉంటుంది.



ధన సహసంబంధము

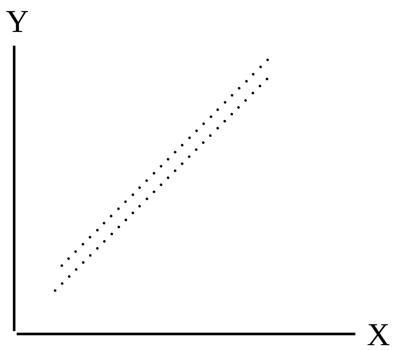


ఋణ సహసంబంధము

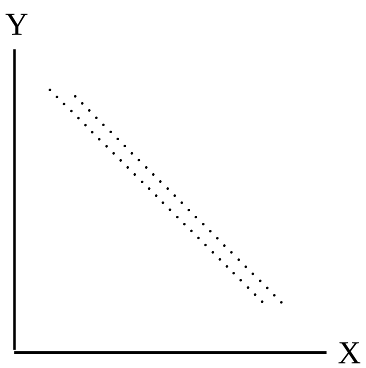


సహసంబంధ రాహిత్యము

పైన పటంలో బిందువులు చిందరవందరగా ఉండటంవల్ల వాటి పథాన్ని గుర్తించడం కష్టము. అందువల్ల ఇక్కడ రెండు చలనాల మధ్య సహసంబంధము లేదు అని చెప్పవచ్చు.



సంపూర్ణ ధన సహసంబంధము



సంపూర్ణ ఋణ సహసంబంధము

వ్యక్తిగత శ్రేణులు - సహసంబంధము: కార్ల్ పియర్సన్ సూత్రం ప్రకారం సహసంబంధ గుణకము కనుక్కోవడానికి, X - శ్రేణి అంకమధ్యమం నుంచి, అంశాలకు విచలనాలను తీసుకోవలె. తరవాతÇ Y- శ్రేణి అంకమధ్యమం నుంచి దాని అంశాలకు విచలనాలను తీసుకొని, రెండు శ్రేణుల విచలనాలను వ్యక్తిగతంగా వర్గం చేయవలె. అప్పుడు వర్గాలకు సంకలనం చేస్తే X - శ్రేణుల $\sum dx^2$ Y

- శ్రేణులకు $\sum dy^2$ వస్తుంది. X - శ్రేణిలోని విచలనాలచేత అనురూపంగా Y- శ్రేణిలో ఉన్న విచలనాలతో గుణించి లబ్ధాల సంకలనంచేస్తే $\sum dx\, dy$ వస్తుంది. ఇట్లా విలువలను తెలుసుకొన్న తరవాత సూత్రంలో ఉన్న సాంకేతికాలకు బదులు ఈ విలువలను ప్రతిక్షేపిస్తే కావలసిన విలువ (గుణకము) వస్తుంది.

10.3 సహసంబంధ గుణకము:

సహసంబంధ గుణకము శుద్ధసంఖ్య చలనాలవలె ఇది ఒక పరిమాణంలో చెప్పడం కుదరదు ఇది రెండు చలనాల మధ్యగల సంబంధ పరిమాణాన్ని కొలిచే శుద్ధ సంఖ్య అని మాత్రం గుర్తించవలె. రెండు చలనాల మధ్యగల సహసంబంధ పరిమాణాన్ని తెలుసుకొనే అనేక పద్ధతులలో కార్లె పియర్సన్ పద్ధతి ఒకటి రెండు శ్రేణుల యొక్క అంకమాధ్యమాలనుంచి క్రమంగా వాటి వివిధ &ంశాలకు విచలనాలను తీసి వాటి అనురూప లబ్ధాల సంకలనాన్ని, వాటి ప్రామాణిక విచలనాల లబ్ధాన్ని శ్రేణులలో గల జతల సంఖ్యతో గుణిస్తే వచ్చి మొత్తంతో (లబ్దము) భాగించినట్లయితే, రెండు చలనాల సహసంబంధ గుణకము వస్తుంది.

రెండు చలరాశుల మధ్య సహసంబంధం ఉన్నదీ ఆ సహసంబంధం ధనాత్మకమా లేదా ఋణాత్మకమా మొదలైన ఎన్నో వివరాలను తెలుసుకోవటానికి, పరిమాణాన్ని తెలుసుకోవటానికి ప్రొఫెసర్ కార్ల్ పియర్సన్ అనే శాస్త్రవేత్త కింది సరళరేఖీయ సహసంబంధతా గుణకాన్ని ప్రతిపాదించారు.

(X, Y) చలరాశుల 'n' జతల విలువలు $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ అయినప్పుడు వాటిమధ్య ఉన్న కార్ల్ పియర్సన్ సరళరేఖీయ సహసంబంధతా గుణకం r_{xy} సూత్రం

$$r_{xy} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_x . \sigma_y}$$

$$= \frac{N \sum f_{xy} - \left(\sum f_x x\right)\left(\sum f_y y\right)}{\sqrt{\left[N \sum f\, x^2 - (\sum f_x x)^2\right].\left[N \sum f y^2 - (\sum f_y y)^2\right]}}$$

r_{xy} **లక్షణాలు** :

(i) $r_{xy} = r_{yx}$

(ii) $-1 \le r_{xy} \le +1$

(iii) r_{xy} విలువ + 1.00 కు లేదా -1.00 కు ఎంత సమానమైతే అంత ఎక్కువ సహసంబంధత ఉందని అర్థం.

(iv) r_{xy} విలువ '0'కు ఎంత సమీపమైతే అంత తక్కువ సహసంబంధం ఉందని అర్థం.

(v) r_{xy} ధనాత్మకమైతే X, Y ల మధ్య ధనాత్మక సహసంబంధం ఉందని అర్థం.

(vi) r_{xy} ఋణాత్మకమైతే ల X,Y మధ్య ఋణాత్మక సహసంబంధం ఉందని అర్థం.

(vii) r_{xy} = ± 1.00 అయితే X,Y ల మధ్య సంపూర్ణ ధనాత్మక లేదా సంపూర్ణ రుణాత్మక సహసంబంధం ఉందని అర్థం.

(viii) r_{xy} = 0 అయితే X,Y ల మధ్య సరళరేఖీయ సహసంబంధం లేదని అర్థం.

శ్రేణీద్వయానికి ప్రత్యక్ష పద్ధతిలో సహసంబంధ గుణకం : ఉదా॥ 10. 1 : మార్కెట్‌లోని ఒక వస్తువు సప్లై సరఫరా డిమాండు అవసరాల వివరాలు 25 రోజుల విచారణ ద్వారా కింది విధంగా తెలిశాయి. ఈ దత్తాంశం ఆధారంగా సరఫరా, అవసరాల మధ్య ఉన్న కార్ల్ పియర్సన్ సరళరేఖీయ సహసంబంధం ఎంత పరిమాణంలో, ఏ స్వభావంతో ఉందో కనుక్కోండి. ఆ సహసంబంధం సార్థకమైందో కాదో పరిశీలించండి. సరఫరా, అవసరాల అంచనా క్రమదోషాలను గణించండి.

విచారణ రోజు :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
డిమాండు :	9	6	12	6	10	4	13	15	5	6
సప్లై :	11	13	7	10	5	15	10	15	6	3

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
5	9	11	13	10	7	5	7	12	7	5	6	9	10	8
10	6	5	8	7	16	14	14	9	13	17	14	10	10	12

సూత్రాలు - పద్ధతి :

x = డిమాండు (అవసరం)

y = సప్లై (సరఫరా)

n = విచారణ రోజుల సంఖ్య లేదా (x,y) జతల సంఖ్యలుగా సంకేతిస్తాం.

$\sum x^2, \sum y^2, \sum xy$ విలువల గణను దత్తాంశంలోని (x, y) విలువలు చిన్నవిగానే ఉన్నాయి. కాబట్టి ప్రత్యక్ష పద్ధతిలోనే గణనను సులభంగానే చేయవచ్చు.

ప్రత్యక్ష పద్ధతిలో కార్ల్‌పియర్సన్ స.స.గు. గుణించడానికి కింది సూత్రాన్ని ఉపయోగిస్తాం.

$$r_{xy} = \frac{n\sum xy - \left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{\sqrt{\left[n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2\right]\left[n\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2\right]}}$$

ఈ సూత్రం ప్రకారం, దత్తాంశం నుంచి $\sum x, \sum y, \sum xy, \sum x^2, \sum y^2$ విలువలను గణించి, వాటిద్వారా r_{xy} కనుక్కొంటాం.

r_{xy} ధనాత్మకమైతే, సరఫరా, అవసరాల మధ్య ధనాత్మక సహసంబంధం (సరఫరా పెరిగినప్పుడు అవసరం పెరగడం, లేదా సరఫరా తగ్గినప్పుడు అవసరం కూడా తగ్గడం సూచించే సహసంబంధం) ఉందని నిర్ణయిస్తాం. r_{xy} విలువ రుణాత్మకమైతే సరఫరా, అవసరాల మధ్య రుణాత్మక సహసంబంధం (సరఫరా పెరిగినప్పుడు అవసరం తగ్గడం లేదా సరఫరా తగ్గినప్పుడు అవసరం పెరగడాన్ని తెలియజేసే సహసంబంధం) ఉందని నిర్ణయిస్తాం.

x	y	xy	x^2	y^2
9	11	99	81	121
6	13	78	36	169
12	7	84	144	49
6	10	60	36	100
10	5	50	100	75
4	15	60	16	225
13	10	130	169	100
15	15	225	225	225
5	6	30	25	36
6	3	18	36	9
5	10	50	25	100
9	6	54	81	36
11	5	55	121	25
13	8	104	169	64
10	7	70	100	49
7	16	112	49	256
5	14	70	25	196
7	14	98	49	196
12	9	108	144	81
7	13	91	49	169
5	17	85	25	289
6	14	84	36	196
9	10	90	81	100
10	10	100	100	100
8	12	96	64	144
210	**360**	**2101**	**1986**	**3060**

$$r_{xy} = \frac{(25)(2101)-(210)(260)}{\sqrt{\left[(25)(1986)-(210)^2\right]\left[(25)(3060)-(260)^2\right]}}$$

$$= \frac{52525-54600}{\sqrt{[49650-44100]\,[76500-67600]}}$$

$$= \frac{-2075}{\sqrt{(5550)(8900)}} = -0.2952$$

r_{xy} రుణాత్మకం కాబట్టి, సరఫరా, అవసరాల మధ్య రుణాత్మక సహసంబంధం ఉందని నిర్ణయిస్తాం. అంటే, ఒక చలరాశి పెరిగితే (తగ్గితే) ఇంకో చలరాశి తగ్గుతోందని (పెరుగుతోందని) భావం.

ఉదా : 10. 2. కింది దత్తాంశం నుంచి, విద్యుత్ తీగ చుట్టల పొడవు, బరువుల మధ్య కల సహసంబంధ పరిమాణాన్ని గణించండి.

తీగచుట్ట :	1	2	3	4	5	6	7	8
తీగపొడవు : (యూనిట్లలో)	70	90	100	120	130	150	160	200
తీగబరువు : (యూనిట్లలో)	30	40	40	50	50	50	60	70
	9	10	11	12				
	190	200	220	230				
	70	80	80	80				

ఫలితాలు : x = బరువు, y = పొడవు, $\sum xy = 118600$

$$\sum x = 700,\ \sum y = 1860,\ \sum x^2 = 44200,\ \sum y^2 = 319800$$

$$\text{r} = \frac{121200}{\sqrt{(40400)(378000)}} = 0.9808$$

ఉదా : 10. 3 సహసంబంధ గుణకము ఈ క్రింది దత్తాంశానికి గణన చేయండి.

క్ర. సంఖ్య		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
A **లో వచ్చిన మార్కులు**	:	20	35	42	37	13	39	24
B **లో వచ్చిన మార్కులు**	:	32	37	50	30	25	24	40

క్ర. సంఖ్య	X	Y	x= X-37	y = Y-30	xy	x^2	y^2
1	20	32	-17	2	-34	289	4
2	35	37	-2	7	-14	4	49
3	42	50	+5	20	100	25	400
4	37	30	0	0	0	0	0
5	13	25	-24	-5	120	576	25
6	39	24	2	-6	-12	4	36
7	24	40	-13	10	-130	169	100
					30	1067	614

$$=\frac{\sum xy}{N\sqrt{\sum x^2}\ \sqrt{\sum y^2}} = \frac{30}{7\times\sqrt{1067}\ \sqrt{614}} = \frac{30}{7\times 32.665\times 24.779} = 0.005294$$

10.4 కోటి సహసంబంధము:

రెండు గుణాత్మక లక్షణాలను మధ్య సంబంధాన్ని సూచించే దానిని కోటి సహసంబంధం అంటారు.

వ్యాపార, పారిశ్రామిక రంగాలలో కొన్ని సందర్భాలలో, పరిశీలించదలచిన చలరాశిని పరిమాణాత్మకంగా కొలవడానికి వీలుగాక పోవచ్చు. అప్పుడు చలరాశికి ఖచ్చితమైన సంఖ్యాత్మక విలువ నివ్వడానికి వీలుకాదు. ఉదాహరణకు **4** రకాల సిగరెట్ల రుచిని సంఖ్యాత్మకంగా కొలవలేం. కానీ వాటి రుచిని బట్టి కోటీలు (Ranks) ఇవ్వవచ్చు. అంటే "చాలా బాగుంది, బాగుంది, ఫరవాలేదు, బాగాలేదు'' అని **4** రకాలుగా చెప్పవచ్చు.

ఇదేవిధంగా ఒక అధికారి తన కింది ఉద్యోగుల పనితనాన్ని బట్టి కోటిలు ఇవ్వగలడు. కానీ వారి పనితనాన్ని సంఖ్యారూపంలో చెప్పలేడు. నిజాయితీ, అందం, నడవడి, అభిరుచి, సంగీత ప్రావీణ్యత మొదలైన గుణాత్మక లక్షణాలను కూడా పరిమాణాత్మకంగా కొలవలేం. కానీ ఈ లక్షణాలు ఉన్న అంశాలను వాటి ప్రాముఖ్యతను బట్టి వరుసక్రమంలో అమర్చవచ్చు.

ఈ పరిస్థితులలో కార్ల్‌పియర్సన్ సహసంబంధ గుణకాన్ని గణించలేం. ఇటువంటి సందర్భాలకు స్పియర్మన్ అనే బ్రిటిష్ మనస్తత్వ శాస్త్రవేత్త **1904**లో ఒక సూత్రాన్ని రూపొందించాడు. ఇందులో చలరాశుల విలువలకు గాక, వాటి కోటిలకు సహసంబంధ గుణకాన్ని గణిస్తారు.

$$\rho = 1-\frac{6\sum d^2}{n\left(n^2-1\right)} = d = R_x - R_y$$

సహబద్ధకోటిలు (Tied Ranks) లేదా పునరావృత్త కోటిలు (Repeated Ranks): గుణ సాంఖ్యక వర్గీకరణలో ఒక గుణానికి చెందిన ఇద్దరు లేదా అంతకంటె ఎక్కువ మంది ఒకే ప్రతిభ కలిగి ఉండవచ్చు. అంటే ఒకే రకమైన పనితనాన్ని ఇద్దరు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ మంది చూపవచ్చు. అప్పుడు వ్యక్తుల ప్రతిభ (కోటి) లో సహబద్ధత (పునరావృత్తి) ఏర్పడుతుంది. ఇదే పరిస్థితి పరిమాణాత్మక దత్తాంశంలో కూడా ఏర్పడవచ్చు. అంటే రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ అంశాలు ఒకే విలువను కలిగి ఉన్న సందర్భాలలో సహబద్ధ కోటిల సమస్య వస్తుంది. ఈ సహబద్ధత లేదా పునరావృత్తి పరిశీలనలో ఉన్న రెండు గుణాలలోనూ ఉండవచ్చు.

రెండు గుణాలలో లేదా చలరాశులలో కోటిల పునరావృత్తి ఒకే సంఖ్యలో ఉండకపోవచ్చు. అప్పుడు స్పియర్మన్ కోటి సహసంబంధ గుణక సూత్రం నిష్ప్రయోజనమవుతుంది. ఎందుకంటే రెండు గుణాల (చలరాశుల) కోటీలు 1 నుండి n వరకు ఉండవు. తత్ఫలితంగా వాటి అంకమధ్యమాలు సమానంగా ఉండవు. అదేవిధంగా విస్తృతులు సమానంగా ఉండవు. స్పియర్మన్ సహసంబంధ గుణకాన్ని వ్యుత్పన్నం చేయడంలో $\overline{X}=\overline{Y}$ అనీ $\sigma_{X^2}=\sigma_{Y^2}$ అనీ ఉపకల్పనలు చేశాం. అందుకు $1-\dfrac{6\sum_i d_i^2}{n(n^2-1)}$ సూత్రాన్ని యథాతథంగా వాడకూడదు. దీనిని కొంత సర్దుబాటుతో ఉపయోగించాలి.

ఈ సర్దుబాటు కిందివిధంగా చేస్తాం. ఒకే ప్రతిభ ఉన్న అంశాలకు వరుసగా పక్క పక్కనున్న కోటీలను ఇచ్చి, ఆ కోటిల సగటును వాస్తవానికి ఆయా అంశాల ఎదుట నమోదు చేస్తారు. ప్రతిభలో తరువాత అంశానికి వరుస క్రమంలోని తరువాత కోటిని కేటాయిస్తారు. ఉదాహరణకు **3**వ కోటి ఉన్న అంశం రెండు సార్లు పునరావృతమై మొదట వచ్చిన అంశానికి **3**వ కోటి, తరువాత అంశానికి **4**వ కోటి కేటాయిస్తారు. రెండు కోటిల సగటు $\dfrac{3+4}{3}=3.5$ ను రెండు అంశాలకు ఉమ్మడి కోటి (Common rank) గా నమోదు చేస్తారు. **7**వ కోటి మూడుసార్లు పునరావృతమై ఉంటే వరుసగా **7,8,9** కోటిల సగటు $\left(\dfrac{7+8+9}{3}=8\right)$ ను మూడు అంశాలను ఇస్తారు. తరువాత అంశానికి **10**వ కోటిని కేటాయిస్తారు. దీనివల్ల అంశాల సంఖ్యకు వ్యత్యాసముండదు. కాబట్టి స్పియర్మన్ సూత్రాన్ని ఉపయోగించి కోటిసహసంబంధ గుణకాన్ని కనుక్కొంటారు.

పునరావృత్తుల సంఖ్య తక్కువగా ఉంటే పైన తెలిపినట్లు ఉమ్మడి కోటీలను కేటాయించి మామూలు పద్ధతిలోనే కోటి సహసంబంధ గుణకాన్ని గుణించవచ్చు. కానీ సహబద్ధ (పునరావృత్త) కోటిల సంఖ్య ఎక్కువగా ఉన్నప్పుడు స్పియర్మన్ సూత్రంలోని $\sum_i d_i^2$ కు $\dfrac{k(k^2-1)}{12}$ విలువనుకలపాలి. ఇక్కడ, k ఒక అంశం ఎన్నిసార్లు పునరావృత్తమైందో ఆ సంఖ్య ప్రతి సహబద్ధ అంశానికి ఈ సవరణాంకాన్ని జోడించాలి.

అప్పుడు $\rho=1-\dfrac{6\left[\sum_i d_i^2+\dfrac{k(k^2-1)}{12}\right]}{n(n^2-1)}$ అవుతుంది.

ఉదా : 10. 4 : క్రింది దత్తాంశానికి కోటి సహసంబంధ గుణకాన్ని కనుక్కోండి.

X:	58	64	65	55	44	80	65	75	40	55	64	55
Y:	52	48	45	62	45	68	62	82	44	45	74	62

సాధన : X, Y ల కోటిలను X, Y తో గుర్తిద్దాం.

X	Y	Rx	Ry	d = Rx - Ry	d^2
58	52	7	7	0	0
64	48	5 5.55	8	-2.5	6.25
65	45	4 3.5	9 10	-6.5	42.25
55	62	8 9	4 5	4	16.0
44	45	11	10 10	1	1.00
80	68	1	3	-2	4.00
65	62	3 3.5	5 5	-1.5	2.25
75	82	2	1	1	1.00
40	44	12	12	0	0
55	45	9 9	10 10	-1	1.00
64	74	6 5.5	2	3.5	12.25
55	62	10 9	6 5	4	16.00
			మొత్తం	0	102.00

ఇక్కడ n = 12

X చలరాశిలో 65 విలువ 2 సార్లు 64 విలువ 2 సార్లు 55 విలువ 3 సార్లు పునరావృతం అయ్యాయి.

$\therefore \sum_i d_i^2$ కు $\frac{k(k^2-1)}{12}$ ను 3 సార్లు జోడించాలి.

అంటే $k_1 = 2, k_2 = 2, k_3 = 3$, X చలరాశికి సవరణాంకం $= \frac{2(2^2-1)}{12} + \frac{2(2^2-1)}{12} + \frac{3(3^2-1)}{12}$

$$= \frac{6}{12} + \frac{6}{12} + \frac{24}{12} = 3.$$

ఇదేవిధంగా Y చలరాశిలో 45 విలువ 3 సార్లు, 62 విలువ 3 సార్లు పునరావృతం అయ్యాయి. కాబట్టి Y చలరాశికి రెండుసార్లు సవరణాంకాన్ని జతపరచాలి.

i.e., $k_1 = 3, k_2 = 3.$

సవరణాంకం $\frac{3(3^2-1)}{12}+\frac{3(3^2-1)}{12}=2+2=4$

ఇవ్వుడు కోటి సహసంబంధం గుణం

$$\rho=1-\frac{6\left[\sum_j d_i^2+3+4\right]}{n(n^2-1)}$$

$$=\frac{6[102+3+4]}{12(12-1)}=1-\frac{6\times 109}{12\times 143}=1-0.3811$$

$$=0.6189\cong 0.62$$

$\therefore$ చలరాశులలో సహబద్ధకోటిలు ఉన్నప్పుడు కోటి సహసంబంధ గుణకం = 0.62.

ఉదా ॥ 10. 5 : ఒక కార్యాలయంలో సహాయకుడి ఖాళీని నింపడానికి నిర్వహించిన పరీక్షకు 11 మంది అభ్యర్థులు హాజరయ్యారు. వారికి ఇంగ్లీషు, అంకగణితంలో జరిపిన పరీక్షలో లభించిన మార్కులు కింది విధంగా ఉన్నాయి. ఈ వివరాలకు కోటి సహసంబంధ గుణకాన్ని కనుక్కోండి.

అభ్యర్థి సంఖ్య	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ఇంగ్లీషు 60		25	36	20	36	48	52	25	65	35	45
అంకగణితం	35	42	30	42	56	68	45	50	42	55	68

సాధన : ఇంగ్లీషు, అంకగణితం మార్కుల కోటిలను వరుసగా తో సూచిద్దాం.

సంఖ్య 11			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X		9.5	6.5	.	6.5			9.5				
మొత్తము		9	6	11	7	4	3	10	1	8	5	2
		8		8		1.5			8		1.5	1
Y	10	7	11	8	3	2	6	5	9	4		
d= X-Y	-0.5	-1.5	0	-1.5	1	1.5	3.5	-4	0	1	0.5	0
d^2	0.25	2.25	0	2.25	1	2.25	12.25	16	0	1	0.25	37.5

ఇక్కడ n = 1

కోటి సహసంబంధ గుణకం $\rho = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6 \times 37.5}{11 \times 20} = 1 - \frac{225}{1320} = 0.8295$

10.5 సూక్ష్మ, పాక్షిక సహసంబంధ గుణకములు :

త్రిచలరాశి ప్రతిగమన నమూనాలోని మూడు చలరాశుల మధ్య మూడు సూక్ష్మసహసంబంధ గుణకాలను కనుగొనగలము. అవి : R^2 అనగా Y, X_2 ల మధ్య సహసంబంధ గుణకం. r_{13} అనగా Y, X_3 ల మధ్య సహసంబంధ గుణకం. r_{23} అనగా X_2, X_3 ల మధ్య సహసంబంధ గుణకం. వీటిని స్థూల లేదా శూన్య ఆర్డరు సహసంబంధ గుణకాలంటాము. ఈ గుణకాలకు ఒక పరిమితి ఉంది. X_3 రాశి X_2, Y రాశుల రెండింటితోను సంబంధం కలిగి ఉందనుకుందాము. ఇప్పుడు r_{12} విలువ Y, X_2 ల మధ్యగల సహసంబంధాల యొక్క దృడత్వాన్ని తెలుపదు. అందుచేత Y, X_2 లపై X_3 ప్రభావం లేకుండా ఉండే సహసంబంధ గుణకాన్ని కనుగొనాలి. పాక్షిక సహసంబంధ గుణకం దానికి ఉపయోగపడుతుంది. భావనాపరంగా ఇది పాక్షిక ప్రతిగమన గుణకం మాదిరిగానే ఉంటుంది. వీటిని క్రిందివిధంగా నిర్వచిస్తాము.

$r_{12.3} = X_3$ ని స్థిరంగా ఉంచినప్పుడు Y, X_2 ల మధ్య పాక్షిక సహసంబంధ గుణకం.

$r_{13.2} = X_2$ ని స్థిరంగా ఉంచినప్పుడు Y, X_3 ల మధ్య పాక్షిక సహసంబంధ గుణకం.

$Y_{23.1} = Y$ ని స్థిరంగా ఉంచినప్పుడు X_2, X_3 ల మధ్య పాక్షిక సహసంబంధ గుణకం.

వీటిని సూక్ష్మ లేదా శూన్య ఆర్డరు సహసంబంధ గుణకాల నుండి పొందగలము.

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{\sqrt{\left(1 - r_{13}^2\right)\left(1 - r_{23}^2\right)}}$$

$$r_{13.2} = \frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{\sqrt{\left(1 - r_{12}^2\right)\left(1 - r_{23}^2\right)}}, \quad r_{23.1} = \frac{r_{23} - r_{12}r_{13}}{\sqrt{\left(1 - r_{12}^2\right)\left(1 - r_{13}^2\right)}}$$

పై పాక్షిక సహసంబంధ గుణకాలను మొదటి ఆర్డరు గుణకాలంటాము. అనగా రెండవ పాదుకలో ఒక సంఖ్య మాత్రమే ఉంది. ఎందుకంటే ఒక చలరాశి ప్రభావాన్ని మాత్రమే తొలగించి సహసంబంధ గుణకాన్ని కనుగొంటాము. ఇదేవిధంగా రెండవ ఆర్డరు పాక్షిక సహసంబంధ గుణకాలను నిర్వచించగలము. $r_{12.34}$ ని Y, X_2 లపై X_3, X_4 ల ప్రభావాన్ని తొలగించిన తర్వాత కనుగొన్న సహసంబంధ గుణకంగా తెలుసుకోవాలి. పాక్షిక సహసంబంధ గుణకాన్ని పరిశీలించి కొన్ని ముఖ్య విషయాలను తెలుసుకోగలము.

1. r_{12} శూన్యమైనా $r_{12.3}$ శూన్యం కానవసరం లేదు.

2. $r_{12.3}^2$ విలువ r_{12}^2 విలువ వలెనే (0,1) అంతరంలో ఉంటుంది. దీనినిబట్టి సూక్ష్మసహసంబంధ గుణకాల

మధ్య క్రింది సంబంధాన్ని పొందుతాము.

$$0 \le r_{23}^2 \le 1$$

$$0 \le r_{12}^2 + r_{13}^2 \;\; r_{23}^2 - 2r_{12} \;\; r_{13} \;\; r_{23} \le \left(1 - r_{13}^2\right)\left(1 - r_{23}^2\right)$$

$$0 \le r_{12}^2 + \; r_{13}^2 \;\; r_{23}^2 - 2r_{12} \;\; r_{13} \;\; r_{23} \le 1$$

ఈ సంబంధం వల్ల r_{12}, r_{13}, r_{23} విలువలు సాధ్యమోకాదో చెప్పగలం.

ఉదాహరణకు $r_{12} = 0.8; \;\; r_{23} = 0.9; \;\; r_{13} = -0.2$ సాధ్యమా?

$$r_{12}^2 + r_{13}^2 + r_{23}^2 - 2r_{12} \;\; r_{13} \;\; r_{23} = 0.64 + 0.81 + 0.04 - 2 \times 0.8 \times 0.9 \times (-0.2)$$

$$= 1.49 + 0.288 = 1.778 > 1$$

పైన ఇవ్వబడిన విలువలు సాధ్యం కాదు. అలాగే ఇంకొక ఉదాహరణ చెప్పాలంటే

$$r_{12} = 0.01; r_{13} = 0.66; r_{23} = -0.7$$

$$r_{12}^2 + r_{13}^2 + r_{23}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}$$

$$= 0.0001 + 0.4356 + 0.49 - 2 \times 0.01 \times 0.66(-0.7)$$

$$= 0.93494 < 1$$

కావున ఈ విలువలు సాధ్యము.

10.6 సారాంశము :

ఈ పాఠంలో సహసంబంధము లేదా ద్విచలరాశుల మధ్య గల సంబంధముల గురించి తెలుసుకొన్నాము. ఇచ్చిన రెండు చలరాశుల మధ్య గల సంబంధము ఎంతవరకు ఉన్నది తెలియచేసే సహసంబంధగుణకము గణన చేయు విధానము తెలుసుకొన్నారు. కార్ల్ పియర్సన్ సహసంబంధ గుణకము వాటి అవధులు, దిశలను కూడా నిర్ణయించు విలువలను గురించి తెలునుకొన్నారు. స్పియర్‌మెన్ కోటి నహసంబంధ గుణకము రెండు రాశుల కోటీల మధ్య గల సంబంధాన్ని తెలియజేయును. అంతేకాకుండా ఈ పాఠ్యాంశములో రెండు అంతకంటే ఎక్కువగల చలరాశుల మధ్య గల సంబంధాలను తెలునుకొనటానికి బహునహసంబంధ గుణకము, నూక్ష్మ నహసంబంధ గుణకము మరియు పాక్షిక నహసంబంధగుణకములను గణించుట కూడా తెలునుకొన్నాము.

10.7 గుర్తుంచుకోవలసిన విషయాలు :

కార్లపియర్సన్ సహసంబంధ గుణకము ఎప్పుడు -1 నుండి 1 మధ్యలోనే ఉండవలెను. r_{xy} విలువ +1.00కు లేదా -1.00కు ఎంత సమానమైతే అంత ఎక్కువ సహసంబంధత ఉందని అర్థం.

స్పియర్‌మెన్ కోటి సహసంబంధ గుణకము ρ విలువ 1.00కి ఎంత దగ్గరగా వుంటే x, yల మధ్య అంత

ఎక్కువ సహసంబంధం ఉందని అర్థం. ρ విలువ '0'కు ఎంత సమీపంగా ఉంటే x,y ల మధ్య అంత తక్కువ సహసంబంధం ఉందని భావిస్తాం.

10.8 స్వయం సమాధాన ప్రశ్నలు

1. 15 మంది విద్యార్థుల ఎత్తు బరువుల వివరాలు కింద యిచ్చాం. ఈ వివరాల ఆధారంగా ఎత్తు బరువుల మధ్య సహసంబంధతా పరిమాణాన్ని గణించండి.

ఎత్తు (సెం.మీ.)	155	159	162	169	142	160	148	167	153	163	150	166	154	145	151
బరువు (కిలోలు)	59	60	67	73	51	68	59	78	60	64	52	69	60	56	64

2. సహసంబంధ గుణకము ఈ క్రింది దత్తాంశానికి గణన చేయండి

ఆకు బరువు (గ్రాములలో)	4.1	4.9	3.7	3	4.5	4.2	4.3	4.8	3.9	3.7	4.1	5	4.8	4.9	5.1
ఆకు వైశాల్యం(చ.మి.మి)	50.9	49.1	47.2	46.1	51.2	51.2	51.9	52	46.2	45.6	50	55.2	49.8	49.9	51.2

3. క్రింది దత్తాంశానికి కోటి సహసంబంధ గుణకాన్ని కనుక్కోండి.

x : 73 91 50 62 77 82 99 100 38 44 76 92 68 56 49 37 57 58
83 79 66 40 33 75 41 96

y : 61 83 71 78 90 100 66 81 57 60 70 92 77 62 58 63 47 64
79 88 65 50 48 87 51 89

4. కోటి సహసంబంధ గుణకము ఈ క్రింది దత్తాంశానికి గణన చేయండి.

A : 61 50 32 77 92 61 33 81 50 95 80 100 56 44 49 82 50 79
53 80 88 50 96 80 47

B : 39 72 61 81 83 63 42 38 77 61 54 63 55 72 40 38 70 60
56 84 100 95 63 57 60

10.9సంప్రదించుకోవలసిన పుస్తకాలు :

1. Fundamentals of Mathematical Statistics; S.C. Gupta & V.K. Kapoor, Publisher : S. Chand & Co.

2. Basic Statistics by B.L. Agarwal, Third Edition, New Age International (p) Limited.

పాఠం : 11

ప్రతిగమనం
(Regression)

విషయక్రమం :

ఈ పాఠ్యాంశంలో మనం

కనిష్ట వర్గాల పద్ధతి ద్వారా సమీకరణాలను సాధించుట

ప్రతిగమనము, సాంఖ్యాక శాస్త్రంలో దాని ప్రాధాన్యత

ప్రతిగమనము, సహసంబంధముల మధ్య గల సంబంధము

బహుళ ప్రతిగమనము

బహుళ నిర్ధారక గుణకము

సూక్ష్మ, పాక్షిక సహసంబంధ గుణకములు, బహుళ నిర్ధారక గుణకముల మధ్య గల సంబంధము

పాక్షిక ప్రతిగమనము

వివిధ పద్ధతుల ద్వారా పై వాటిని గణించుట గురించి తెలుసుకొనగలము.

11.1 ఉపోద్ఘాతం :

పరిశీలనలోని ఏవైనా రెండు చలరాశుల మధ్య ఉన్న సాధారణ సంబంధాన్ని సహసంబంధం అంటారు. అంటే ఒక చలరాశిలో ని మార్పు వేరొక చలరాశిలోని మార్పుపై ఆధారపడి ఉంటూ ఆ రెండు చలరాశుల మధ్య సహసంబంధత ఉందంటారు. ఉదాహరణకు ఎత్తు, బరువు రెండూ పరస్పర ఆధార చలరాశులు. ఎత్తు అధికం అయితే బరువు కూడా అధికం అవుతుంది. వర్షపాతము, పంట దిగుబడి రెంగూ పరస్పరాధార చలరాశులు. ఇదేవిధంగా ఆదాయం, ఖర్చు (వ్యయం) సరఫరా, గిరాకీ, కార్మికుని శ్రమ, ఉత్పాదకం మొదలైనవి పరస్పర ఆధార చలరాశులు. ఈ పరస్పర ఆధార చలరాశులు కలిసి కొంత అనుపాతంలో మార్పు చెందితే వాటి మధ్య ఉన్న సహసం బంధాన్ని సరళరేఖీయ సంబంధం (linear correlation) అని అంటారు.

11.2 కనిష్ట వర్గాల పద్ధతి :

ఒక విషయానికి సంబంధించి రెండు లక్షణాల దృష్ట్యా (xi, yi), i = 1,2, ... n అనే 'n' విలువల జంటల దత్తాంశాన్ని తీసుకుందాము. ఇక్కడ x ను స్వతంత్ర చలరాశి (Independent Variable) గానూ, y ను ఆధార చలరాశి (Dependent Variable) గానూ అనుకుందాము. అప్పుడు X, Y ల మధ్య సంబంధీతా ప్రమేయాన్ని (Functional Relationship) ఒక ప్రమేయం రూపం లో కనుక్కోవడంవక్ర సంధానంలో సమస్య. సిద్ధాంత రీత్యా X, Y ల మధ్య సహ సంబంధం (Correlation) ప్రతిగమనం (Regression) లను గురించి చదివేటప్పుడు వక్రసంధాన పద్ధతుల ఆవశ్యకత ఎంతైనా ఉంది. అంతే కాక కొన్ని స్వతంత్ర చలరాశి విలువలకు సరిపడు ఆధార చలరాశి విలువలను అంచనా వేయడానికి కూడా పద్ధతి ఉపయోగపడుతుంది.

x,y లకు సంబంధించి (xi, yi), i = 1,2, ... n అనే n జంట విలువలున్నాయనుకొందాం. x,y ల మధ్య ప్రమేయ సంబంధం p ఘాతం గల బహుపది (polynomial) అనుకుందాం.

అంటే $$y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_px^p \qquad ...(11.1)$$

ఘాతము స్థాయి నిర్ధారించిన తరువాత ఇచ్చిన n జంట విలువలకు $a_0, a_1, a_2, a_2, \ldots\ldots a_p$ అను తెలియని స్థిర సంఖ్యలను నిర్ధారించడం ద్వారా దత్తాంశానికి ' వీలైనంత చక్కని సంధానం ' (best possible fit) చేయడం ముఖ్య సమస్య అవుతుంది.

అన్ని పద్ధతులలోను మిక్కిలి ప్రాముఖ్యం సంతరించుకొని, తరచు వాడుకలో ఉన్న సాంఖ్యాత్మక పద్ధతే కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతి (Method of least squares).

దత్తాంశంలో ఇచ్చిన x విలువలను ప్రతిక్షేపిస్తే వచ్చే f(x) విలువలను y ఆశంశిత (expected value) లు అంటారు. అప్పుడు $\left[y - f(x)\right]$ ను అవశిష్ఠం(residue) అంటారు. ఈ అవశిష్ఠాలను వర్గాల అంచనా మొత్తం (E తో సంకేతిస్తే)

$$E = \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - f(x_i) \right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_p x^p\right)\right]^2 \qquad \ldots (11.2)$$

అవుతుంది.

E విలువ 'సున్న' అయితే ప్రతి అవశిష్ఠం విలువ సున్నకు సమానమౌతుంది. అప్పుడు ఈ దత్తాంశం ఖచ్చితంగా ఈ సమీకరణానికి ప్రాతినిధ్యం వహిస్తుంది. ఈ సందర్భంతో తప్ప ఇతరత్రా E విలువ ధనాత్మకం అవుతుంది.(11.2) నుంచి విలువలు దూరమైన కొద్ది E విలువ ఎక్కువవుతోంది.ఈ దృష్ట్యా E విలువ కనిష్ఠమైనప్పుడు దత్తాంశానికి ఈ (11.1) ప్రమేయ సంబంధం ఉత్తమైన లేదా చక్కని సంధానం (best fit) అవుతుంది. దత్తాంశ విలువల అవశిష్ట వర్గాల మొత్తం కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతి (Method of least squares) అంటారు.

(11.2)లోని $a_0, a_1, a_2, \ldots a_p$ లకు ఏ విలువలు ఇస్తే E కనిష్ఠ మౌతుందో ఆ విలువలు $a_0, a_1, a_2, \ldots a_p$ అంచనా లువలు అవుతాయి. వాటిని వరసగా $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots. \hat{a}_p$ లతో సంకేతిద్ధాం.వీటిని సాధించటానికి E ని $a_0, a_1, a_2, \ldots a_p$ అనే(p+1) చలరాశుల ప్రమేయంగా పరిగణించి వీటి దృష్ట్యా పాక్షికవ్యుత్పన్న గుణకాల (Partial differentiational coefficients) ను కనుగొని సున్నకు సమానం చేసి సూక్ష్మీకరిస్తే (p+1) సమీకరణాలు వస్తాయి. అవి

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} aj = \hat{a}_{-j} = o; j = 0,1,2,\ldots., p.$$

ఈ (p+1) సమీకరణాలను (x_i, y_i)లో సాధిస్తే $a_0, a_1, a_2, \ldots a_p$ల అంచనాలను, అంటే $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots. \hat{a}_p$ లను రాబట్టవచ్చు. అప్పుడు x,y లకు సంబంధించిన n జంట విలువల దత్తాంశానికి కనిష్ట వర్గాల పద్ధతినుపయోగించి సంధానించిన వక్రరేఖ.

$$y = f(x) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x + \hat{a}_2 x^2 + \hat{a}_3 x^3 + \ldots\ldots + \hat{a}_p x^p \quad \ldots (11.3)$$ అవుతుంది.

ఇచ్చిన దత్తాంశంలోని $x_{1,} x_{2,....} x_n$ విలువలనుపై సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించి సూక్ష్మీకరిస్తే అంచనా విలువలు (estimated values) $y_0, y_1, y_{2,....} y_n$ లు వస్తాయి.

ఉదాహరణ 11.1 : కింది దత్తాంశానికి సరళరేఖను సంధానించండి.

x	1	3	4	6	8	9	11	14
y	1	2	4	4	5	7	8	9

సాధన : దత్తాంశానికి సంధానించిన సరళరేఖ y=ax+b అనుకుందాం. కనిష్ఠ వర్గాల సూత్రం ఉపయోగించి దత్తాంశానికి కింద సామాన్య సమీకరణాలను సాధిస్తే a,b ల అంచనాలు వస్తాయి. అవి :

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} + b\sum_{i=1}^{n} x_i ; n = 8$$

ఇప్పుడు $\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} y_i$,....... వగైరాల గణనకు కింది పట్టిక ఉపయోగిస్తే సులువుగా ఉంటుంది.

	xi	yi	xi2	xiyi
	1	1	1	1
	3	2	9	6
	4	4	16	16
	6	4	36	24
	6	4	36	24
	8	5	64	40
	9	7	81	63
	11	8	121	88
	14	9	196	126
మొత్తం	56	40	524	364

పై సామాన్య సమీకరణాలలో గణించిన విలువలనను ప్రతిక్షేపిస్తే

$$40 = 56a + 8b$$

$$364 = 524\,a + 56\,b.$$

వీటిని సాధిస్తే a=0.6364 b= 0.5452 అని వస్తాయి. కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతినుపయోగించి ఇచ్చిన దత్తాంశానికి సంధానించిన సరళరేఖ.y=.6364x + 0.5452 అవుతుంది.

11.3 ప్రతిగమనం :

ఉదా॥ 11.2 : క్రింది దత్తాంశం 12 మంది వయస్సు వారి రక్తపోటు తెలుపుతుంది. దీని నుంచి ని మీద y ప్రతిగమన రేఖ ని మీద y ప్రతిగమన రేఖను కనుక్కోండి. వయస్సు 65 సంవత్సరాలు అయినప్పుడు రక్తపోటును అంచనా వేయండి.

వయస్సు x సంవత్సరాలలో	56	42	72	36	63	47	55	49	38	42	62	60
రక్తపోటు (y)	147	125	165	118	149	128	150	145	115	132	152	160

సాధన : మొదటి చలరాశుల అంకమధ్యమాలు, క్రమవిచలనాలు చలరాశుల మధ్య సహసంబంధ గుణకం గణిస్తాం.

x	y	x2	y2	xy
56	147	3,136	21,609	8,232
42	125	1,764	15,625	5,250
72	165	5,184	27,225	11880
36	118	1,296	13,924	4,248
63	149	3,969	22,201	9,387
47	128	2,209	16,384	6,016
55	150	3,025	22,500	8,250
49	145	2,401	21,025	7,105
38	115	1,444	13,225	4,370
42	132	1,764	17,424	5,544
62	152	3,844	23,104	9,424
60	160	3,600	22,500	9,000
622	1,676	33,636	2,36,746	88,706

అంకమధ్యమలు :

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{622}{12} = 51.8333$$

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1622}{12} = 139.6667$$

క్రమవిచలనాలు :

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum x_i^2 - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{33636}{12} - \frac{(622)^2}{(12)^2}} = \sqrt{19728833 - 19506775} = 10.7845$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum y_i^2 - \bar{y}^2} = \sqrt{\frac{236746}{12} - \frac{(1676)^2}{(12)^2}} = \sqrt{19728.833 - 19506.775} = 14.9016$$

x, y ల మధ్య సహసంబంధ గుణకం

$$\frac{\frac{88,706}{12} - 51.8333 * 139.6667}{10.7845 * 14.9016} = \frac{152.7807}{160.7063} = 0.9507$$

ప్రతిగమన రేఖలు : x మీద y ప్రతిగమన రేఖ

$$y - \bar{y} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(x - \bar{x})$$

$$\text{i.e}(y - 139.6667) = 0.9507\left(\frac{14.9016}{10.7845}\right)(x - 51.8333)$$

$$\Rightarrow (y - 139.6667) = 1.3136 * 68.0903$$

$$\Rightarrow y = 1.3136 * 71.5764$$

Y మీద x ప్రతిగమన రేఖ

$$X - \bar{X} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y - \bar{Y})$$

$$\text{i.e}(X - 51.8333) = 0.9507\left(\frac{10.7845}{14.9016}\right)(Y - 51.8333) = 0.68804 - 96.0907$$

వయస్సు (x) **65** సంవత్సరాలు అయినప్పుడు రక్తపోటు (y) అంచనా వేయటానికి, x=65 ప్రతిమన రేఖలో x=**65** రాసి సూక్ష్మీకరించాలి.

$\therefore$ రక్తపోటు అంచనా

$$\hat{y} = 1.3136x71.5764$$
$$= 156.9604 \cong 157$$

ఉదాహరణ 11.3: గుంటూరు, గూడూరు వినియోగ వస్తువుల ధరలకు సంబంధించిన వివరాలు కింది విధంగా ఉన్నాయి. గూడూరు ధర 195 రూ అయినప్పుడు గుంటూరు అత్యధిక సంభవనీయ ధరను కనుక్కోండి?

	గూడూరు	**గుంటూరు**
సగటు ధర	165	158
క్రమవిచలనం	22.5	13.5

రెండు పట్టణాలలోను వినియోగ వస్తువుల ధరల మధ్య సహసంబంధ గుణకం 0.81. గుంటూరులో అత్యధిక సంభవనీయ ధర అంచనా వేయడానికి చిత్తూరుకు సంచింధించిన ప్రతిగమన రేఖ కావాలి. ధరలు గూడూరులో x, గుంటూరులో y అనుకుంటే y ప్రతిగమన రేఖ

$$y - \overline{y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x})$$

$$\text{i.e } y - 158 = 0.81x\frac{13.5}{22.5}(x - 165)$$

$$= 0.486(x - 165) = 0.486x - 80.19 \;\Rightarrow y = 0.486x + 77.81$$

గూడూరు ధర x =195 అయితే గుంటూరులో అత్యధిక సంభవనీయ ధర

y = 0.486 x 195+77.81 = రూ 172.58

శ్రేణీద్వయానికి ప్రత్యక్ష పద్ధతిలో ప్రతిగమనం:

ఉదా॥ 11. 4 : కింది పట్టికలో ఒక వస్తువు డిమాండును (అవసరాన్ని) జనాభా మార్పుకు సంబంధించి ఇచ్చారు. జనాభా 15 యూనిట్లయితే డిమాండు ఎన్ని యూనిట్లో అంచనా చేయండి. డిమాండు 7.5 యూనిట్లయితే జనాభా ఎంత ఉంటుందో అంచనా చేయండి.

సంవత్సరం	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970
డిమాండు (యూనిట్లలో)	2	3	4	3	5	7	6	8	10	9
జనాభా (యూనిట్లలో)	1	1	2	3	3	4	3	5	6	7
సంవత్సరం	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980
డిమాండు (యూనిట్లలో)	8	9	11	8	7	10	11	9	11	10
జనాభా (యూనిట్లలో)	7	8	10	8	8	9	10	9	11	12

సూత్రాలు పద్ధతి :

x = డిమాండు y = జనాభా

n = [x,y] ల విలువల జతల సంఖ్యలుగా సంకేతిస్తాం. x, y విలువలు చిన్నవిగానే ఉన్నాయి. కాబట్టి ప్రత్యక్షపద్ధతిలోనే గణనచేస్తాం. దత్తాంశం నుంచి $\sum x, \sum y, \sum xy, \sum x^2, \sum y^2$ విలువలను గణిస్తాం.

$$\overline{x} = \frac{\sum x}{n}; \quad \overline{y} = \frac{\sum y}{n} \qquad (1)$$

$$b_{yx} = \frac{n\sum xy - \left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{n\sum x^2 - \left(\sum (x)^2\right)} \qquad (2)$$

$$b_{xy} = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n\sum y^2 - \left(\sum (y)^2\right)} \qquad (3)$$

x మీద y ప్రగ.స.రేఖ } $y - \overline{Y} = b_{xy}[x - \overline{x}]$ (4)

y మీద x ప్రగ.స.రేఖ } $x - \overline{x} = b_{xy}[y - \overline{y}]$ (5)

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left[\frac{\sum x}{n}\right]^2}; \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - \left[\frac{\sum y}{n}\right]^2} \qquad (6)$$

$$r = \sqrt{b_{YX}.b_{XY}} \qquad (7)$$

y విలువను అంచనావేయటానికి **(4)** ను x విలువలను అంచనా వేయటానికి **(5)** ను ఉపయోగించాలి.

గణన : పట్టిక

x	y	xy	x^2	y^2
2	1	2	4	1
3	1	3	9	1
4	2	8	16	4
3	3	9	9	9
5	3	15	25	9
7	4	28	49	16
6	3	18	36	9
8	5	40	64	25
10	6	60	100	36
9	7	63	81	49
8	7	56	64	49
9	8	72	81	64
11	10	110	121	100
8	8	64	64	64
7	8	56	49	64
10	9	90	100	81
11	10	110	121	100
9	9	81	81	81
11	11	121	121	121
10	12	120	100	144
151	127	1126	1295	1027
$\sum x$	$\sum y$	$\sum xy$	$\sum x^2$	$\sum y^2$

పట్టిక నుంచి $n = 20, \sum x = 151, \sum y = 127, \sum xy = 1126, \sum x^2 = 1295, \sum y^2 = 1027$

లను గ్రహించి సూత్రాలను (1) నుంచి (7) వరకు కిందివిధంగా ప్రయోగిస్తాం.

$$\overline{x} = \frac{151}{20} = 7.55$$ సూత్రం (1) నుంచి

$$\overline{y} = \frac{127}{20} = 6.35$$ సూత్రం (1) నుంచి

$$b_{yx} = \frac{20(1126) - (151)(127)}{20(1295) - (151)^2} = \frac{22520 - 19177}{25900 - 22801}$$

$$\frac{3343}{3099} = 1.07887$$ సూత్రం (2) నుంచి

$$b_{xy} = \frac{20(1126) - (151)(127)}{20(1027) - (127)^2} = \frac{22520 - 19177}{20540 - 16129}$$ సూత్రం (3) నుంచి

$$\frac{3343}{4411} = 0.7579$$

x మీద y ప్రగ.స.రేఖ } y-63.5 = 1.0787 (x-7.55) (4)

y = 1.0787x - 1.7942

y మీద x ప్రగ.స.రేఖ } x-7.55 = 0.7579 (y - 6.35) (5)

x = 0.75799y + 2.7373

డిమాండు (x) = 7.5 అయితే y = 1.0787 (7.5) - 17942, సమీకరణం (9) నుంచి అంటే y = 6.2961 యూనిట్ల జనాభా.

జనాభా (y) = 15 అయితే, x = 0.7579 (15) + 2.7373 (10) నుంచి అంటే x = 14.1058 యూనిట్ల డిమాండు.

$$r = \sqrt{(1.0787).(0.7579)} = 0.9042$$ సూత్రం (8) నుంచి

$$r^2 = 0.8175$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1295}{20} - \left[\frac{151}{20}\right]^2}$$

$$= \sqrt{64.75 - 57.0025}$$ సూత్రం (6) నుంచి

$$= \sqrt{7.7475} = 2.7834$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1027}{20} - \left[\frac{127}{20}\right]^2}$$

$$= \sqrt{51.35 - 40.3225}$$ సూత్రం (6) నుంచి

$$= \sqrt{11.0275} = 3.3208$$

అనుమితి : x మీద y ప్ర.గ.సరేఖ: y=1.0787x - 1.7942

y మీద x ప్ర.గ.సరేఖ: x = 0.7579y + 2.7373

డిమాండు 7.5 యూనిట్లయితే జనాభా అంచనా = 6.2961 యూనిట్లు

జనాభా 15 యూనిట్లయితే డిమాండు అంచనా = 14.1058 యూనిట్లు

శ్రేణీద్వయానికి సులభపద్ధతిలో ప్రతిగమనం:

ఉదా॥ 11. 5 : కింది పట్టికలోని దత్తాంశం నుంచి X విలువ 125 అయితే Y ఎంతో అంచనా వేయండి. Y విలువ 10 అయితే X ఎంతో అంచనా వేయండి. ప్రతిగమన రేఖల మధ్య కోణాన్ని గణించండి.

X విలువ :	0-5	5-10	10-20	20-35	35-40	40-45	45-55	55-60
Y విలువ :	6.25	6.25	6.26	6.31	6.33	6.42	6.43	6.42
X విలువ :	60-70	70-85	85-100	100-105	105-110			
Y విలువ :	6.46	6.49	6.48	6.47	6.48			

ఉద్దేశం : రెండు ప్రతిగమన సరళరేఖలను కనుక్కొని వాటి నుంచి అంచనాలను కనుక్కోండి.

సూత్రాలు, పద్ధతి :

మొదట x యొక్క తరగతులను మధ్య విలువలను గణించాలి.

x = X తరగతి మధ్య విలువ

y = Y విలువ

n = [x, y] విలువల జతలసంఖ్యలుగా సంకేతిస్తాం. x^2 , y^2 , xy ల గణను సులభం చేయడానికి x ను

$U = \left[\frac{10x - 500}{25}\right]$ గాను, y ని V = [100y - 640] గాను మార్చుచేస్తాం.

ఈ సమస్యలో అంచనాలను అడిగారు కాబట్టి, ప్రతిగమన సరళరేఖలను కనుక్కోవాలి.

$$U = \frac{10x - 500}{25}$$ కాబట్టి, $$x = \frac{25U}{10} + \frac{500}{10}$$

$$\overline{x} = \frac{25}{10}\overline{U} + 50 = 2.5\frac{\sum U}{n} + 50,$$

$$\sigma x = 2.5\ \sigma_U = 25\sqrt{\frac{\sum U^2}{n} - \left[\frac{\sum U}{n}\right]^2}$$

ఇదేవిధంగా, $V = 100y - 640$ $\quad y = \frac{V}{100} + \frac{640}{100}$

కాబట్టి $$\overline{y} = 0.01\overline{V} + 6.4 = 0.01\frac{\sum V}{n} + 6.4 \qquad [3]$$

$$\sigma_y = 0.01\sigma_v = 0.01\sqrt{\frac{\sum v^2}{n} - \left[\frac{\sum V}{n}\right]^2} \qquad [4]$$

$$\mathrm{cov}(x, y) = \mathrm{cov}(2.5U + 50, 0.01V + 6.41)$$

$$= 25 \times 0.01\,\mathrm{cov}[U.V]$$

$$= 2.5 \times 0.01\left[\sum \frac{UV}{n} - \frac{(\sum U)(\sum V)}{n^2}\right] \qquad [5]$$

$$b_{yx} = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{V(x)} = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma x^2} \qquad [6]$$

$$b_{xy} = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{V(y)} = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma y^2} \qquad [7]$$

x మీద y ప్రగ.స.రేఖ } $y - \bar{y} = b_{yx}(x - \bar{x})$ [8]

ఈరేఖను 'y' అంచనాను గణించడానికి ఉపయోగిస్తాం.

y మీద x ప్రగ.స.రేఖ } $x - \bar{x} = b_{xy}(y - \bar{y})$ [9]

ఈరేఖను 'x' అంచనాను గణించడానికి ఉపయోగిస్తాం.

రెండు ప్ర.స.గ. రేఖల మధ్యగల కోణం } $\theta = \tan^{-1}\left[\left[\frac{I \approx r^2}{r^2}\right]\frac{\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}\right]$ [10]

$$r = \sqrt{b_{yx}.b_{xy}} \qquad [11]$$

గణన పట్టిక

x	y	$U = \frac{10x - 500}{25}$	$V = 100y - 640$	UV	U^2	V^2
2.5	6.25	-19	-15	285	361	225
7.5	6.25	-17	-15	255	289	225
15	6.26	-14	-14	196	196	196
27.5	6.31	-9	-9	81	81	81
37.5	6.33	-5	-7	35	25	49
42.5	6.42	-3	2	6	9	4
50	6.43	0	3	0	0	9
57.5	6.42	3	2	6	9	4
65	6.46	6	6	36	36	36
77.5	6.49	11	9	99	121	81
92.5	6.48	17	8	136	289	64
102.5	6.47	21	7	147	441	49
107.5	6.48	23	8	184	529	64
		14	**-15**	**1454**	**2386**	**1087**

పట్టిక నుంచి $n = 13, \sum U = 14; \sum V = -15, \sum UV = 1454$

$\bar{y} = 0.01\left(\frac{-15}{13}\right) + 64 = 6.3885$ విలువలను గ్రహించి సూత్రాలను (1) నుంచి (10) వరకు ఉపయోగిస్తాం.

$\bar{x} = 2.5\left(\frac{14}{13}\right) + 50 = 52.6923$ సూత్రం (1) నుంచి

సూత్రం (3) నుంచి

$\sigma_x = 2.5\sqrt{\frac{2386}{13} - (\frac{14}{13})^2} = 33.7619$ సూత్రం (2) నుంచి

$\sigma_y = 0.01\sqrt{\frac{1087}{13} - \left[\frac{-14}{13}\right]^2} = 0.82$

$\text{cov}(x, y) = 0.025\left[\frac{1454}{13} - (\frac{14}{13})(\frac{-15}{13})\right] = 2.8272$

$b_{yx} = \frac{2.8272}{(33.7619)^2} = 0.0025$ సూత్రం (6) నుంచి

$b_{xy} = \frac{2.8272}{(0.8228)^2} = 4.1761$ సూత్రం (7) నుంచి

x మీద y ప్రగ.స.రేఖ } y-6.3885 = 0.0025(x-52.6923) సూత్రం (8) నుంచి [12]

$y = 0.0025x + 6.2568$

y మీద x ప్రగ.స.రేఖ } x - 52.6923 = 0.0025 (y-6.3885) [13]

$x = 0.0025y + 52.6763$

x = 125 అయితే, y = 0.0025 (125) + 6.2568 సూత్రం (12) నుంచి

= 6.5693

y = 10 అయితే, x = 0.0025 (10) + 52.6763) సూత్రం (13) నుంచి

= 52.7013

$$r = \sqrt{(0.0025)(4.1761)} = 0.1022$$ సూత్రం (11) నుంచి

అనుమితి : $x = 125$ అయితే $y = 6.5693$

$y = 10$ అయితే $x = 52.7013$

11.4 బహుళ ప్రతిగమనము:

ఒక ఆధారిత చలరాశి ఒకటి కంటే ఎక్కువ స్వతంత్ర చలరాశులచే ప్రభావితమైనపుడు ప్రతిగమన నమూనాను అంచనా వేయడం, దీనిని బహుళ ప్రతిగమనం (Multiple Regression) అంటాము.

ఉదాహరణకు మనం తీసుకున్న వినియోగ - ఆదాయ నమూనాలో ఆదాయం (X) మాత్రమే వినియోగాన్ని ప్రభావితం చేస్తుందనుకున్నాము. కాని సిద్ధాంతపరంగా ఆలోచిస్తే ఆస్తి, సంపద మొదలైన చలరాసులెన్నో వినియోగాన్ని ప్రభావితం చేస్తాయి. ఇంకో ఉదాహరణ తీసుకుందాం. ఒక వస్తువు డిమాండ్ ఆ వస్తువు ధరపై మాత్రమేకాక ఆ వస్తువుకు పూరక, ప్రత్యామ్నాయ వస్తువుల ధరలు, వినియోగదారుని ఆదాయం మొదలగు రాసులపై ఆధారపడుతుంది. అందువల్ల మన ప్రతిగమన నమూనాతోను రెండు కంటె ఎక్కువ చలరాశులను తీసుకునేందుకు వీలుగా పొడిగించాలి. బహుళ ప్రతిగమన నమూనాలో మూడు చలరాశుల నమూనా అనగా ఒక ఆధారిత చలరాశి రెండు స్వతంత్ర చలరాశుల గల నమూనా అతి సూక్ష్మమైనది.

రెండు చలరాశులలో కల ప్రతిగమన నమూనాను క్రింది విధంగా రాస్తాము.

$$Y_i = \beta_i + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \mu_i$$

ఇందులో, Y ఆధారిత చలరాశి; X_2, X_3 లు స్వతంత్ర చలరాశులు; μ దోషపదము; i (1....n) పరిశీలనాంశాల సంఖ్య, పై సమీకరణంలో β_i Y అక్షం మీద అంతర ఖండనము. ఇది Y చలరాశిపై నమూనాలోకి తీసుకోబడని చలరాశుల సగటు ప్రభావాన్ని తెలుపుతుంది. β_2, β_3 అను పాక్షిక ప్రతిగమన గుణకాలంటాము.

పై సమీకరణంలోని ప్రతిగమన గుణకాలను ఏ స్వతంత్ర చలరాశికి చెందినవో సులభంగా గుర్తించడానికి ప్రతి పరామితికి పాదుకను చేరుస్తాము.

$$Y_i = \beta_{1.23} + \beta_{12.3} X_{2i} + \beta_{13.2} X_{3i} + \mu_i$$

వాడుకలోని 1 స్వతంత్ర చలరాశిని, 2 స్వతంత్ర చలరాశి X_2 ని, 3 స్వతంత్ర చలరాశి X_3 ని తెల్పుతాయి.

11.5 బహుళ నిర్ధారక గుణకం:

రెండు చలరాశుల సందర్భంలో ను ప్రతిగమన సమీకరణ సంధాన సఫలతకు (goodness of fit) మదింపుగా తీసుకున్నాము. ఇది Y రాశి విస్తృతిలో X రాశి వివరించిన భాగాన్ని తెలుపుతుంది. ఈ భావనను రెండుకంటె ఎక్కువ చలరాశులున్న సందర్భాలకు పొడిగించగలం. ప్రస్తుత సందర్భంలో X_2, X_3 లు సమిష్ఠిగా Y లోని విస్తృతిలో ఎంత భాగాన్ని వివరిస్తున్నాయో తెలుస్తుంది. దీనినే బహుళ నిర్ధారక గుణకమంటాము; దానికి $R^2_{1.23}$ ను సంకేతంగా వాడతాము. భావనాపరంపరగా ఇది r^2 కు సన్నిహితమైనది.

$$R^2_{1.23} = \frac{ESS}{TSS}$$

ఇందులో ESS అనగా అంచనా వర్గాల మొత్తం; TSS అనగా ఆధారిత చలరాశి వర్గాల మొత్తం

$$R^2_{1.23} = \frac{\hat{\beta}_{12.3}\sum Y_i X_{2i} + \hat{\beta}_{13.2}\sum Y_i X_{3i}}{\sum Y_i^2}$$

$R^2_{1.23}$ విలువ విలువ వలెనే ఎల్లప్పుడు (0,1) అంతరంలో ఉంటుంది. దీని విలువ 1 అయితే సంధానపరచిన ప్రతిగమన రేఖ Y రాశిలోని విస్తృతిని నూటికి నూరుపాళ్ళు వివరించిందని అర్థం; 0 అయితే సంధానపరచిన రేఖ Y లోని విస్తృతిని ఎంతమాత్రం వివరించలేదని అర్థం. వాస్తవంలో ఈ రెండు విలువలు సంభవించవు. అందుచేత R^2 విలువ 1కి చేరువవుతున్న కొలదీ నమూనా సంధానము మెరుగుపడుతోందని అర్థం.

R^2 మరియు F ల మధ్య సంబంధం:

మూడు చలరాశుల సందర్భంలో F ను నిర్వచించాము. k చలరాశుల సందర్భంలో F ను నిర్వచించగలం.

$$F = \frac{ESS/K-1}{RSS/N-R}$$

ఇందులో R అంచనా వేయబడిన పరామితుల సంఖ్యను తెల్పుతుంది. K చలరాశులున్నప్పుడు K-1 స్వతంత్ర చలరాశు లుంటాయి. వీటి K-1 వాలు గుణకాలు అంతర ఖండన కలిపితే K కు సమానము.

పై సూత్రాన్ని కొద్ది మార్పు చేసి రాస్తే క్రింది ఫలితాలను పొందుతాము.

$$F = \frac{N-K}{K-1}\cdot\frac{ESS}{RSS} = \frac{N-K}{K-1}\cdot\frac{ESS}{TSS-ESS}$$

$$= \frac{N-K}{K-1}\cdot\frac{ESS/TSS}{1-\frac{ESS}{TSS}} = \frac{N-K}{K-1}\cdot\frac{R^2}{1-R^2}$$

కాబట్టి F కి R^2కి ఒక నిశ్చిత సంబంధం ఉంది. అంతేకాదు. ఈ సంబంధం ధనాత్మకమైంది. R^2 విలువ పెరిగేకొద్దీ (తగ్గేకొద్దీ) F విలువ కూడా పెరుగుతుంది (తగ్గుతుంది). కాబట్టి ప్రతిగమనపు మొత్తం ప్రాధాన్యతను పరీక్షించడానికి వాడుతున్న F పరీక్ష R^2ప్రాధాన్యతను కూడా పరీక్షిస్తుంది. అనగా $H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \ldots = \beta_k = 0$ అనే శూన్య పరికల్పన $R^2 = 0$ అనే పరికల్పనకు సమానమైనది. మూడు చలరాశుల సందర్భంలో F ను క్రింది విధంగా రాస్తాము.

$$F = \frac{R^2/2}{(1-R^2)/(N-3)}$$

F పరీక్షను R^2 ను వాడి జరిపితే మదింపు సులభంగా ఉంటుంది. ఎందుకంటే R^2 విలువ తెలిస్తే F విలువను సులభంగా కనుగొనవచ్చు.

ఉదాహరణకు $R^2_{new} = 0.9988 \; R^2_{old} = 0.9978.$

$N = 15 x_3$ ని చేర్చడం వల్ల ESS తగినంత పెరిగిందా?

$$F = \frac{(0.9988 - 0.9978)/1}{(1-0.9988)/12} = 10$$

(1,2) స్వేచ్ఛా డిగ్రీలకు F పట్టిక విలువ **9.33** కాబట్టి X_3 ని చేర్చడం వల్ల ESS తగినంతగా పెరుగుతోంది. కాబట్టి X_3 ని నమూనాలోకి తీసుకోవాలి.

11.6 సూక్ష్మ, పాక్షిక సహసంబంధ గుణకాలకు బహుళ నిర్ధారక గుణకానికి గల సంబంధం:

$$R^2_{1.23} = \frac{r^2_{12} + r^2_{13} - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r^2_{23}}$$

$$= r^2_{12} + \left(1 - r^2_{12}\right) r^2_{13.2} = r^2_{13} + \left(1 - r^2_{13}\right) r^2_{12.3}$$

పై సంబంధాలను బట్టి ప్రతిగమన నమూనాలో స్వతంత్ర చలరాశుల్ని చేర్చేకొద్దీ R^2 విలువ పెరుగుతుందే కాని తగ్గదని గమనించవచ్చు. X_2, X_3 లు సమిష్టిగా వివరిస్తున్న Y లోని విస్తృతిని రెండు భాగాలుగా చేయవచ్చు. ఇవి : X_2 మాత్రమే వివరిస్తున్న భాగం (అనగా r^2_{12}, X_2 వివరించని భాగం మరియు X_2 ని స్థిరంగా ఉంచినప్పుడు X_3 వివరించిన భాగముల లబ్దము [అనగా $(1 - r^2_{12}) r^2_{13.2}$] $r^2_{13.2}$ కనిష్ఠ విలువ శూన్యం కనుక $R^2_{1.23}$ విలువ r^2_{12} విలువ కంటె ఎక్కువగానే ఉంటుంది.

పై ఫలితాన్ని ఈ క్రిందివిధంగా కూడా రాయగలము.

$$-R^2_{1.23} = -r^2_{13} - (1 - r^2_{13}) r^2_{12.3}$$

$$1 - R^2_{1.23} = 1 - r^2_{13} - (1 - r^2_{13}) r^2_{12.3}$$

$$= (1 - r^2_{13})(1 - r^2_{12.3})$$

11.7 పాక్షిక ప్రతిగమన గుణకానికి మరియు సూక్ష్మసహసంబంధ గుణకాలకు గల సంబంధము:

ప్రతిగమన గుణకాలకు సూక్ష్మసహసంబంధ గుణకాలకు పాక్షికంగా గల సంబంధం

$$\hat{\beta}_{12} = r_{12}\frac{S_1}{S_2}$$

$$\hat{\beta}_{13} = r_{13}\frac{S_1}{S_3}$$

$$\hat{\beta}_{23} = r_{23}\frac{S_2}{S_3}$$

$$\hat{\beta}_{32} = r_{12}\frac{S_2}{S_1}$$

$$\hat{\beta}_{12.3} = \frac{\hat{\beta}_{12} - \hat{\beta}_{13}\hat{\beta}_{32}}{1 - \hat{\beta}_{23}\hat{\beta}_{32}}$$

$$= \frac{r_{12}\frac{S_1}{S_2} - r_{13}\, r_{32}\frac{S_1 S_3}{S_2 S_3}}{1 - r_{23}\frac{S_2}{S_3} r_{32}\frac{S_3}{S_2}}$$

$$= \frac{r_{12} - r_{13}}{1 - r_{23} r_{32}}\frac{S_1}{S_2}$$

ఇదేవిధంగా $\hat{\beta}_{13.2} = \frac{r_{13} - r_{12} r_{23}}{1 - r_{32} r_{23}}\frac{S_1}{S_3}$

ఉదా॥ 11. 6 : ఒక గ్రామంలోని కుటుంబాల నుండి 10 కుటుంబాల ప్రతిరూపాన్ని తీసుకుని ఒక వారంలో వారి తలసరి ఆదాయ వినియోగ వ్యయాలపై దత్తాంశాలు సేకరించబడ్డాయి.

వినియోగ వ్యయం (Y)			70	65	90	95
ఆదాయం (X)			80	100	120	140
110	115	120	140	155	150	
160	180	200	220	240	260	

Y_i	X_i	X_iY_i	x_i^2	$x_i = X_i - \overline{X}$	$y_i = Y_i - \overline{Y}$	x_i^2	x_iy_i
70	80	5600	6400	-90	-41	8100	3690
65	100	6500	10000	-70	-46	4900	3220
90	120	10800	14400	-50	-21	2500	1050
95	140	13300	19600	-30	-16	900	480
110	160	17600	25600	-10	-1	100	10
115	180	20700	32400	10	4	100	40
120	200	24000	40000	30	9	900	270
140	220	30800	48400	50	29	2500	1450
155	240	37200	57600	70	44	4900	3080
150	260	39000	67600	90	39	8100	3570
మొత్తం	1700	205500	322000	0	0	33000	16800 =1110
సగటు	170			0	0 = 111		

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{16800}{33000} = 0.584$$

$$\hat{\beta}_1 = \overline{Y} - \hat{\beta}_2 \overline{X} = 111 - 0.509 \times 170 = 24.47$$

$\hat{\beta}_1$ కనుగొనడానికి రెండవ సూత్రము ఉపయోగించవచ్చు.

$$\hat{\beta}_2 = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$= \frac{10 \times 205500 - 1700 \times 1110}{10 \times 322000 - 1700 \times 1700}$$

$$= \frac{168000}{33000} = 0.509$$

$\hat{y}_i = 24.47 + 0.509x_i$

దీనిని X మీద Y ప్రతిగమనరేఖ అంటాము.

11.8 సూక్ష్మ, పాక్షిక ప్రతిగమన గుణకములు :

Y చలరాశిని X చలరాశిపై ప్రతిగమనం చేయగా పొందిన సమీకరణాన్ని

$Y = \hat{\beta}_{1.2} + \hat{\beta}_{12}X_2$ అని Y ని X_3పై ప్రతిగమనం చేయగా పొందిన సమీకరణాన్ని

$Y = \hat{\beta}_{1.3} + \hat{\beta}_{13}X_3$ అని X_3ని X_2 పై ప్రతిగమనం చేయగా పొందిన సమీకరణాన్ని

$X_3 = \hat{\beta}_{3.2} + \hat{\beta}_{3.2}X_2$ అని X_2ని X_3 పై ప్రతిగమనం చేయగా పొందిన సమీకరణాన్ని

$X_2 = \hat{\beta}_{2.3} + \hat{\beta}_{2.3}X_3$ రాద్దాము. రెండు చలరాశుల ప్రతిగమనంలో ప్రతిగమన గుణకాలకు సూత్రాలను తెలుసుకున్నాము. అవి

$$\hat{\beta}_{12} = \frac{\sum X_{2i}Y_i}{\sum X_{2i}^2}; \hat{\beta}_{23} = \frac{\sum X_{2i}X_{3i}}{\sum X_{2i}^2}; \hat{\beta}_{13} = \frac{\sum X_{3i}Y_i}{\sum x_{3i}^2}, \quad \hat{\beta}_{32} = \frac{\sum X_{2i}Y_{3i}}{\sum X_i^2}$$

ఇప్పుడు త్రిచలరాశి ప్రతిగమనంలోని ప్రతిగమన గుణకాన్ని పరీక్షిద్దాము.

$$\hat{\beta}_{12.3} = \frac{\left(\sum Y_iX_{2i}\right)\left(\sum X_{3i}^2\right) - \left(\sum Y_iX_{3i}\right)\left(\sum X_{2i}X_3\right)}{\left(\sum X_{2i}^2\right)\left(\sum X_{3i}^2\right) - \left(\sum X_{2i}X_{3i}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sum Y_iX_{2i}}{\sum X_{2i}^2}\right)\left(\sum X_{3i}^2 \sum X_{2i}^2\right) - \left(\frac{\sum Y_iX_{3i}}{\sum X_{3i}^2}\right)\left(\sum X_{3i}^2\right)\left(\frac{\sum X_iX_{3i}}{\sum X_{2i}^2}\right)\left(\sum X_{2i}^2\right)}{\left(\sum X_{2i}^2\right)\left(\sum X_{3i}^2\right) - \left(\frac{\sum X_{2i}X_{3i}}{\sum X_{2i}^2}\right)\left(\frac{\sum X_{2i}X_{3i}}{\sum X_{3i}^2}\right)\left(\sum X_{2i}^2\right)\left(\sum X_{3i}^2\right)}$$

$$= \frac{\hat{\beta}_{12} - \hat{\beta}_{13}\hat{\beta}_{32}}{1-\hat{\beta}_{23}\,\hat{\beta}_{32}}$$

ఇదేవిధంగా $$\hat{\beta}_{13.2} = \frac{\hat{\beta}_{13} - \hat{\beta}_{12}\hat{\beta}_{23}}{1-\hat{\beta}_{32}\,\hat{\beta}_{23}}$$

11.9 సారాంశము :

రెండు చలరాశుల మధ్యగల సంబంధములను గమనించుటలో ప్రతిగమనము ఒకటి. రెండు చలరాశుల మధ్య బీజీయ ప్రమేయాన్ని సంధానముచేసి తెలియని రాశుల విలువలను తెలుసుకొనుటయే ప్రతిగమన పద్ధతి. కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతితో పారామితియులను గణనచేయుట ఇందులో ఒకభాగము. సామాన్య సమీకరణములను రాబట్టి వాటిని సాధించుట ద్వారా ప్రతిగమన రేఖలను రచించి చలరాశి విలువలను ఊహింపవచ్చు. అందుచేత ఊహించి రాబోవు దత్తాంశ నిర్ధారణకు ప్రతిగమన పద్ధతి చక్కగా ఉపయోగపడును. అంతేకాక రెండు అంతకంటే ఎక్కువ ఉన్న చలరాశుల మధ్య గల సంబంధాలను సూక్ష్మ, పాక్షిక ప్రతిగమన పద్ధతులద్వారా గణించవచ్చు. బహుళ ప్రతిగమన పద్ధతితో ఎక్కువ స్వతంత్రచలరాశులచే ఒక ఆధారిత చలరాశి ప్రభావితమైన విధము తెలుసుకొనవచ్చును మొదలగు విషయాలను ఈ పాఠంలో తెలుసుకొన్నాము.

11.10 స్వయం సమీక్షా ప్రశ్నలు:

1. క్రింది దత్తాంశం నుంచి ఉత్పత్తి, ఎగుమతుల మధ్య గల సంబంధాన్ని సరళరేఖల రూపంలో చూపండి. ఉత్పత్తి 150 యూనిట్లయితే ఎగుమతి ఎంత ఉండవచ్చు. సరళరిఖల మధ్య కోణాన్ని గణించండి.

ఉత్పత్తి:	200	275	350	425	500	375	650	725	800	875	950	1025	1100
(యూనిట్లలో)	1175	1250	1325	1400									
ఎగుమతి:	125	150	175	200	225	250	275	300	325	350	375	400	425
(యూనిట్లలో)	450	475	500	525									

2. ఈ క్రింది దత్తాంశానికి కార్ల్‌పియర్సన్ సహసంబంధతా గుణకాన్ని గణించి రెండు ప్రతిగమన రేఖలను కనుక్కోండి. ఎగుమతులు రూ॥ 175 కోట్లు అయినప్పుడు దిగుమతులు ఎంతో అంచనావేయండి. దిగుమతులు రూ॥ 46 కోట్లు అయినప్పుడు ఎగుమతులు ఎంత?

ఎగుమతులు: (కోట్ల రూ॥)	102	131	145	139	142	150	160	167	172	184	200	190	200
దిగుమతులు:	75	68	71	65	60	51	55	60	50	42	40	31	26

3. ఒక గ్రామంలోని కుటుంబాల నుండి 12 కుటుంబాల ప్రతి రూపాన్ని తీసుకొని ఒక వారంలో వారి తలసరి ఆదాయ వినియోగ వ్యయాల పై దత్తాంశాలు సేకరించబడ్డాయి.

వినియోగ వ్యయం(Y):	70	90	80	110	120	155	65	95	115	140	150	100
ఆదాయం (X):	80	120	160	200	240	100	140	180	220	260	170	200

11.11 గుర్తుంచుకోవల్సిన అంశములు:

$r_{xy} = 0$ అయిత రెండు ప్ర.గ.స. రేఖలు ఒకదానికొకటి లంబంగా ఉంటాయి. వాటి మధ్య కోణం $\theta = 90^0 = \frac{\pi}{2}$ అవుతుంది. $r_{xy} = \pm 1$ అయితే, రెండు ప్ర.గ.స. రేఖలు ఏకీభవిస్తాయి. వాటి మధ్య కోణం $= 0^0$ లేదా π అవుతుంది.

11.12 చదువవలసిన్పఉస్కలాలు:

1. Fundamentals of Mathematical Statistics : S.C. Gupta & V.K. Kappoor, Publishel S.Chand & Co.
2. Basic Statistics by B.L. Agarwal, Third Edition, New Age International (p) Limited.

పాఠం : 12

గణాంక సేకరణ పద్ధతులు

(Methods of Enumeration)

విషయక్రమం:

ఈ పాఠ్యాంశంలో మనం

దత్తాంశము, ప్రాథమిక మరియు ద్వితీయ మూల దత్తాంశాలు
వీటి దత్తాంశ సేకరణ పద్ధతులు
షెడ్యూలు, ప్రశ్నావళిల నిర్మాణం తద్వారా దత్తాంశ సేకరణ
సమిష్టి లేదా "జనాభా" పద్ధతి అంటే ఏమిటి, ఆ పద్ధతి ద్వారా గణాంక సేకరణ చేయు విధానం
ప్రతిచయనము మరియు ప్రతిరూప గ్రహణ పద్ధతులు, వాటి లాభ నష్టముల గురించి మరియు
వివిధ ప్రతిచయన లేదా ప్రతిరూప గ్రహణముల గురించి
మనము తెలుసుకుంటాం.

12.1 ఉపోద్ఘాతం

రాజకీయ, ఆర్థిక, వైజ్ఞానిక రంగాలన్నిటిలో గణాంకపద్ధతుల ఉపయోగము దినదినాభివృద్ధి చెందుతున్నది. గణాంక శోధన పరిశోధన అన్ని విషయాలలో తప్పనిసరి అవుతున్నది. గణాంకశోధన జరపడానికి మొట్టమొదట గణాంక విచారణ చేయాలి. గణాంక విచారణ అంటే, గణాంక పద్ధతుల ద్వారా విషయాలగురించి తెలుసుకోవడానికి జరిపె శోధన. యథార్థ విషయాలను గణాంకాల రూపంలో సేకరించడమే గణాంక శోధనలో ముఖ్యమైన అంశము. దత్తాంశ సేకరణ అంత సులభమైన పనికాదు. దత్తాంశ సేకరణకు ముందు అనేక ప్రాథమిక కార్యక్రమాలు నిర్వహించవలెను. గణాంక శోధన అంటే పరిమాణాత్మకంగా ఆధ్యయనానికి వీలైన సమస్యపై జరిపిన విచారణ. ఉదాహరణకు ప్రభుత్వము దేశంలోని నిరుద్యోగ సమస్యను పరిష్కరించదలచిందను కొందాము. పరిష్కరించడానికి ముందుగా నిరుద్యోగపు పరిమాణము దాని పరిమితులకు సంబంధించిన విషయాలపై దత్తాంశ సేకరణ గణాంకపద్ధతుల ద్వారా చేయవలెను. నిరుద్యోగ సమస్యను పరిమాణాత్మకంగా అంటే అంకెల సహాయంతో పరిశీలించే అవకాశం ఉంది. పరిశీలన తరువాత నిరుద్యోగ సమస్యను పరిష్కరించే కార్యక్రమాలు ప్రభుత్వము తీసుకొంటుంది. కాబట్టి గణాంక విచారణ అంటే ఒక రకమైన శోధన. గణాంక విచారణ చేయడంలో మొట్టమొదటి దశ యోజనదశ. దత్తాంశ సేకరణకు పూర్వము గణాంకశోధకుడు విచారణకు తగిన యోజన తయారు చేయవలెను. ప్రణాళిక తయారు చేయడానికి అనేక ప్రాథమిక చర్యలు తీసుకోవలెను.

12.2 విచారణోద్దేశము - పరిధి :

గణాంక విచారణ ఉద్దేశాన్ని జాగ్రత్తగా నిర్ణయించి నిర్వచిస్తే, దత్తాంశ సేకరణలో జరగబోయే కష్టనష్టాలు తగ్గే అవకాశాలున్నాయి. అంటే విచారణోద్దేశము ఖచ్చితంగా ఉంటే ఏ దత్తాంశము ఉపయోగపడుతుంది, ఏది పనికిరాదోకూడా సులభంగా గ్రహిచగలము. గణాంక విచారణోద్దేశంతోపాటు, దాని పరిధి కూడా నిర్ణయించవలెను. ప్రత్యేకమైన గణాంకశోధనలో దత్తాంశ సేకరణ ఎంతవరకు చేయవలెనో, సేకరణకు ముందు నిర్ణయించవలెను. ఎంత పరిమాణాత్మక దత్తాంశము సేకరించవలెనో గణాంకవిచారణోద్దేశంపైన, పరిధిపైన ఆధారపడి ఉంటాయి. కొన్ని విచారణలలో పూర్తి దత్తాంశము అవసరము. మరికొన్ని విచారణలలో వరణ అధ్యయనం చేస్తే దత్తాంశము సరిపోతుంది. సాధారణంగా గణాంక విచారణ చేయడంలో ఉద్దేశము, సేకరించిన దత్తాంశాన్ని పరిశీలించిన ఒక సత్యాన్ని రాబట్టడానికి ఉపయోగించడమే.

12.3 దత్తాంశసేకరణ మూలాలు :

విచారణోద్దేశము, పరిధి జాగ్రత్తగా నిర్ణయించిన తరువాత, దత్తాంశాన్ని సేకరించే మూలాలను (తావులు లేదా ప్రదేశాలు) గురించి నిర్ణయించవలెను. స్పష్టంగా చెప్పవలె నంటే దత్తాంశము రెండు తావులలో లభిస్తుంది. మొదటిది ఒక సంస్థ తన అవసరాలకు వ్రాసుకొన్న పుస్తకాలు, రెండోది ఇతర సంస్థలు తమ వ్యవహారాలను వ్రాసుకొన్న పుస్తకాలు. సంస్థ సొంతపుస్తకాలనుంచి సేకరించిన దత్తాంశాన్ని ప్రాథమిక దత్తాంశమని, ఇతర సంస్థల పుస్తకాల నుండి సేకరించిన మూలాన్ని ద్వితీయ మూలమని అంటారు. ఒక్కొక్కప్పుడు, ఒక ప్రత్యేక శోధనకు సేకరించిన ప్రధాన దత్తాంశము మరో శోధనకు ద్వితీయ దత్తాంశంగా ఉపయోగపడే అవకాశం కూడా ఉంది.

ఒక విచారణపై మొట్టమొదటిసారిగా పరిశోధకులు, గణకులు సేకరించిన దత్తాంశము ప్రధానదత్తాంశ మనిపించుకొంటుంది. ఇతరులు లోగడ సేకరించి దత్తాంశాన్ని, పత్రికలలో ప్రచురితమైన దత్తాంశాన్ని గ్రహిస్తే ద్వితీయదత్తాంశమనిపించు కొంటుంది. గణాంక విచారణ స్వభావము, ఉద్దేశము, పరిధులకు అనుగణంగా దత్తాంశాన్ని ప్రారంభికంగా సేకరించవవలెనో, లేదా లోగడ సేకరించి గాని ముద్రితంగా అముద్రితంగా గాని ఉన్న దత్తాంశాన్ని ఉపయోగించుకోవలెనో నిర్ణయించవలెను. ద్వితీయ దత్తాంశాన్ని వాడుకొనేటప్పుడు తగిన జాగ్రత్తలు తీసుకోవలెను. తీసుకోవలసిన జాగ్రత్త లేమంటే 1. లోగడ జరిగిన దత్తాంశసేకరణ ఉద్దేశాన్ని గుర్తించవలెను 2. ప్రచురించిన గణాంకాలు ఎట్లా సేకరించడం జరిగిందో తెలుసుకోవలెను. ప్రచురించిన గణాంకాలను యథాతథంగా తీసుకోరాదు విమర్శ జరిపి తీసుకోవలెను. ఒక సమస్యకు సంబంధించిన అనేక విషయాలను పరిశీలించి గణాంక విచారణ చెయ్యవలెనో నిర్ణయించవలెను. పరిశీలించవలసిన విషయాలలో ముఖ్యమైనవి - గణాంకవిచారణోద్దేశము పరిధి. ఏ విధమైన విచారణ కొనసాగించవలెననే విషయంపై విచారణోద్దేశానికి, పరిధికి తగిన ప్రభావము ఉంటుంది. విచారణ పూర్తిగణన ప్రతిచయన పరీక్ష విచారణ పరిధి విశాలమైతే భారీగా దత్తాంశసేకరణ చేయాలి. ఎటువంటి విచారణ జరపవలెననే సమస్యపై ఆర్థిక ప్రభావం కూడా ఉంటుంది. అట్లాగో అందుబాటులో ఉన్న సమయం కూడా విచారణ పద్ధతిని ప్రబావితం చేస్తుంది.

12.4 దత్తాంశ సేకరణ పద్ధతులు - జనాభా లెక్కల దర్యాప్తు పద్ధతి :

దత్తాంశ సేకరణలో ముఖ్యంగా రెండు పద్ధతులను ఉపయోగిస్తాము. మొదటిది జనాభాలెక్కల దర్యాప్తు పద్ధతి. రెండోది ప్రతిచయన పద్ధతి, గణాంకశాస్త్రంలో జనాభా అనే పదానికి వేరే అర్థం ఉంది. ఒక విచారణలో దత్తాంశ సేకరణ అన్ని అంశాల మీద జరగవలెననుకొందాము. ఈ అంశాల సముదాయాన్నే జనాభా అంటాము. ఉదాహరణకు ఒక విద్యాలయములో ఒక సంవత్సరం ఎంతమంది పరీక్షలో ఉత్తీర్ణులైనారో తెలుసుకోవలసి ఉందనుకొందాము ఈ విచారణలో జనాభా అంటే విశ్వవిద్యాలయంలో అ సంసవత్సరం చదువుతూ పరీక్షకు హాజరుకావలసిన విద్యార్థుల మొత్తము. దత్తాంశ సేకరణలో రెండో పద్ధతి పూర్తి జనాభాకు ప్రాతినిధ్యంవహించే ప్రతిచయనాలను తీసుకోవడం. జనాభాలో గల ప్రతి అంశంపైనా దత్తాంశ సేకరణ సాధ్యపడదు. అటువంటిప్పుడు కొన్ని ముఖ్యంశాలపైనే దత్తాంశ సేకరణ చేయడంలో సంతృప్తిపడవలెను. ఇట్లా కొన్ని అంశాలనే తీసుకొంటే ప్రతిచయన దత్తాంశ సేకరణ అని పించుకొంటుంది. ఒక విషయాన్ని తెలుసుకోవడానికి ఏవ్యక్తి అయినా, వ్యావారసంస్థ అయినా ప్రభుత్వసంస్థ అయినా మొట్టమొదటిసారిగా సేకరించిన దత్తాంశము ప్రధానదత్తాంశము లేదా ప్రాథమిక దత్తాంశ మనిపించుకొంటుంది. ఈ దత్తాంశాము లోగడ ఏ సంస్థ సేకరించి ఉండదు. ప్రాథమిక దత్తాంశము గణాంకవిచారణకు ముడిసరుకు వంటిది మొట్ట మొదటిసారిగా సేకరించినది. ఈ పద్ధతిలో గణాంకశోధకుడు తనంతతాను ఓర్పుతోను, జాగ్రత్తగాను గమనించిన విషయాలను సేకరిస్తాడు. అతడే స్వయంగా విచారణ సమస్యను పరిశీలిస్తాడు. అతడు భోగట్టానిచ్చేవారితో కలిసిమెలసి తిరిగి కావలసిన విషయాల పై తగిన దత్తాంశాన్ని సేకరిస్తాడు లేదా గణాంకశోధకుడు భోగట్టానిచ్చేవారిని ముఖాముఖీగా కలుసుకొని మాట్లాడి దత్తాంశాన్ని సేకరిస్తాడు. గణాంకశోధకుడు స్వయంగా దత్తాంశాన్ని సేకరించడంవల్ల అటువంటి విచారణ సంపూర్ణంగా ఉంటుంది.

12.4.1 ప్రత్యక్షశోధన ప్రయోజనాలు:

1. ఇందులో అసలు దత్తాంశాన్ని గ్రహించే వీలున్నది. 2. ఒక సమస్యపై వాస్తవికరూపము ఏర్పడుతుంది. 3. ఖచ్చితమైన దత్తాంశాన్నే సేకరించడానికి వీలుంది. 4. సేకరణలో ఏకరూపత ఉంటుంది. 5. స్వయంగా దత్తాంశాన్ని సేకరించడంవల్ల ద్వితీయ మూలములపై ఆధారపడనక్కరలేదు. 6. సంపూర్ణ శోధనకు ఈ పద్ధతి చాలా మంచిది.

లోపాలు:

1. ఇందులో దత్తాంశానికి పరిమితమైన విలువే ఉంటుంది. 2. దత్తాంశసేకరణకు ఎక్కువకాలం వృధా అవుతుంది. 3. దత్తాంశ సేకరణకు ధనవ్యయం కూడా ఎక్కువే. 4. విస్తృత విచారణలకు ఈ పద్ధతి వాడరు 5. గణాంక శోధకుడు పాక్షికదృక్పథం ప్రదర్శిస్తే సరియైన ఫలితాలు రావు. గణాంక శోధకుడు తెలిసిగాని, తెలియకగాని పక్షపాతబుద్ధితో వ్యవహరించే అవకాశాలున్నాయి. ప్రత్యక్ష వ్యక్తిగత శోధన వీలుపడనప్పుడు పరోక్షశోధనాపద్ధతిని ఉపయోగించవలె. గణాంకవిచారణ పరిధి విస్తృతంగా ఉన్నప్పుడు పరోక్ష మౌఖికవిధానాన్ని ఉపయోగించవలెను. ఇందులో విచారణ గురించి పూర్తి భోగట్టాలు చెప్పగలిగే వ్యక్తులనే ప్రశ్నించి కావలసిన దత్తాంశము సేకరించడం జరుగుతుంది. తరువాత ఒక విచారణకు సంబంధించిన ముఖ్య ప్రశ్నలు తయారుచేసి, ఆ ప్రశ్నావళిని కొందరి వ్యక్తులకు పంపి (తెలిపి) వారిచ్చిన జవాబులను రికార్డు చేస్తారు. ఉదాహరణకు ప్రభుత్వం నియమించిన కమీషను, కమిటీలు ఈ పద్ధతినుపయోగించి దత్తాంశ సేకరణచేస్తాయి. ఈ పరోక్ష పద్ధతిలో సేకరించిన దత్తాంశపు కచ్చితము, సాక్ష్యం ఇచ్చిన వ్యక్తుల నైజగుణాలపై ఆధారపడుతుంది. గణాంకశోధకుడు వ్యక్తుల సాక్ష్యంపై పూర్తిగా ఆధారపడరాదు. కొందరు వ్యక్తులు నిజాయితీగాను, నిష్పాక్షికంగాను ఉంటారు. అయినప్పటికి వారిచ్చే సాక్ష్యాలు వారి స్వాభావిక అంతరంగిక మనస్తత్వం మీద ఆధారపడతాయి.

12.5 షెడ్యూళ్ళు:

ఒక విచారణకు సంబంధించిన దత్తాంశ సేకరణ కోసం ప్రభుత్వం ప్రయివేటు వ్యక్తులు, సంస్థలు, పరిశోధకులు కొన్ని ప్రశ్నల జాబితా గల ఒకే నమూనా షెడ్యూళ్ళను తయారుచేస్తారు. ఈ షెడ్యూళ్ళను గణకులు నింపుతారు. కాబట్టి ఈ పద్ధతిలో మంచి గణకులను ఎన్నుకొని వారి కి షెడ్యూళ్ళను నింపే శిక్షణ ఇవ్వవలెను. గణకులకు షెడ్యూళ్ళను ఇచ్చి భోగట్టా తెలిసిన వారిని వ్యక్తిగతంగా కలుసుకోమని చెప్పవలెను. గణకులు భోగట్టా తెలిసినవారిని ప్రశ్నించి వారిచ్చిన సమాధానాలు రికార్డుచేస్తారు. ఉదాహరణకు భారత ప్రభుత్వము పదిసంవత్సరాల కొకసారి జనాభా లెక్కలు గణకుల ద్వారా సేకరిస్తుంది. దీనిలో విజయము గణకులపైనే పూర్తిగా ఆధారపడుతుంది. గణకులకు తగిన విద్య ఉండవలెను. వారికి మంచి శిక్షణ కూడా ఇవ్వవలె. అవసరమైతే వారికి కొంత ప్రతిఫలం కూడా ఇస్తే బాగుంటుంది.

12.6 ప్రశ్నావళి :

అసలు దత్తాంశాన్ని సేకరించడానికి ప్రశ్నావళులు ఉపయోగిస్తారు. సరైన మూలశోధన చేయవలెనంటే షెడ్యూళ్ళను, ప్రశ్నావళులను తయారుచేయవలెను. గణాంక విచారణలోని విషయానికి సంబంధించిన పూర్తి సమాచారాన్ని రాబట్టేందుకు అనువైన ప్రశ్నల జాబితాను తయారు చేస్తారు. ఈ ప్రశ్నల జాబితానే ప్రశ్నావళి అని అంటారు. ప్రశ్నావళిని సమాచారము ఇచ్చువారికి పోస్ట్ ద్వారా గాని, మరొక విధంగా గాని పంపించి, వాటిని నింపి తిరిగి పంపించమని అర్థిస్తారు. కాబట్టి ప్రశ్నావళిని భోగట్టానిచ్చే వారే నింపుతారు. కొన్ని సార్లు ప్రశ్నావళిని నింపడంలో సహాయపడేందుకు గణకులను పంపడం కూడా జరగవచ్చు. నింపిన ప్రశ్నావళిని ఒక నిర్ణీత కాలంలోపల పంపించమని ప్రార్థిస్తూ వారిచ్చన భోగట్టా రహస్యంగా ఉంచుతామని హామీఇస్తూ ఒక ఉత్తరము వ్రాయవలె ఆ ఉత్తరానికి ప్రశ్నావళిని జతపరిచి పంపవలెను. నింపిన ప్రశ్నావళులను పంపించుటకు తగినన్ని తపాళాబిళ్ళలంటించిన కవరును కూడా పంపిస్తే మంచిది.

భోగట్టానిచ్చేవారు విద్యావంతులు, సహకరించేవారు, వారు అయితే ఈ పద్ధతి అనువైంది. భోగట్టానిచ్చేవారు నిరక్షరాస్యులైన ఈ పద్ధతి పనికిరాదు. పద్ధతిలో దత్తాంశ సేకరణ వ్యయం తక్కువ, నియమిత కాలంలోనే దత్తాంశాన్ని సేకరించే వీలున్నది కాబట్టి ఈ పద్ధతిని విరివిగా ఉపయోగిస్తున్నారు. చదువను, వ్రాయను రానివారికి ఈ పద్ధతి వర్తించదు. విద్యావంతులైన వారు భోగట్టానివ్వగల వారికి పంపిన ప్రశ్నావళులన్నీ తిరిగి వస్తాయన్న నమ్మకం లేదు. సాధారణంగా, పంపిన వాటి కన్నా భోగట్టా తెలిసిన వారు కూడా కొందరు ప్రశ్నావళిని జాగ్రత్తగా నింపరు. పంపిన ప్రశ్నావళులను లెక్కచేయరు. మరికొందరు నింపిన వాటిని తిగిరి పంపరు. కొన్ని సార్లు ఇచ్చిన భోగట్టా సరియైనది, యథార్థమైనది కాకపోవచ్చు. అయితే ఈ పద్ధతిని మెరుగుపరచవలె నంటే మంచి ప్రశ్నావళిని సిద్ధంచేయవలెను. ప్రశ్నలు సూటిగాను, తక్కువగా ఉండవలెను. ప్రశ్నావళిని తిప్పి పంపడానికి తపాళా బిళ్ళలను పంపించవలెను. అవసరమనుకున్న దానికంటే ఎక్కువ మందికి ప్రశ్నావళులను పంపవలెను.

12.6.1 ప్రశ్నావళి తయారీలో గమనించవలసిన కొన్ని ముఖ్యాంశాలు

1. వ్యక్తిగత అహంకారము, పలుకుబడులకు తావు ఇవ్వరాదు 2. ఉద్రిక్తమైన ప్రశ్నలు వేయరాదు. దానివల్ల జవాబులో పక్షపాతం దొర్లే అవకాశాలున్నాయి. 3. సాధ్యమైనంతవరకు ప్రశ్నలకు జవాబులు, అవునా, కాదా అని చెప్పగలిగే వీలున్నట్లుగా ఉండవలెను. అది సాధ్యం కాకపోతే ప్రశ్నకు ఎదురుగా ఖాళీ స్థలము వదలవలెను. 4. వేర్వేరు భావాలకు లోనైన ప్రశ్నకు, వేర్వేరు ప్రశ్నలు ఉపయోగించవలెను. 5. అనేక రకాలనైన ప్రత్యుత్తర గర్భిత ప్రశ్నలు వేయరాదు 6. బహుమతులు గానీ మరి ఏ ఇతర రకమైన ప్రోత్సాహకాలు గానీ ప్రశ్నావళి నింపేవారికి ఇస్తామని చెప్పరాదు. 7. ప్రశ్నావళి సంక్షిప్తంగా, సమగ్రంగా, చూడ ముచ్చటగా ఉండవలెను. 8. పూర్తి నిర్వచనాలు కావలసిన సాంకేతిక పదాలను వాడరాదు. 9. ప్రశ్నలకిచ్చే సమాధానాలు సులభంగా పట్టీ కరణ చేయడానికి వీలుగా ఉండవలె 10. ప్రశ్నలు స్పష్టంగా ఉండవలెను. 11. సందిగ్ధ ప్రశ్నలు వేయరాదు. 12. ప్రశ్నలు సులభంగా బోధపడేటట్లు ఉండవలెను. ప్రజలు ప్రశ్నావళి నింపడానికి ఎక్కువకాలము వృధాపరచడానకి ఒప్పుకోరు. అందువల్ల ప్రశ్నావళి చిన్నదిగాను, స్పష్టంగాను, క్లుప్తంగాను ఉండవలెను. దీర్ఘ ప్రశ్నలు చిక్కు ప్రశ్నలు ప్రశ్నావళిని నింపేవారిని చికాకు కలిగిస్తాయి. వారు సమాధానాలు ఇవ్వకపోవచ్చును లేదా అజాగ్రత్త సమాధానాలు ఇవ్వవచ్చు. 13. ప్రశ్నలు తక్కువగా ఉండవలెను. అట్లాగని దత్తాంశ సేకరణను భంగపరచరాదు. అట్లాగే ఎక్కువ ప్రశ్నలు వేసి జవాబులిచ్చే వారి ఓర్పును పరీక్షించరాదు. 14. జవాబులిచ్చేవారి వ్యక్తిగత భోగట్టాలు రహస్యపుభోగట్టాలు అడగరాదు. 15. ప్రశ్నలకు సమాధానాలు సూటిగా ఇవ్వగలిగేటట్లు ప్రశ్నలు వేయవలెను. వ్యక్తిగత అభిప్రాయాలకు తావిచ్చే ప్రశ్నలు వేయరాదు 16. ప్రశ్నలను క్రమపద్ధతిలో హేతుబద్ధంగా అమర్చవలెను. 17. ప్రశ్నలకిచ్చే సమాధానాలను సన్నిహితం చేసి సత్యాన్ని నిరూపించే విధంగా ప్రశ్నలు తయారు చేయవలెను. 18. జవాబులిచ్చేవారి సహకారాన్ని అర్థించవలెను. 19. ప్రశ్నావళిని నింపే విధానాన్ని కూడా సూచించవలెను. 20. జవాబులివ్వడానికి ప్రత్యేక శిక్షణ కావలసిన అవసరమును కల్పించరాదు.

ప్రభుత్వం కాని, ఒక వ్యాపార సంస్థకాని, ఒక ప్రయివేటు వ్యక్తి కాని, లోగడ సేకరించి విశ్లేషించిన దత్తాంశాన్ని గణాంక విచారణలో ఉపయోగిస్తే దానిని ద్వితీయ దత్తాంశ మంటారు. ఉదాహరణకు ప్రభుత్వము, ప్రజలలో స్త్రీ పురుష భేదము, వయస్సు, అక్షరాస్యత, వృత్తి మొదలైన విషయాలమీద దత్తాంశాన్ని సేకరిస్తుంది. ఇటువంటి విచారణను జనాభా దర్యాప్తు విచారణ అంటాము. సేకరించిన దత్తాంశాన్ని విశ్లేషించి ప్రభుత్వము ఫలితాలను ప్రచురణ చేస్తుంది. ప్రభుత్వం దృష్ట్యా ఈ దత్తాంశము ప్రధాన దత్తాంశమే. కాని ఒక సాంఘిక పరిశోధకుడు ఈ దత్తాంశాన్ని ఒక సమస్యను అధ్యయనం చేయడానికి ఉపయోగిస్తే ఈ దత్తాంశమే ద్వితీయ దత్తాంశమనిపించుకొంటుంది. ద్వితీయ దత్తాంశము పలుతావులనుంచి సేకరించవచ్చు. 1. కేంద్ర ప్రభుత్వము రాష్ట్ర ప్రభుత్వము, స్థానిక ప్రభుత్వ ప్రచురణలు 2. ప్రభుత్వము నియమించిన కమీషన్ల రిపోర్టులు. 3. కొన్ని సంస్థలు నియమించిన కమీషన్ల రిపోర్టులు ఉదాహరణకు రిజర్వు బ్యాంకు నియమించిన సెంట్రల్ బాంకింగ్ ఎంక్వయిరీ కమిటీ 4. విదేశ ప్రభుత్వ ప్రచురణలు అంతర్జాతీయ సంస్థల ప్రచురణలు ఉదాహరణకు మొదలైన వాటి ప్రచురణలు 5. వాణిజ్య సంస్థలు, కార్మిక సంఘాలు, కంపెనీలు, షేరు మార్కెట్టుల ప్రచురణలు, రిపోర్టులు 6. ఆర్థిక విషయాలను గురించి ఉన్న ప్రచురణలు ఉదాహరణ మొదలైన ఎకనామిక్ టైమ్స్ భారతదేశపు పత్రికలు 7. దిన పత్రికలు, మాస పత్రికలు 8. సాంఘిక పరిశోధకుల ప్రచురణలు, సాంఘిక సంస్థల ప్రచురణలు. విశ్వవిద్యాలయ ప్రచురణలు.

ద్వితీయ దత్తాంశాన్ని వాడుటకును కొన్ని జాగ్రత్తలు తీసుకోవలెను. గణాంక పరిశోధకుడు దత్తాంశాన్ని పూర్తిగా పరీక్షించవలెను. మూలదత్తాంశము సేకరించిన వ్యక్తి నమ్మదగిన వాడా, కాడా, అతనికి సత్యాలను సేకరించే శక్తి ఉన్నదా, లేదా అని యోచించవలెను. తరువాత ఈ క్రింది విషయాలను గమనించవలెను. 1. అసలు దత్తాంశాన్ని సేకరించటంలో ఉద్దేశము. 2. ప్రస్తుత గణాంకవిచారణ పరిధి 3. గణాంకాలు సేకరించిన తావులు. 4. దత్తాంశసేకరణలో సేకరించిన పద్ధతి 5. అసలు దత్తాంశంలో సాధించిన కచ్చితము ఈ విషయాలపై గణాంకశోధకుడు పరీక్షచేస్తే అసలు దత్తాంశాన్ని ప్రస్తుత గణాంకవిచారణలో ఎంతవరకు ఉపయోగపడుతుందన్న విషయము తెలుస్తుంది.

12.7 ప్రతిచయనము :

గణాంకపద్ధతుల ద్వారా విషయాలను తెలుసుకోవడానికి, జ్ఞానాన్ని సంపాదించడానికి గణాంకవిచారణలు చేస్తారు. గణాంకశోధన మొత్తం వర్గాన్ని జనాభా అంటారు. ఒక వర్గంలో నుంచి సేకరించిన కొన్ని అంశాలను ప్రతిచయనాలు అంటారు. గణాంకవిచారణలో దత్తాంశాన్ని జనాభా దర్యాప్తు పద్ధతి ద్వారా సేకరిస్తే ఒక వర్గానికి సంబంధించిన అన్ని విషయాలు పూర్తిగా తెలుస్తాయి. ఈ పద్ధతివల్ల ప్రయోజనాలే 1. విచారణఫలితాలు సంపూర్ణగా ఉంటాయి 2. వ్యక్తి గత సాక్షికానికి తావు తక్కువ. 3. ఇందులో చేసిన నిర్ణయాలకు సంపూర్ణతవల్ల వచ్చే బలం చేకూరుతుంది కాని ఈ పద్ధతిలో కొన్ని లోపాలు కూడా ఉన్నాయి.1. దత్తాంశాన్ని సేకరించడానికి ఎక్కువ కాలం పడుతుంది 2. దత్తాంశాన్ని సేకరించడంలో అనేక కష్టాలకు గురిఅవుతాము 3. దత్తాంశాన్ని సేకరించడానికి హెచ్చు ఖర్చు అవుతుంది. పై మూడు లోపాల వల్ల దత్తాంశసేకరణలో దోషాలు వచ్చే అవకాశం ఉంది. 4. ఇందులో అనేక మంది వ్యక్తుల సేవలను పొందవలెను. 5. ఈ పద్ధతి అన్ని వేళల సాధ్యపడదు. 6. దత్తాంశసేరణకు తర్ఫీదు పొందిన గణకులు లభ్యము కావడం కష్టము. జనాభా దర్యాప్తు పద్ధతిలో అనేక లోపాలు, కష్టాలు, ఉండడంవల్ల ప్రతిచయన విచారణ పద్ధతి అవలంబిస్తున్నారు.

12.7.1 మంచి ప్రతిచయనానికి ఉండవలసిన లక్షణాలివి:

1. మొత్తం జనాభాలో గల అన్ని అంశాలు స్వతంత్ర్యంగా ఉండి, ప్రతి అంశము ప్రతిచయనంగా తీసుకొనే అవకాశం ఉండవలెను. 2. ప్రతిచయనము మొత్తం జనాభాకు ప్రాతినిధ్యము వహించవలెను. ప్రతిచయనము జనాభాలో ఒక భాగానికే ప్రాతినిధ్యము వహిస్తే చాలదు. 3. ప్రతిచయనం వ్యక్తిగత పక్షపాతానికి తావివ్వకూడదు. 4. సులభంగా సేకరించడానికి వీలయ్యే అంశాలనే ప్రతిచయనాలుగా తీసుకోకూడదు. అట్లా తీసుకొనే ముందు వాటి గుణగణాలను కూడా తెలుసుకోవలెను. 5. ఎక్కువ ప్రతిచయనాలు తీసుకొంటే ఫలితాలలో ఖచ్చితత్వము హెచ్చుగా ఉంటుందన్న విషయము అందరికీ తెలిసిందే.

12.7.2 ప్రతిచయన విచారణ వల్ల అనేక ప్రయోజనాలున్నాయి:

1. దత్తాంశము తక్కువ వ్యవధిలో, తక్కువ శ్రమతో సేకరించడానికి వీలున్నది. 2. ఈ విచారణలో ఖర్చుకూడ తక్కువ. దీనిలో కూడ కోరిక మేరకు ఖచ్చితంగా ఫలితాలు వస్తాయి. 3. ఇందులో ఫలితాలు జనాభా దర్యాప్తు విచారణ పద్ధతి ఫలితాలకంటె సాధారణంగా మెరుగ్గా ఉంటాయి. 4. దత్తాంశ సేకరణ కొద్దిమంది గణకులతో జరుపవచ్చు. 4. గణాంక శోధనా నిర్వహణ శాస్త్రీయ పద్ధతులలో జరుగుతుంది.

12.8. ప్రతిచయన పద్ధతులు

12.8.1 యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనము :

యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనాన్ని అదృష్టపు ప్రతిచయనము అని, సంభావ్యతా ప్రతిచయనము అని కూడా అంటారు. జనాభాలోని ప్రతి అంశానికి ప్రతిచయనంగా ఎన్నుకోబడేందుకు సమాన అవకాశమిస్తూ యాదృచ్ఛికంగా ఎన్నుకొన్న ప్రతిచయనాన్ని యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయన మంటారు. ఈ పద్ధతిలో జనాభాలోని ప్రతి అంశానికి ప్రతిచయనమయ్యే అవకాశము మాత్రం ఉంటుంది. ప్రతిచయనము మొత్తం జనాభాకు ప్రతినిధి. ప్రతిచయనాన్ని యాదృచ్ఛికంగా ఎన్నుకొన్నట్లయితే, ప్రతిచయన పరిమాణం సరిపడినంత పెద్దదిగా ఉన్నట్లయితే అట్టి ప్రతిచయనము జనాభాలోని అన్ని అంశాలకు ప్రాతినిధ్యం వహిస్తుంది. అందువల్లే యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనాన్ని ప్రాతినిధ్య ప్రతిచయనము అని కూడా కొన్నిసార్లు పిలుస్తారు.

12.9 యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనాన్ని ఎన్నుకొనే పద్ధతులు:

యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనాన్ని లాటరీ పద్ధతి ద్వారా గాని, యాదృచ్ఛిక సంఖ్యల పట్టీల ద్వారా గాని ఎన్నుకొంటారు.

12.9.1 లాటరీ పద్ధతి :

ఇది ఎక్కువ ప్రచారంలో ఉన్న పద్ధతి. అదృష్టపు బహుమతుల విజేతలను ఈ పద్ధతి ద్వారానే ఎన్నుకొనటం మనం చూస్తున్నాము కదా. ఈ పద్ధతిలో జనాభాలోని అన్ని అంశాల నంబర్లుగాని, పేర్లుగాని చిన్న చిన్న కాగితపు చిట్టీలు మీదగాని లేదా చిన్నచిన్న అట్టముక్కలు మీదగాని వ్రాస్తారు. కాగితపు చిట్టీలు అయితే వాటిని మడవవలెను. తరువాత వాటిని ఒక డబ్బాలో వేసి

బాగా కలపవలెను. వీటిని ఎప్పటికప్పుడు బాగా కలుపుతూ, ప్రతిచయన పరిమాణానికి కావలసినన్ని చిట్టీలను లేదా కార్డులను కళ్ళకు గంతలు కట్టిన వ్యక్తిచేత తీయించవలెను. బయటకు తీసిన చిట్టీలలోని అంశాలు ప్రతిచయనాలు.

12.9.2 యాదృచ్ఛిక సంఖ్యా పట్టీలు :

జనాభా ఎక్కువగా ఉండే విచారణలలో లాటరీ పద్ధతి క్రమతో కూడినట్టిది అట్లాంటప్పుడు యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనాన్ని ఎన్నుకోవడానికి ప్రత్యామ్నాయపద్ధతి యాదృచ్ఛిక సంఖ్యల పట్టీ. ఇందులో 1. టిప్పెట్ అనే గ్రంథకర్త తయారుచేసిన యాదృచ్ఛిక సంఖ్యల పట్టీ 2. ఫిషర్, యేట్స్ సంఖ్యలు 3. కెండాల్, బాబింగ్‌టన్ సంఖ్యలు 4. ర్యాండ్ కార్పొరేషన్ సంఖ్యలు మొదలైనవి ఉన్నాయి. వీటిలీ టిప్పెట్ సంఖ్యలు బాగా ప్రచారంలో ఉన్నాయి. టిప్పెట్ జనాభా లెక్కల నివేదికల నుండి తీసుకొన్న 41,600 అంకెలు ను 10,400 నాలుగంకెల సంఖ్యలు చేసి పట్టీ తయారుచేసినాడు. ఈ క్రింద మొదటి 40 అంశాలను ఉదాహరనకు ఇచ్చినాము.

952	664	392	992	769	591	317	562
167	952	155	196	703	535	130	269
370	748	048	262	363	108	691	769
560	524	112	607	608	812	423	877
754	914	145	925	702	611	881	644

ఈ సంఖ్యలు అస్తవ్యస్తంగా ఉన్నట్లు కనిపించినా, వాటి యాదృచ్ఛికత అనేక పరీక్షలద్వారాను, ఆచరణ రూపంలోను నిరూపించబడింది. ఈ పట్టీని ఉపోయోగించే పద్ధతిని ఉదాహరణ పూర్వకంగా తెలుసుకొందాము. లోగడ ఉదాహరణలోని 300 మంది విద్యార్థులలో 30 మందిని ఎన్నుకొనుటకు మొదట ఈ అంశాలకు 001 నుంచి 300 మంది వరకు నంబర్లు వ్రాయవలెను. తర్వాత టిప్పెట్ పట్టీలోని ఏదో ఒక పేజీచూచి అందులో 300 కు లోపున్న సంఖ్యలనుండి 30 సంఖ్యలు తీసుకోవలె. ఈ సంఖ్యలే ప్రతిచయనాలు.

12.9.3 యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయన పద్ధతివల్ల ప్రయోజనాలు :

1. వ్యక్తి గత పాక్షికతకు తావులేదు. 2. యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనం మొత్తం జనాభాకు మంచి ప్రాతినిధ్యం వహిస్తుంది 3. గణాంకశోధకుడు తన అంచనాలో గల యథార్థత నిర్ణయించుకోగల్గుతాడు. ఎందుకంటే ప్రతిచయన దోషాలు అవకాశ సూత్రాల మీద ఆధారడి ఉంటాయి.

12.10 స్థిరిత యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనము:

ఈ పద్ధతిలో మొత్తం జనాభాకు ఏదో ఒక లక్షణం లేదా లక్షణాల ఆధారంగా కొన్ని వర్గాలుగా లేదా గుంపులుగా విభజిస్తారు. అంటే విజాతీయంగా ఉన్న జనాభాను సాధ్యమైనంత సజాతీయ వర్గాలుగా విభజించవలెను. ఒక్కొక్క వర్గం లోని అంశాల మధ్య సాధ్యమైనంత సజాతీయత (సమానపోలికలు) ఉండేటట్లు, వర్గాల మధ్య సాధ్యమైనంత వ్యత్యాస ముండేటట్లు విభజించడంవల్ల జనాభా మొత్తం అనేక వర్గాల కింద విడిపోతుంది. తర్వాత ప్రతి వర్గం నుండి యాదృచ్ఛిక పద్ధతిని ప్రతిచయనాన్ని ఎన్నుకొంటారు. సాంఘిక, ఆర్థిక విచారణలలో ఈ పద్ధతిని విరివిగా ఉపయోగిస్తారు. ఏక పక్ష సంభవనీయత తగ్గడం వల్ల, ఒక నిర్ణీత పరిమాణం గల ప్రతిచయనాలను తీసుకోదలిస్తే, స్వచ్ఛమైన యాదృచ్ఛిక పద్ధతి కంటే స్థరిత యాదృచ్ఛిక పద్ధతి మెరుగయింది. ఈ పద్ధతి ద్వారా సేకరించిన దత్తాంశంలో ఖచ్చితత్వం ఎక్కువగా ఉంటుంది.

12.11 గుచ్ఛ యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనము :

ఈ పద్ధతిలో కూడా స్థరిత ప్రతిచయనంలోవలె, జనాభాను కొన్ని గుంపులుగా లేదా గుచ్ఛాలుగా విభజిస్తారు. స్థరిత ప్రతిచయనములో, ప్రతి గుచ్ఛంలో ఒకే పోలికలు ఉన్న అంశాలనుచేర్చి విభజిస్తే, గుచ్ఛ ప్రతిచయనములో, ప్రతి గుచ్ఛంలోను సాధ్యమైనంత విజాతీయత ఉండేటట్లు వర్గీకరిస్తారు. అంటే ప్రతిగుచ్ఛంలోను జనాభాలోని అన్ని లక్షణాలు సాధ్యమైనంత వరకు ఉండవలెను. గుచ్ఛాల మధ్య వ్యత్యాసం సాధ్యమైనంత తక్కువగా ఉండవలెను. అప్పుడు గుచ్ఛాలన్నీ దాదాపు ఒకేవిధంగా ఉంటాయి. తరువాత ఈ గుచ్ఛాలలో ఒకటిగాని, లేదా కొన్నిగాని యాదృచ్ఛిక పద్ధతిన ప్రతిచయనంగా తీసుకొని అధ్యయనం చేస్తారు. ఈ

పద్ధతిలో ఉన్న ముఖ్యమైన లాభము ఖర్చుతక్కువ. కాని ఇందలి ప్రధానమైన లోపము ఖచ్ఛితత్వము తక్కువ.

12.12 క్రమ ప్రతిచయనము:

ఇది పరిమిత యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనము. ఎన్నుకోవడానికి సులభ పద్ధతి. ప్రతిచయనం ఎన్నుకొనే జనాభా మొత్తం జాబితా లభ్యమయ్యే సందర్భాలలో ఈ పద్ధతి ఉపయోగకారి. పై రెండు పద్ధతుల్లో జనాభా వర్గాలకింద విభజించినట్లుగా గాక, ఈ పద్ధతిలో జానాభాను ఒకక్రమ పద్ధతిలో అంటే అకారాది క్రమంలోగాక, బౌగోళిక క్రమంలోగాని లేదా మరో క్రమపద్ధతిలోగాని అమర్చవలెను.

$$\text{ప్రతిచయనాల మధ్య అంతరము} = \frac{\text{జనాభా పరిమాణము}}{\text{ప్రతిచయన పరిమాణము}}$$

తరువాత, ప్రతిచయనాన్ని తీయడం ఎక్కడనుంచి మొదలు పెట్టవలె అనే విషయాన్ని యాదృచ్ఛిక పద్ధతి ప్రకారం తెలుసుకోవలెను. తరవాత ఏ అంశాలు ప్రతిచయనాలలో తెలిసిపోతుంది. ఉదా: ఒక కాలేజీలోని 100 మంది వాణిజ్య శాస్త్ర విద్యార్థులలో 10 మందిని ఎన్నుకోవాలనుకుందాము. మొదటి వారిపేర్ల అక్షరాది క్రమంలోగాని, లేదా తరగతి క్రమసంఖ్య క్రమంలోగాని మొత్తం 100 మంది జాబితాను తయారుచేయవలెను. మొత్తం జనాభా 100. ప్రతిచయనం 10 కాబట్టి ప్రతిచయనాల మధ్యదూరము 10 (100/10) అంటే ప్రతిపదో విద్యార్థికి ప్రతిచయనంలో చేరే అవకాశముంది. ఇప్పుడు ప్రతిచయనపు ఎన్నిక ఎక్కడనుంచి మొదలు పెట్టలి అనేది నిర్ణయించాలి. ప్రతిచయనాల మధ్య అంతరము 10 కాబట్టి మొదటి 10 లోపల ఎక్కడైనా ప్రారంభించవచ్చు. కాని అది యాదృచ్ఛిక పద్ధతిపై జరగాలి. లాటరీ వేస్తే 6వ విద్యార్థి వచ్చాడనుకొందాము. ఇప్పటినుంచి ఏ ఏ విద్యార్థులు ఎన్నుకోబడ్డారో తెలిసిపోతుంది. అంటే 6, 16, 26, 36, 46, 56, 66, 76, 86, 96,. విద్యార్థులు ప్రతిచయనాలు.

12.13. అయాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనము :

ఈ పద్ధతి చాలా సులభమైనది, తేలికైనది. ఫలితాలుకూడా సాధారణంగా, ఎక్కువ ఖచ్చితంగానే ఉంటాయి. దత్తాంశాన్ని క్రమ పద్ధతిలో అమర్చేటప్పుడు జాగ్రత్త తీసుకొంటే స్థిరిత యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనపు ప్రయోజనాలను కూడా పొందవచ్చు. కాని క్రమ పద్ధతిలో అమర్చేటప్పుడు చాలా జాగ్రత్తగాను, నిష్పాక్షికంగాను ఉండవలెను. లేకుంటే వ్యక్తిగత పాక్షికతకు, అవిశ్వసనీయ ఫలితాలకు అవకాశ మేర్పడుతుంది. ప్రతి చయనాన్ని యాదృచ్ఛికంగా లేదా అదృష్టపు ఎన్నిక ద్వారా కాకుండా, శోధకుడే ప్రతిచయనాన్ని ఎంచుకోవడం గురించి తెలుసుకొందాము. ఇందులో యాదృచ్ఛికత లేదు కాబట్టి అయాదృచ్ఛిక ప్రతిచయన మంటారు. ఈ పద్ధతిని ఉద్దేశ పూర్వక ప్రతిచయనము అని బుద్ధిపూర్వక ప్రతిచయనము అని నిర్ణయ ప్రతిచయనము అని కూడా అంటారు. ఈ పదాలన్నీ కావాలని లేదా బుద్ధిపూర్వకంగా కోరుకొని ప్రతిచయనాన్ని ఎన్ను కొంటారు, అని స్ఫురింపజేస్తున్నాయి గదా! ఈ పద్ధతిలో విచారణలోని అంశాలకు ప్రాతినిధ్యం వహిస్తాయి అని నిర్ణయించిన అంశాలను గణాంక శోధకుడు ఎంచుకొంటాడు. ఇందులో ప్రతిచయనాల ఎంపిక మూడు విధాలుగా జరగవచ్చు. అని 1. నిర్ణయ ప్రతిచయనము. 2. కోటా ప్రతిచయనము, 3. సౌలభ్య ప్రతిచయనము.

12.13.

12.13.1. నిర్ణయ ప్రతియనము : బాగా తెలిసిఉన్న ప్రతి చయనాలను అవి జనాభాలోని అంశాలకు ప్రాతినిధ్యం వహిస్తాయో లేదా అని, విచారణ ఉద్దేశానికి, అనుకొన్న అంశాలను ప్రతిచయనంగా శోధకుడు ఎంచుకొంటాడు.

12.13.2. కోటా ప్రతిచయనము: ఈ పద్ధతి మౌలికంగా స్థిరిత అయాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనము. ఇందులో ప్రతిశోధకుడు సేకరించవలసిన ప్రతిచయనము మొత్తం కోటాను కొన్ని లక్షణాల ఆధారంగా జనాభాను కొన్ని వర్గాలుగా విభజించి ఒక్కొక్క వర్గంలో ఎన్ని అంశాలనుంచి సమాచారము సేకరించ వలెనో ఉపకోటాలను నిర్ణయిస్తారు. ఈ ఉపకోటాలు వెరశి, మొత్తం కోటాకు సమానము. అంటే ప్రతి గణాంకశోధకుడు ఒక్కొక్క వర్గం నుంచి కోటాప్రకారం కొన్ని అంశాలను ఎన్నుకొంటూ తనకు నిర్ణయించిన మొత్తం కోటా పూర్తి చేయవలసి ఉంటుంది.

12.13.3. సౌలభ్య ప్రతిచయనము : ఈ పద్ధతిలో, శోధకుడు, అతనికి వీలుగా, సౌలభ్యంగా ఉన్న అంశాలను ప్రతిచయనాలుగా తీసుకొని సమాచారాన్ని సేకరిస్తాడు. కాని ఇది అంతమంచి పద్ధతి కాదు.

12.13 అయాదృచ్ఛిక ప్రతిచయన పద్ధతిలోని లాభాలు:

జనాభాలోని కొద్ది అంశాలను మాత్రమే ప్రతిచయనంగా తీసుకొనేటప్పుడు యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయన పద్ధతిలో కొన్ని ముఖ్యమైన అంశాలు ప్రతిచయనంలో చేరకపోవచ్చు. కాని ఈ పద్ధతిలో ప్రాముఖ్యమున్న అన్ని అంశాలను ప్రతిచయనంలో చేరకపోవచ్చు. కాని ఈ పద్ధతిలో ప్రాముఖ్యమున్న అన్ని అంశాలను నిర్ణయించి ప్రతిచయనాన్ని ఎన్నుకోవచ్చు. ఈ పద్ధతిలో ఖర్చు కావలసిన సమయము తక్కువ. కాని ఈ పద్ధతిలో ప్రతిచయనపు ఎన్నికలో అనేక లోపాలున్నాయి.

12.14 సారాంశము :

ఈ పాఠంలో వివిధ దత్తాంశసేకరణ పద్ధతులు, దత్తాంశసేకరణలో ప్రతిచయనము యొక్క ఆవశ్యకతను తెలుసుకొన్నాము. ఖర్చు, కాలవ్యవధి, భౌతిక సాధ్యాసాధ్యాలను పరిగణనలోనికి తీసుకొని, ప్రతిచయన పద్ధతిని ఎన్నుకుంటాము. సరళ యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనము వాస్తవ పరిశీలనలో సులభంగానే ఉంటుంది. కాని ఎక్కువ ప్రతిచయనములు తీసుకున్నపుడే చాలా కష్టముగా ఉంటుంది. ప్రతి అంశానికి ఎన్నుకొబడేందుకు సమాన అవకాశము ఉంటుంది. క్రమ ప్రతిచయన పద్ధతిలో యాదృచ్ఛిక ప్రారంభ సూచికతో మొదలుపెట్టిన మిగిలిన అంశములన్నియు క్రమపద్ధతిలో రావటం వలన ఒకే మాదిరి ప్రతిచయనము పొందగలము. ఆర్థిక దత్తాంశసేకరణలో వివిధ వర్గాల వర్గీకరణ జరిగినపుడు జనాభాను సాధ్యమైనంత వరకు సజాతీయ వర్గాలుగా విభజించవలెను. ఈ పద్ధతి ద్వారా సేకరించిన దత్తాంశములో ఖచ్చితత్వము ఎక్కువగా ఉంటుంది. గుచ్ఛ యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనములో ప్రతి గుచ్ఛములోను అన్ని లక్షణాలు ఉంటాయి. ఈ పద్ధతి ముఖ్యమైన ఖర్చు తక్కువ మరియు ఖచ్చితత్వము తక్కువగానే ఉంటుంది. అంతేకాకుండా ఈ పాఠంలో యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనముతో పాటు అయాదృచ్ఛిక ప్రతిచయన పద్ధతులు కూడా తెలుసుకొన్నాము.

12.15 స్వయం అధ్యయన ప్రశ్నలు:

1. అసెంబ్లీ ఎన్నికలప్పుడు ఓటరు మనోగతమును తెలుసుకొనుటకు ఎటువంటి ప్రశ్నావళిని కోరుకుంటాడు. వివరించండి.
2. ప్రతిచయన పద్ధతుల ఉపయోగములను సోదాహరణముగా వివరించండి.

12.16 చదువవలసిన పుస్తకాలు:

1. Fundamentals of Mathematical Statistics : S.C. Gupta, V.K. Kapoor, Publishers s. Chand & Co.
2. Basic Statistics : B.L. Agarwal, Third Edition, New Age International (p) Ltd.

పాఠం 13

సూచీ సంఖ్యలు

ఈ పాఠ్యభాగం చదివిన తరువాత మీరు ఈ క్రింది అంశాలను తెలుసుకోగలరు.

* సూచీ సంఖ్యలు వాటి భావన
* సూచీ సంఖ్యలు నిర్మాణ పద్ధతులు
* సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో ఎదురయ్యే సమస్యలు
* భారత దేశంలో నిర్మించే పలు సూచీ సంఖ్యలు వాటి ఉపయోగాలు
* ఫిషర్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్య
* ఒక ఆదర్శ సూచీ సంఖ్యకు ఉండవలసిన లక్షణాలు

పాఠ్య నిర్మాణ క్రమం

ఉద్దేశం: కేంద్ర ప్రభుత్వం ఆరునెలలకోసారి ప్రభుత్వ ఉద్యోగుల కరువు భత్యంను వినియోగదారుల సూచీ సంఖ్యలననుసరించి పెంచుతూ ఉంటుంది. ఈ వినియోగదారుల సూచీ ఏమిటి? దేనిని తెలియజేస్తుంది? అసలు సూచీ సంఖ్య అంటే ఏమిటి? వాటి నిర్మాణంలో ఎదురయ్యే సమస్యలు, వాటికి తీసుకోవలసిన జాగ్రత్తలు మొదలగు వాటిని గురించి తెలుసుకోవటం ఈ భాగం ముఖ్య ఉద్దేశం.

13.1 పరిచయం:

వస్తువుల ధరలు, పరిమాణం, విలువలు తరుచూ మారుతుంటాయి. వస్తు సముదాయంలో వచ్చే మార్పును కొలిచే ఒక రకమైన సాధనమే సూచీ సంఖ్య. అనగా ఇది మార్పును కొలిచే ఒక కొలత, ఒక సూచీ. అనగా సూచీ సంఖ్యలు వస్తువుల ధరలు కాని, పరిమాణంలో కాని లేక వ్యక్తుల ఆదాయం, వ్యయంలో కాని కాలానుగుణంగా కాని లేక భౌగోళికంగా కాని వచ్చిన మార్పును తులనాత్మకంగా కొలవటానికి ఉపయోగపడే ఒక పరికరం (*Device*). ఈ తులనాత్మక పరిశీలన రెండు కాలల మధ్య కాని, రెండు ప్రాంతాల మధ్య కాని జరుపుతాం. వస్తువు ధరలలోని మార్పులు తెలుసుకోటానికి ఉపయోగించే సూచీ సంఖ్యలను ధరల సూచీ సంఖ్యలు (*Price Index Numbers*) అంటారు. వస్తువు పరిమాణంలో వచ్చిన మార్పులను తెలుసుకోవటానికి ఉపయోగించే సూచీ సంఖ్యను పరిమాణ సూచీ సంఖ్యలు (*Quantity Index Numbers*) అంటారు. అలాగే వస్తువుల టోకు ధరలో వచ్చిన మార్పును తెలియజేసే సూచీ సంఖ్యను టోకు ధరల సూచీ సంఖ్యని, ఇలా వివిధ చలరాశులకు, వివిధ ప్రాంతాలకు, వివిధ వర్గాల ప్రజలకు వాటి ఉద్దేశాలననుసరించి పలు రకాలైన సూచీ సంఖ్యలు నిర్మిస్తారు.

సామాన్యంగా ధరల సూచీ సంఖ్యలు ఎక్కువగా ఉపయోగిస్తాం అందుకని ఈ భాగంలో ధరల సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణం పద్ధతులు, వాటిలో ఎదురయ్యే సమస్యలు మొ॥ వాటికి కొంచెము ఎక్కువ ప్రాముఖ్యత ఇవ్వబడింది. ప్రస్తుత సమయంలోని పరిస్థితి, మరొక సమయంలో పరిస్థితిలో పోల్చేటపుడు, ఆ మరొక సమయాన్ని ఆధార సమయం అంటాం. ఆ ఆధార సమయంలో విలువలను ఎల్లప్పుడు 100 గా తీసుకుంటాం. ప్రస్తుత సమయంలో విలువను ఆధార సమయంలో విలువలో శాతంగా తెలియజేస్తాం.

ఉదాహరణకు ఒక నిర్ణీత కాలంలో వస్తువు ధర P_1 అయితే, ఆదార సమయంలో అదే వస్తువు ధర P_0 అనుకుంటే $\frac{P_1}{P_0}$ ని సాపేక్ష ధర (*Price Relatives*) అంటారు. దీనిని 100 హెచ్చించి శాతంగా చెపుతాము. ఈ సాపేక్ష ధరని సంబందిత సూచీ సంఖ్యగా నిర్వచిస్తాం.

ఆధార సమయం, వస్తువుల ధరలు, పరిమాణం, నిర్మాణ పద్ధతులు సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో ప్రాముఖ్యత వహిస్తాయని పై తీసుకున్న విషయాలు తెలుపుతున్నాయి. కావున ఆధారాన్ని ఎంపికలో వివిధ పద్ధతులు 13.2 విభాగంలో, 13.3 విభాగాలలో సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణ పద్ధతులు, సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో తీసుకోవాల్సి జాగ్రత్తలు (5) సంఖ్యల గురించి, (6)వ విభాగంలోనూ చర్చించటం జరిగింది. అలాగే ఆదర్శ సూచీ సంఖ్య అంటే ఏమిటి? దానికి ఉండవల్సిన లక్షణాలు, చేయవల్సిన విపర్యయ పరీక్షలను గురించి విభాగం (7)లో ఇవ్వటం జరిగింది.

13.2 ఆధారాన్ని ఎంపిక చేయుటం:

సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో 'ఆధార సమయం' లేక 'ఆధార సంవత్సరం' ఎంపిక చాలా ప్రాముఖ్యమైనది. ఎంచుకోబోయే ఆధార సమయం ఎటువంటి వైపరీత్యాలకు లోను కానిదై ఉండాలి. ఉదాహరణకు ధరల సూచీ సంఖ్య నిర్మిస్తున్నప్పుడు ఆధార సంవత్సరంలో యుద్ధాలు, కరువు, భూకంపాలు, వరదలు, ఆర్థిక మాంద్యం మొ॥వి సంభవించిన ఎడల వాటి ప్రభావం ధరల పై పడి సూచీ సంఖ్య వాస్తవానికి దూరమై నిరుపయోగమౌతుంది. కాబట్టి ఆధారంగా ఎంపిక చేసే సమయం అన్ని విషయాలలోనూ ఎటువంటి ఒడిదుడుగులు లేని సామాన్య సమయం అయివుండాలి.

ఆధార సమయాన్ని, ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన మూడు పద్ధతులలో ఎంపిక చేయవచ్చు.

1. స్థిర ఆధార పద్ధతి (*Fixed Base Method*)
2. గొలుసు ఆధార పద్ధతి (*Chain Base Method*)

3. సగటు ఆధార పద్ధతి (*Average Base Method*)

13.2.1 స్థిర ఆధార పద్ధతి

ఈ పద్ధతిలో ఒక సంవత్సరాన్ని ఆధార సంవత్సరంగా నిర్ణయించి ఆ ఆధార సం॥లో ధరలు కాని, పరిమాణాలు కాని, విలువలు గాని 100 గా నిర్ణయిస్తాం. మిగిలిన సం॥లలోని సూచీ సంఖ్యలను ఈ క్రింది సూత్రాన్ని ఉపయోగించి కనుక్కుంటాం (ధరల సూచీ సంఖ్యలు ఎక్కువగా అమలులో ఉంటాయి కాబట్టి ధరల సూచీ సంఖ్య సూత్రాన్ని యివ్వటం జరిగింది.)

$$\text{ధరల సూచీ సంఖ్య} = \frac{\text{ప్రస్తుత సం॥లో ధర}}{\text{ఆధార సం॥లో ధర}} \text{x } 100$$

స్థిర ఆధార పద్ధతినుపయోగించి, సాధారన, సంయుక్త సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణం ఉదాహరణ ద్వారా నేర్చుకుందాం.

1. **సాదారణ (సరళ) సూచీ సంఖ్య** (*Simple Index Number*) ఈ క్రింది పట్టితలో ఒక వస్తువు (ఉదా . బియ్యం) ధరలు 1990 సం॥ నుంచి 1995 వ సం॥ వరకు ఇవ్వబడినవి. 1990 సం॥ను ఆధార సం॥గా ఎంచుకొని సాధారణ సూచీ సంఖ్యలు నిర్మించటం తెలుసుకుందాం.

సంవత్సరం	నస్తువు ధర రూ॥లలో	సూచీ సంఖ్య 1990 అధార సం॥గా
1990 (ఆధార సం॥)	50	$\frac{50}{50}\times 100 = 100$
1991	48	$\frac{48}{50}\times 100 = 96$
1992	61	$\frac{61}{50}\times 100 = 112$
1993	55	$\frac{55}{50}\times 100 = 110$
1994	65	$\frac{65}{50}\times 100 = 130$
1995	74	$\frac{74}{50}\times 100 = 148$

2. **సంయుక్త సూచీ సంఖ్య** (*Complex Index Number*)వస్తువుల సంఖ్య (*Number*) రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ వున్నప్పుడు నిర్మించే సూచీ సంఖ్యను 'సంయుక్త సూచీ సంఖ్య' అంటాం. సంయుక్త సూచీ సంఖ్యలను ఎలా నిర్మించాలో ఈ క్రింది ఉదాహరణ ద్వారా తెలుసుకొందాం.

ఈ క్రింది పట్టికలో రెండు వస్తువుల (వస్తువు నెం 1, వస్తువు నెం 2) ధరలు 1990 సం॥ నుండి 1995 సం॥ వరకు ఇవ్వబడినాయి. ధరలు 1990 సం॥ ఆధార సం॥గా సంయుక్త సూచీ సంఖ్యలు నిర్మిద్దాం.

సంవత్సరం	వస్తువు నెం-1	వస్తువు నెం-2	సూచీ సంఖ్య		సంయుక్త సూచీ సంఖ్యలు
			వస్తువు నెం-1	వస్తువు నెం-2	
1990	50	25	$\frac{50}{50}\times 100 = 100$	$\frac{25}{25}\times 100 = 100$	$\frac{100+100}{2} = 100$
1991	48	32	$\frac{48}{50}\times 100 = 96$	$\frac{32}{25}\times 100 = 128$	$\frac{96+128}{2} = 162$
1992	61	41	$\frac{61}{50}\times 100 = 112$	$\frac{41}{25}\times 100 = 164$	$\frac{112+164}{2} = 143$

1993	55	46	$\frac{55}{50} \times 100 = 110$	$\frac{46}{25} \times 100 = 184$	$\frac{110+184}{2} = 147$
1994	65	48	$\frac{65}{50} \times 100 = 130$	$\frac{48}{25} \times 100 = 192$	$\frac{130+192}{2} = 161$
1995	74	52	$\frac{74}{50} \times 100 = 148$	$\frac{52}{25} \times 100 = 208$	$\frac{148+208}{2} = 179$

పై ఉదాహరణను పరిశీలించిన, సంయుక్త సూచీ సంఖ్య వివిధ వస్తువుల సూచీ సంఖ్యల సగటుగా వుంది. సగటును లెక్కించేటప్పుడు అంక, గుణ, హర మధ్యమాలు కాని, మద్యగతము లేక బహుళకాన్ని కాని వాడవచ్చు. కాని సాధారణంగా అంక మధ్యమాన్ని ఉపయోగిస్తాం . సంయుక్త సూచీ సంఖ్య నిర్మాణంలో అన్ని వస్తువులకు సమానంగా పరిగణించబడ్డాయి. కాని వస్తువుల ప్రాముఖ్యతను బట్టి వాటికి భారం యివ్వాల్సిఉంటుంది. అప్పుడు ఆ వస్తువుల సాపేక్ష ధరలకు భారిత అంకమద్యమం (*Weighted Arthmetic Mean*) నిర్ణయించి దానిని సంయుక్త సూచిగా పరిగణిస్తాం.

13.2.2 గొలుసు ఆధార పద్ధతి (*Chanin Based Method*):

ఒక వస్తువు యొక్క ధరలో వచ్చిన మార్పులను ఏడాది, ఏడాదికి సరిపోల్చాలనుకున్నప్పుడు సూచీ సంఖ్యలను గొలుసు ఆధార పద్ధతి ద్వారా నిర్మించాలి. ఈ పద్ధతిలో ప్రతి సంవత్సరాన్ని దాని తరువాతి సంవత్సరానికి ఆధార సంవత్సరంగా తీసుకుంటాం. మొదటి సంవత్సరానికి మాత్రం దానికి అదే ఆధార సంవత్సరం అవుతుంది. ఉదాహరణకు 1990, 92, 93 సంవత్సరాలకు గొలుసు పద్ధతి ద్వారా సూచీ సంఖ్యలను నిర్మించాలనుకుంటే 1993 సంవత్సరానికి 1992 ఆధార సంవత్సరం అవుతుంది. అలాగే 1992 సంవత్సరానికి 1991 సంవత్సరం ఆధార సంవత్సరం అవుతుంది. అలాగే 1991 సంవత్సరానికి 1990 ఆధార సంవత్సరం అవుతుందది, కాని 1990 సంవత్సరానికి 1990 సంవత్సరమే ఆధార సంవత్సరం అవుతుంది.

ఈ క్రింది యిచ్చిన దత్తాంశానికి గొలుసు ఆధార పద్ధతి ద్వారా సాధారణ సూచీ సంఖ్యలను నిర్మిద్దాం.

సంవత్సరం	వస్తువు ధర (రూ॥లలో)	గొలుసు ఆధార సూచీ సంఖ్యలు
1990	50	$\frac{50}{50} \times 100 = 100$
1991	48	$\frac{48}{50} \times 100 = 96$
1992	61	$\frac{61}{48} \times 100 = 127.08$
1993	55	$\frac{55}{61} \times 100 = 90.16$
1994	65	$\frac{65}{61} \times 100 = 118.18$
1995	74	$\frac{74}{65} \times 100 = 113.85$

గొలుసు ఆధార సూచీ సంఖ్యలు, స్థిర ఆధార సూచీ సంఖ్యల కన్నా మెరుగైనవి. ఎందుకంటే ఇవి మొదటి సం॥ మొదలుకొని చివరి సంఒఒ వరకూ జరిగే మార్పులను పరిగణలోకి తీసుకుంటాయి. అయితే ఈ పద్ధతి కొంచెము కష్టతరమైనది.

13.2.3 సగటు ఆధార పద్ధతి (*Average Base Method*)

ఈ పద్ధతిలో ఇచ్చిన అన్ని సం॥లలోని 'ధరల సగటు'ను ఆధార సం॥లో ప్రకృతి వైపరీత్యాలున్నా వాటి ప్రభావం తగ్గించటానికి వీలవుతుంది. ఈ క్రింది ఉదాహరణ సగటు ఆధార పద్ధతి ద్వారా సూచీ సంఖ్యలు ఎలా నిర్మించాలో తెలుసుకుందాం.

సంవత్సరం	వస్తువు ధర రూ॥లలో	సగటు ధర రూ॥లలో	సూచీ సంఖ్యలు
1990	50		$\frac{50}{58.83} \times 100 = 84.99$
1991	48	$\frac{50+48+61+55+65+74}{6}$	$\frac{48}{58.83} \times 100 = 81.59$
1992	61		$\frac{61}{58.83} \times 100 = 103.69$
1993	55	$=\frac{353}{6}$	$\frac{55}{58.83} \times 100 = 93.49$
1994	65	$= 58.83$	$\frac{65}{58.83} \times 100 = 110.48$
1995	74		$\frac{74}{58.83} \times 100 = 125.79$

13.3 సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణ పద్దతులు (*Methods of Constructing Index Numbers*):

ఈ యూనిట్‌లో సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణ పద్దతులను తెలుసుకుందాం. స్థిర ఆధార పద్దతిలో సూచీ సంఖ్యలను సంఘటిత పద్దతి (*Aggragates Method*) మరియు సగటు సాపేక్ష పద్దతి (*Average Relatives Method*) అనే రెండు పద్దతులను ఉపయోగించి నిర్మిస్తాం. ఈ పద్దతులలో ఉపయోగించే సూత్రాలలో ఈ క్రింది సంకేతాలను వాడతాం.

ఆధార సం॥ను Y_0 సూచిస్తాము.

ఆధార సం॥లోని 1, 2, 3 .... వస్తువుల ధరలను వరుసగా $P_0^1, P_0^2, P_0^3, P_0^4$ ....గాను, ఆధార సం॥లోని 1,2,3............ వస్తువుల పరిమాణాలను వరుసగా Q_0^1, Q_0^2, Q_0^3 ....గాను సూచిస్తాము. అలాగే ప్రస్తుత సం॥రాన్ని y తో సూచిస్తూ ప్రస్తుత సం॥లో 1, 2, 3 .... వస్తువుల ధరలను వరుసగా P_1^1, P_1^2, P_1^3 ....గానూ, ప్రస్తుత సం॥లో 1, 2, 3 ...... వస్తువుల పరిమాణాలను Q_1^1, Q_1^2, Q_1^3 ....గాను సూచిస్తాము. మరియు Y_0 ఆధార సం॥గా, Y_1 సం॥రానికి నిర్మించిన సూచీ సంఖ్యను I_{01} తో గుర్తిస్తాము. అలాగే Y_1 ఆధార సంవత్సరముగా Y_2 సం॥రానికి నిర్మించిన సూచీ సంఖ్యను I_{12} గా సూచిస్తాము. ఇంతకు ముందు వివరించినట్లుగా ధరల సూచీ సంఖ్యలు ఎక్కువగా ఉపయోగిస్తాం కాబట్టి ఈ యూనిట్‌లో ధరల సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణం పద్దతుల గురించి ప్రముఖంగా ప్రస్తావించబడింది.

13.3.1 సంఘటిత పద్దతి (*Aggragates Method*):

ఈ విభాగంలో సంఘటిత పద్దతినుసరించి సరళ (అభారిత) సంఘటిత సూచీ సంఖ్యను (*Simple (un-weighted)Afgragate Index number*) మరియు భారిత సంఘటిత సూచి సంఖ్య (*Weighted Aggragate Index Number*)లను ఎలా నిర్మించాలో తెలుసుకుందాం.

సరళ (అభారిత) సంఘటిత సూచీ సంఖ్య (*Simple (Un-Weighted) Aggragate Index Number*):

ఈ సూచీ సంఖ్య నిర్మాణంలో వస్తు సముదాయంలోని అన్ని వస్తువుల ప్రస్తుత సం॥ ధరల మొత్తాన్ని, ఆధార సం॥లోని ధరల మొత్తానికి శాతంగా వివరిస్తాం. అంటే మొదట, యిచ్చిన వస్తు సముదాయంలో, వస్తువుల ప్రస్తుత సం॥లోని ధరల మొత్తాన్ని ఆధర సం॥లోని ధరల మొత్తాన్ని విడివిడిగా లెక్కించి, ఆ తరువాత ప్రస్తుత సం॥లోని ధరల మొత్తం, ఆధార సం॥లో ధరల మొత్తంలో ఎంత శాతమో తెలుసుకుంటాం. ఇదే సరళ (అభారిత) సంఘటిత సూచీ సంఖ్య అవుతుంది. ఈ వివరణ సూత్ర రూపంలో క్రింది విధంగా రాస్తాం. ఒక వస్తు సముదాయంలో $'n'$ వస్తువులుంటే వాటి ధరలు ఆధార సం॥లో వరుసగా P_0^1, P_0^2 ....P_0^n

మరియు ప్రస్తుత సం॥లో $P_0^1, P_0^2 .... P_0^n$ అయితే

$$I_{01} = \frac{P_1^1 + P_1^2 + P_1^3 + ------- + P_1^n}{P_0^1 + p_0^2 + P_0^3 + -------- + P_0^n} \times 100 = \frac{\sum P_1}{\sum P_0} \times 100$$

$$\sum p_1 = P_1^1 + P_1^2 + P_1^3 + ------- + P_1^n$$

$$\sum P_0 = P_0^1 + P_0^2 + -------- + P_0^n$$

గమనిక:- ఇవే సంకేతాలు ఇక పై కూడా వాడతాం.

ఉదాహరణ ద్వారా సరళ సంఘటిత సూచీ సంఖ్య ఎలా నిర్మించాలో తెలుసుకుందాం.

ఉదా:-

వస్తు సముదాయం	ధరలు రూ॥ లలో	
	1990 P_0	1995 P_1
బియ్యం	200	290
గోధుమలు	300	410
పంచధార	400	620
బంగాళదుంపలు	100	150
కందిపప్పు	150	400
మొత్తం	$\sum P_0 = 1150$	$\sum P_1 = 1870$

సరళ సంఘటిత సూచీ సంఖ్య $= \frac{\sum P_1}{\sum P_0} \times 100 = \frac{1870}{1150} \times 100 = 162.61$

4.2.1 భారిత సంఘటిత సూచీ సంఖ్య (*Heighted Aggrate Index Number*):

సరళ సంఘటిత సూచీ సంఖ్య నిర్మాణంలో వస్తు సముదాయం లోని అన్ని వస్తువులకు సమానమైన ప్రాముఖ్యత ఇవ్వబడింది. కాని వస్తువుల ఉపయోగాన్ని బట్టి వాటికి ప్రాముఖ్యత వుంటుంది. భారిత సంఘటిత సూచీ సంఖ్య నిర్మాణంలో వస్తు సముదాయంలోని వివిధ వస్తువులకు వాటి ప్రాముఖ్యతను బట్టి భారాలు (*Weights*)ఇస్తాం. వస్తువుల ఉత్పత్తి, నిల్వ, అమ్మకం లేక వినియోగానికి చెందిన పరిమాణాలను భారాలుగా తీసుకుంటే ఈ పద్ధతిని అవ్యక్త భారాల పద్ధతని, పరిమాణాలు కాక వేరే సుద్ద సంఖ్యలను భారాలుగా యిచ్చే పద్ధతిని వ్యక్త భారాల పద్ధతని అంటాం.

$W_1, W_2 .... W_n$ లు 1, 2, 3, ... n వస్తువులకు వరుసగా ఇచ్చిన భారాలు అయితే Y_0 అధార సం॥గా, Y_1 సం॥రానికి భారిత సూచీ సంఖ్య ఈ క్రింది సూత్రాన్ని ఉపయోగించి లెక్కించవచ్చు.

$$I_{01} = \frac{P_1^1 W_1 + P_1^2 W_2 + ... + P_1^n W_n}{P_0^1 W_1 + P_0^2 W_2 + ------ + P_0^n W_n} \times 100$$

$$= \frac{\sum P_1 W}{\sum P_0 W} \times 100$$

ఇక్కడ ఆధార సం॥నికి, ప్రస్తుత సం॥నికి ఒకే భారాలు వాడాం. క్రింద ఇవ్వబడిన దత్తాంశానికి 1990 సం॥ ఆధార సం॥గా సంఘటిత సూచీ సంఖ్య ఎలా నిర్మించాలో తెలుసుకుందాం.

ఉదా:

వస్తు సముదాయం	ధరలు రూ॥లలో		భారాలు W	P_0W	P_1W
	1990 సం॥లో P_0	1995 సం॥లో P_1			
బియ్యం	200	290	7	$200 \times 7 = 1400$	$290 \times 7 = 2030$
గోధుమలు	300	410	6	$300 \times 6 = 1800$	$410 \times 6 = 2460$
పంచధార	400	620	5	$400 \times 5 = 2000$	$620 \times 5 = 3100$
బంగాళా దుంపలు	100	150	2	$100 \times 2 = 200$	$150 \times 2 = 300$
కందిపప్పు	150	400	4	$150 \times 4 = 600$	$400 \times 4 = 1600$
మొత్తం				$\sum P_0W = 6000$	$\sum P_1W = 9490$

భారిత సంఘటిత సూచీ సంఖ్య $$I_{01} = \frac{\sum P_1W}{\sum P_0W} \times 100 = \frac{9430}{6000} \times 100 = 158.17$$

భారిత సంఘటిత సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో వస్తువులకు భారాలు వివిధ రూపాలుగా ఇవ్వవచ్చు.భారాలు ఇచ్చే పద్ధతిని బట్టి సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో పలు సూత్రాలు ఉపయోగంలో ఉన్నాయి.

1. లాస్పియర్ సూచీ సంఖ్య (*Laspear's Index Number*):

ఆధార సం॥లోని పరిమాణాలను భారాలుగా పరిగణించి లాస్పియర్ అనే జర్మన్ ఆర్థిక శాస్త్రనేత్త ప్రతిపాదించిన పద్ధతి ననుసరించి నిర్మించిన సూచీ సంఖ్యను లాస్పియర్ సూచీ సంఖ్య అంటాం. లాస్పియర్ ప్రతిపాదించిన సూచీ సంఖ్య సూత్రం

$$I_{01} = \frac{P_1^1Q_0^1 + P_1^2Q_0^2 + P_1^3Q_0^3 + \text{-----} + P_1^nQ_0^n}{P_0^1Q_0^1 + P_0^2Q_0^2 + \text{-----} + P_0^nQ_0^n} \times 100$$

$$= \frac{\sum P_1Q_0}{\sum P_0Q_0} \times 100$$

2. పాషీ సూచీ సంఖ్య (*Paasche's Index Number*):

ప్రస్తుత సం॥లో ఉపయోగించి పరిమాణాలను భారాలుగా తీసుకొని పాషీ అనే జర్మన్ సాంఖ్యక శాస్త్రవేత్త ప్రతిపాదించిన పద్ధతినుపయోగించి నిర్మించే సూచీ సంఖ్యను పాషీ సూచి సంఖ్య అంటాం. పాషీ సూచీ సంఖ్య సూత్రం

$$I_{01} = \frac{P_1^1Q_1^1 + p_1^2Q_1^2 + ----- + P_1^nQ_1^n}{P_0^1Q_1^1 + P_0^2Q_1^2 + ----- + P_0^nQ_1^n} \times 100$$

$$= \frac{\sum P_1Q_1}{\sum P_0Q_0} \times 100$$

లాస్పియర్ మరియు పాషీ సూచీ సంఖ్యలను పరిశీలించిన లాస్పియర్ సూచీ సంఖ్య నిర్మాణం తేలిక, ఎందుకంటే ఈ సూచీ సంఖ్య నిర్మించటానికి ఆధార సం॥లోని పరిమాణాలు సేకరిస్తే సరి పోతుంది. కానీ పాషీ సూచి సంఖ్య నిర్మించాలంటే ప్రస్తుత సం॥లోని పరిమాణాలు కావాలి. ఒక్కొక్కసారి ఈ పరిమాణాలు సేకరించటం కష్టమౌతుంది.

లాస్పియర్ సూచీ సంఖ్య ఆధార సం॥లోని పరిమాణాలు భారాలుగా ఉపయోగించుట వలన ప్రస్తుత సం॥లో ధరలకు సాపేక్షంగా ఎక్కువ భారాలు ఇచ్చినట్లవవుతుంది. దాని వలన $\sum P_1Q_0$ విలువ సాపేక్షంగా ఎక్కువ వుంటుంది. అందువలన లాస్పియర్

సూచీ సంఖ్య ఊర్ధ్వ పాక్షితలను (*Upward-Baise*) కలిగి ఉంటుంది. అదే విధంగా ధరలు తగ్గటం వలన కొన్ని వస్తువుల వినియోగ పరిమాణం పెరుగుతాయి. పాషీ సూచి సంఖ్యలో ప్రస్తుత సం॥లోని పరిమాణాలు భారాలుగా పరిగణించటం వల్ల ధరలు తగ్గిన వస్తువులకు ఎక్కువ భారాలు ఇచ్చినట్లవుతుంది. దీని వలన $\sum P_0Q_1$ విలువ పెరుగుతుంది. అందువలన పాషీ సూచి సంఖ్య అధః పాక్షితలను (*Downward-Baise*) కలిగి ఉంటుంది. దీని వలన మనం గుర్తుంచుకోవలసిందేమిటంటే సామాన్యంగా లాస్పియర్ సూచీ సంఖ్య పాషీ సూచీ సంఖ్య కన్నా ఎక్కువ విలువ కలిగి ఉంటుందని.

3. ఫిషర్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్య (*Fisher Ideal Index Number*):

లాస్పియర్ సూచీ సంఖ్యలోని ఊర్ధ్వ పాక్షితాలను మరియు పాషీ సూచీ సంఖ్యలోని అదః పాక్షితాలను సవరించటానికి పిషర్ అనే శాస్త్రవేత్త వాటి గుణ మద్యమాన్ని సూచీ సంఖ్యగా ప్రతిపాదించాడు. దీనిని ఫిషర్ సూచీ సంఖ్య అంటాం.

$$\text{పిషర్ సూచీ సంఖ్య} = \sqrt{\frac{\sum P_1Q_0}{\sum P_0Q_0} \times \frac{\sum P_1Q_1}{\sum P_0Q_1}} \times 100$$

ఈ సూచీ సంఖ్యను ఆదర్శ సూచీ సంఖ్య అంటాం. ఎందుకంటే ఇది ఒక సూచీ సంఖ్య ఆదర్శమైనదా కాదా అని తెలుసుకోవటానికి పిషర్ ప్రతిపాదించిన విపర్యయ (*Teversal Test*) న్యాయాలలో ఒక్కటి మినహా అన్ని న్యాయాలను పాటిస్తుంది.

4. మార్షల్ - ఎడ్జ్‌వర్త్ సూచీ సంఖ్య (*Marshal - Edgewarth Index Number*):

ప్రస్తుత సం॥లో మరియు ఆధార సం॥లో వుపయోగించిన పరిమాణాల మొత్తాన్ని గాని, వాటి సగటును గాని భారాలుగా తీసుకొని సూచీ సంఖ్యను నిర్మిస్తే దానిని మార్షల్-ఎడ్జ్‌వర్త్ సూచీ సంఖ్య అంటాం. సూత్రం

$$I_{01} = \frac{\sum P_1(Q_1+Q_0)}{\sum P_0(Q_1+Q_0)} \times 100 \quad \text{లేదా} \quad I_{01} = \frac{\sum P_1\left(\frac{Q_0+Q_1}{2}\right)}{\sum P_0\left(\frac{Q_0+Q_1}{2}\right)} \times 100$$

5. డ్రాబిష్ - బౌలి సూచీ సంఖ్య (*Dorbish - Bowly Index Number*):

లాస్పియర్ సూచీ సంఖ్యలో ఊర్ధ్వ పాక్షితను మరియు పాషీ సూచీ సంఖ్యలోని అదః పాక్షితలను సమానం చేస్తూ డ్రాబిష్ - బౌలీ ఆ రెండు సూచీ సంఖ్యల అంక మద్యమాన్ని సూచీ సంఖ్యగా ప్రతిపాదించారు. దీనిని డ్రాబిష్ - బౌలీ సూచీ సంఖ్య అంటాం.

$$\text{సూత్రం} \quad I_{01} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sum P_1Q_0}{\sum P_0Q_0} + \frac{\sum P_1Q_1}{\sum P_0Q_1}\right] \times 100$$

6. వాల్ష్ సూచీ సంఖ్య (*Walsh Index Number*):

మార్షల్ - ఎడ్జ్‌వర్త్‌లు ప్రస్తుత మరియు ఆధార సం॥లో ఉపయోగించిన పరిమాణాలు అంకమద్యమాన్ని భారాలుగా ప్రతిపాదిస్తే వాల్షె వాటి గుణమద్యమాన్ని భాగాలుగా ప్రతిపాదించాడు.

$$\text{వాల్ష్ సూచీ సంఖ్య సూత్రం} \quad I_{01} = \frac{\sum P_1\sqrt{Q_0Q_1}}{\sum P_0\sqrt{Q_0Q_1}} \times 100$$

7. కెల్లీ సూచీ సంఖ్య (*Kelly's Index Number*):

ఈ శాస్త్రవేత్త భారాలు అన్ని సం॥రాలకు స్థిరంగా వుండాలని ప్రతిపాదించాడు. భారాలు నిర్దిష్టంగా ఆధార సమయంలో ఉపయోగించి పరిమాణాలు గాని, వర్తమాన సమయంలో వినియోగించిన పరిమాణాలు గాని కావల్సిన అవసరం లేదు. 1, 2 లేక మూడు సం॥లలో వినియోగించిన పరిమాణాల అంక లేక గుణమధ్యమాన్ని భారాలుగా ఉపయోగించవచ్చునని ప్రతిపాదించాడు.

$$\text{కెల్లీ సూచీ సంఖ్య} = I_{01} = \frac{\sum P_1W}{\sum P_0W} \times 100$$

ఉదా - ఉదాహరణ ద్వారా లాస్పియర్, పాషీ మరియు ఫిషర్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్యలను నిర్మించటం తెలుసుకుందాం.

వస్తు సముదాయం	ధరలు రూ॥లలో		పరిమాణాలు q_0	P_0Q_0	P_1Q_0
	1990 ఆధార సం॥ (P_0)	1995 ప్రస్తుత సం॥ (P_1)			
A	50	70	10	$50\times10=500$	$70\times10=700$
B	60	84	15	$60\times15=900$	$84\times15=1260$
C	35	29	5	$35\times15=175$	$29\times5=145$

మొత్తము $\sum P_0Q_0 = 1575$ $\sum P_1Q_0 = 2150$

$$\text{లాస్పియర్ సూచీ సంఖ్య} = \frac{\sum P_1Q_0}{\sum P_0Q_0}\times 100$$

ఉదా - 2 పాషీ సూచీ సంఖ్య నిర్మించుట

వస్తు సముదాయం	ఆధార సం॥ ధరలు (P_0)	ప్రస్తుత సం॥ ధరలు (P_1)	ప్రస్తుత సం॥లో పరిమాణాలు(Q_1)	2×4 P_0Q_1	2×3 P_1Q_1
A	40	65	10	$40\times10=400$	$65\times10=650$
B	20	55	4	$20\times4=80$	$55\times4=220$
C	70	40	5	$70\times5=350$	$40\times5=200$

మొత్తము $\sum P_0Q_1 = 830$ $\sum P_1Q_1 = 1010$

$$\text{పాషీ సూచీ సంఖ్య} = I_{01} = \frac{\sum P_1Q_1}{\sum P_0Q_1}\times 100 = \frac{1010}{830}\times 100 = 128.91$$

ఉదా - 3 ఫిషర్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్య నిర్మించటం.

వస్తు సముదాయం	ఆధార సం॥లో		ప్రస్తుత సం॥					
	ధరలు P_0	పరిమాణం Q_0	ధరలు P_1	పరిమాణం Q_1	P_0Q_0	P_0Q_1	P_1Q_0	P_1Q_1
A	50	10	70	8	500	400	700	560
B	60	5	55	6	300	360	275	330
C	20	4	30	5	80	100	120	150
				మొత్తం	**880**	**860**	**1095**	**1040**
					$\sum P_0Q_0$	$\sum P_0Q_1$	$\sum P_1Q_0$	$\sum P_1Q_1$

$$\text{ఫిషర్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్య సూత్రం} = \sqrt{\frac{\sum P_1Q_0}{\sum P_0Q_0}\times\frac{\sum P_1Q_1}{\sum P_0Q_1}}\times 100$$

$$= \sqrt{\frac{1095}{880}\times\frac{1040}{860}}\times 100$$

$$= \sqrt{1.505}\times 100 = 1.22668\times 100$$

$$= 122.66$$

13.4.2.2 సాపేక్ష సగటు పద్ధతి (*Average of Retalive Methods*):

సాపేక్ష సగటు పద్ధతిని ఉపయోగించి సూచీ సంఖ్యలు ఎలా కనుక్కొనాలో ఈ యూనిట్‌లో నేర్చుకుందాం.

ఒక వస్తువు యొక్క విలువ ఆధార సం॥లో P_0 అనుకొని ప్రస్తుత సం॥లో P_1 అనుకుంటే

ప్రస్తుత సం॥లో ఆ వస్తువు యొక్క సాపేక్ష విలువ $\frac{P_1}{P_0}\times 100$ అవుతుంది. అంటే ఒక వస్తువు యొక్క విలువను, ఆ వస్తువు యొక్క ఆధార సం॥లోని విలువలో శాతంగా వ్రాస్తే దానిని సాపేక్ష విలువ అంటాం. అది పరిమాణంలో అయితే సాపేక్ష పరిమాణం అని, ధరలో అయితే సాపేక్ష ధర అని పిలుస్తాం.

1. అభారిత సగటు సాపేక్ష పద్ధతి (*Simple Average of Relative Mehtod*)

ఈ పద్ధతిలో సూచీ సంఖ్యను నిర్మించుటకు సాపేక్ష విలువల సగటును ఉపయోగిస్తాం. ఈ విధంగా ధరల సూచీని ఎలా కనుక్కోవాలి, దాని శాతం గురించి తెలుసుకుందాం.

ఒక వస్తువు సముదాయంలో P_0^1, P_0^2, P_0^3 – – – – లు ఆధార సం॥లో 1, 2, 3------- వస్తువుల ధరలు P_1^1, P_1^2, P_1^3 – – – – ప్రస్తు తసం॥లో 1, 2, 3,---------- వస్తువుల ధరలు అయితే ముందుగా ఈ వస్తు సముదాయంలోని ప్రతి వస్తువుకు సాపేక్ష ధర కనుక్కోవాలి. అనగా $\frac{P_1^1}{P_0^2}\times 100$, $\frac{P_1^3}{P_0^3}\times 100$ – – – – – –లు కనుక్కోవాలి. ఇక్కడ మనకు తెలిసిన సగటులు అనగా అంకమద్యమం, గుణ, హర మద్యమం లేక మాధ్యగతం, బాహుళకము లలో దేనినైనా వాడవచ్చు. కానీ సాదారణంగా అంకమద్యమాన్నే వాడుతుంటాం. ఒక వస్తు సముదాయంలో *'N'* వస్తువులు ఉన్నట్లయితే సరళ సాపేక్ష సగటు సూచీ సంఖ్యను ఈ దిగువ యిచ్చిన సూత్రం ఉపయోగించి నిర్మిస్తాం.

$$= \frac{\frac{P_1^1}{P_0^1}\times 100 + \frac{P_1^2}{P_0^2}\times 100 + \text{------}}{N} \qquad = \frac{1}{N}\left(\sum \frac{P_1}{P_0}\times 100\right)$$

అంకమద్యమానికి బదులుగా గుణమద్యమాన్ని ఉపయోగిస్తే సూచీ సంఖ్య సూత్రం ఈ క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

$$I_{01} = \text{Anti}\log\left[\frac{1}{n}\sum \log\frac{P_1}{P_0}\right]\times 100$$

ఉదా - అభారిత సగటు సాపేక్ష సూచీ సంఖ్యని నిర్మించుట

వస్తు సముదాయం	**1995 ధరలు** P_0	**2000 సం॥ ధరలు** P_1	**సాపేక్ష ధరలు** $\frac{P_1}{P_0}\times 100 =$
బియ్యం	250	310	$\frac{310}{250}\times 100 = 1.24\times 100 = 124$
పంచదార	350	420	$\frac{420}{350}\times 100 = 1.2\times 100 = 120$
గోధుమలు	210	250	$\frac{250}{210}\times 100 = 1.19\times 100 = 190$
వంటనూనెలు	200	350	$\frac{350}{200}\times 100 = 1.75\times 100 = 175$

మొత్తము $\sum \frac{P_1}{P_0}\times 100 = 609$

$$\therefore \text{అభారిత సగటు సాపేక్ష సూచీ సంఖ్య} = \frac{\sum \frac{P_1}{P_0} \times 100}{\text{వస్తువుల సంఖ్య } (n)}$$

$$= \frac{609}{4} = 152.25$$

భారిత సాపేక్ష సగటు సూచీ సంఖ్య

పై విధంగా నిర్మించిన సూచీ సంఖ్య వాస్తవ పరిస్థితిని తెలియపరచలేదు. ఈ పద్ధతిలో ప్రతి సాపేక్ష ధరకు ఆ వస్తువు యొక్క q• °=ä½(q• °= = ధర x పరిమాణము) భారంగా యిస్తాం. ఈ భారాల విలువలు వివిధ రకాలుగా లెక్కించవచ్చు. ఆధార సం॥లో విలువలు తీసుకుంటే, ఈ విలువల భారాలు $P_0^1 Q_0^1, P_1^2 Q_1^2$ -------$P_1^n Q_n^n$ అవుతాయి.

ఆధార సం॥లోని విలువలను భారాలుగా ఉపయోగిస్తే ఈ సూచీ సంఖ్య సూత్రం

$$I_{01} = \frac{\sum \left[\frac{P_1}{P_0} \times 100 \times P_0 Q_0 \right]}{\sum P_0 Q_0} = \frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0} \times 100$$

ఉదా - భారితసగటు సాపేక్ష సూచీ సంఖ్యను నిర్మించుట

వస్తు సముదాయం	**ధరలు** 1995లో P_0	2000లో P_1	**పరిమాణం** 1995 లో Q_0	**సాపేక్ష ధర శాతం** $\frac{P_1}{P_0} \times 100$	**ఆధార సం॥ విలువ**	**భారిత సాపేక్ష విలువ**
A	35	45	10	$\frac{45}{35} \times 100 = 128.57$	$35 \times 10 = 350 =$	49,999.5
B	20	15	5	$\frac{15}{20} \times 100 = 75.00$	$20 \times 5 = 100 =$	7,500.0
C	40	60	20	$\frac{60}{40} \times 100 = 150.00$	$40 \times 20 = 800 =$	1,20,000.00
D	15	25	4	$\frac{25}{15} \times 100 = 166.67$	$15 \times 4 = 60 =$	240.00
					1310	1,77,739.5

$$\text{భారిత సగటు సాపేక్ష సంఖ్య} = \frac{1,77,739.5}{1310} = 135.67$$

6 పరిమాణ సూచీ సంఖ్య మరియు విలువల సూచీ సంఖ్య

ఇప్పటి వరకు చదివిన యూనిట్స్‌లో వివిధ రకాలు సూచీ సంఖ్యలు ఎలా నిర్మించాలో తెలుసుకున్నాం. వీటిలో ఏ సూచీ సంఖ్య ఆదర్శమైనది, కాదు అని తెలుసుకోవటం అవసరం. ఇర్‌వింగ్ కొన్ని పరీక్షలు ప్రతిపాదించాడు. అవి **(1)** కాల విపర్యయ పరీక్ష (*Time Reverse Test*) **(2)** కారణాంక విపర్యయ పరీక్ష (*Factor Reversal Test*) **(3)** చక్రీయ పరీక్ష (*Circular Test*)

6.1 కాల విపర్యయ పరీక్ష (*Time reversal test*):

ఒక సూచీ సంఖ్య నిర్మాణంలో వాడుతున్న సూత్రం మరియు ఆ సూత్రంలో ఆధార సం॥రాన్ని ప్రస్తుత సం॥గా తారుమారు చేయగా వచ్చిన సూత్రంతో గుణిస్తే ఒకటి వచ్చిన ఎడల ఆ సూచీ సంఖ్య కాల విపర్యయ పరీక్షను సంతృప్తి పరిచింది అంటాం.

1995 సం॥ ఆధార సం॥గా, 200 సం॥నికి నిర్మించిన సూచీ సంఖ్య I_{10} అయితే, 2000 సం॥ ఆదారంగా 1995 సం॥ ప్రస్తుత సం॥గా నిర్మించిన సూచీ సంఖ్య I_{01} అయితే $I_{10} \times I_{01} = 1$ కావాలి.

అనగా I_{10} , I_{01} కు వ్యుత్క్రమం (*Resiprocal*) అవ్వాలి అన్నమాట. (ఇక్కడ సూచీ సంఖ్యలను శాతంగా పరిగణించము) ఉదాహరణకు లాస్పియర్ సూచీ సంఖ్య సూత్రం కాల విపర్యయ పరీక్షను సంతృప్తి పరుస్తుందో లేదో తెలుసుకుందాం.

లాస్పియర్ సూచీ సంఖ్య $I_{01} = \dfrac{\sum P_1Q_0}{\sum P_0Q_0}$(100 గుణకాన్ని తీసివేయగా)

ఆధార సం॥న్ని ప్రస్తుత సం॥గా, ప్రస్తుత సం॥న్ని ఆధార సం॥గా తారుమారు చేస్తే

$$I_{10} = \frac{\sum P_0Q_1}{\sum P_1Q} \text{ అవుతుంది.}$$

ఈ రెంటి యొక్క లబ్దము అంటే $I_{01} \times I_{10} = \dfrac{\sum P_1Q_0}{\sum P_0Q_0} \times \dfrac{\sum P_0Q_1}{\sum P_1Q_1} \neq 1$

అంటే లాస్పియర్ సూచీ సంఖ్య కాల న్యాయాన్ని సంతృప్తి పరచలేదు అన్నమాట.

ఇదే విధంగా మిగిలిన సూచీ సంఖ్యల గురించి కూడా తెలుకుందాం.

పాషీ సూచీ సంఖ్య

$I_{01} = \dfrac{\sum P_1Q_1}{\sum P_0Q_1}$ ఆధార సంవత్సరాన్ని ప్రస్తుత సంవత్సరాన్ని తారుమారు చేయగా $I_{10} = \dfrac{\sum P_0Q_0}{\sum P_1Q_0}$

వీటి లబ్దము అంటే $I_{10} \times I_{01} = \dfrac{\sum P_1Q_1}{\sum P_0Q_1} \times \dfrac{\sum P_0Q_0}{\sum P_1Q_0} \neq 1$

కాబట్టి పాషీ సూచీ సంఖ్య కూడా కాల విలోమ న్యాయాన్ని పాటించుట లేదు.

పిషర్ సూచీ సంఖ్య

$$I_{01} = \sqrt{\frac{\sum P_1Q_0}{\sum P_0Q_0} \times \frac{\sum P_1Q_1}{\sum P_0Q_1}}$$

ఆధార సమయం, ప్రస్తుత సమయాన్ని తారుమారు చేయగా

$$I_{10} = \sqrt{\frac{\sum P_0Q_1}{\sum P_1Q_1} \times \frac{\sum P_0Q_0}{\sum P_1Q_0}}$$

వీటిని గుణించగా

$$\begin{aligned} I_{01} \times I_{10} &= \sqrt{\frac{\sum P_1Q_0}{\sum P_0Q_0} \times \frac{\sum P_1Q_1}{\sum P_0Q_1}} \times \sqrt{\frac{\sum P_0Q_1}{\sum P_1Q_1} \times \frac{\sum P_0Q_0}{\sum P_1Q_0}} \\ &= \sqrt{\frac{\sum P_1Q_0}{\sum P_0Q_0} \times \frac{\sum P_1Q_1}{\sum P_0Q_1} \times \frac{\sum P_0Q_1}{\sum P_1Q_1} \times \frac{\sum P_0Q_0}{\sum P_1Q_0}} = 1 \end{aligned}$$

కాబట్టి పిషర్ సూచీ సంఖ్య కాల విలోమ న్యాయాన్ని పాటిస్తుంది.

మార్షల్ - ఎడ్జ్‌వర్త్ సూచీ సంఖ్య

సూచీ సూత్రం $I_{01} = \dfrac{\sum P_1(Q_0 + Q_1)}{\sum P_0(Q_0 + Q_1)}$

ఆధార సంవత్సరం, ప్రస్తుత సంవత్సరం తారుమారు చేయగా $I_{10} = \frac{\sum P_0(Q_1+Q_0)}{\sum P_1(Q_1+Q_0)}$

వీటి లబ్ధం $I_{01} \times I_{10} = \frac{\sum P_1(Q_0+Q_1)}{\sum P_0(Q_0+Q_1)} \times \frac{\sum P_0(Q_1+Q_0)}{\sum P_1(Q_1+Q_0)} = 1$

లబ్ధం ఒకటికి సమానం కాబట్టి మార్షల్-ఎడ్జ్‌వర్త్ సూచీ సంఖ్య కాల విలోమ న్యాయాన్ని సంతృప్తి పరుస్తుంది. అదే విధంగా బౌలీ సూచీ సంఖ్య కాల విలోమ న్యాయాన్ని పాటించదు అని తెలుకోవచ్చు.

6.2 కారణాంక విలోమ పరీక్ష (*Factor Reversal Test*)

ఈ పరీక్ష ప్రకారం కారణాంకాలు మార్చకముందు, మార్చిన తరువాత వచ్చే సూచీ సంఖ్య లబ్ధం ప్రస్తుత సమయంలోని మొత్తం విలువలకు ఆధార సమయంలోని మొత్తం విలువలకు సమానం కావాలి. సూచీ సంఖ్యలో ధరలను, ప్రమాణాలను తారుమారు చేసినంత మాత్రాన దాని నిలకడను కోల్పోకూడదు. అనగా ఈ పరీక్ష ప్రకారం

'I_{01}' ధరలను, సూచీ సంఖ్య అయితే ('0' ఆధార సమయం, 1 ప్రస్తుత సమయం)

Q_{01} ధరలను, పరిమాణములు తారుమారు చేయగా వచ్చు సూచీ సంఖ్యను సూచిస్తే

$$I_{01} \times Q_{01} = \frac{\sum P_1Q_1}{\sum P_0Q_0} \quad \begin{matrix}\text{(ప్రస్తుత సమయంలో విలువల మొత్తం)} \\ \text{(ఆధార సమయంలో విలువల మొత్తం)}\end{matrix}$$

సంఖ్య కారణాంక విలోమ పరీక్షను సంతృప్తి పరిచింది అంటాం. లాస్పియర్, పాషీ, మార్షల్ - ఎడ్జ్‌వర్త్ , బౌలీ సూచీ సంఖ్యల ఈ పరీక్షణు సంతృప్తి పరుస్తాయో లేదో తెలుసుకుందాం.

1. లాస్పియర్ సూచీ సంఖ్య

$$I_{01} = \frac{\sum P_1Q_0}{\sum P_0Q_0}$$

ధరలు, పరిమాణాలు తారుమారు చేస్తే

$$Q_{01} = \frac{\sum Q_1P_0}{\sum Q_0P_0}$$

వీటి లబ్ధం $I_{01} \times Q_{01} = \frac{\sum P_1Q_0}{\sum P_0Q_0} \times \frac{\sum Q_1P_0}{\sum Q_0P_0} \neq \frac{\sum P_1Q_1}{\sum P_0Q_0}$

లాస్పియర్ సూచీ సంఖ్య కారణాంక విలోమ న్యాయాన్ని పాటించటం లేదు.

2. పాషీ సూచీ సంఖ్య

$$I_{01} = \frac{\sum P_1Q_1}{\sum P_0Q_1}$$

ధరలు, పరిమాణాలు తారుమారు చేస్తే

$$Q_{01} = \frac{\sum Q_1P_1}{\sum Q_0P_1}$$

వీటి లబ్ధం $I_{01} \times Q_{01} = \frac{\sum P_1Q_1}{\sum P_0Q_1} \times \frac{\sum Q_1P_1}{\sum Q_0P_1} \neq \frac{\sum P_1Q_1}{\sum P_0Q_0}$

పిషర్ సూచీ సంఖ్య

ఇదే విధంగా పరిశీలిస్తే మార్షల్-ఎడ్జ్‌వర్త్ మరియు బౌలీ సూచీ సంఖ్యలు కూడా కారణాంక విలోమ న్యాయాన్ని పాటించటం లేదని తెలుసుకోవచ్చు.

పిషర్ సూచీ సంఖ్య పై రెండు పరీక్షలను సంతృప్తి పరుస్తుందో లేదో తెలుసుకుందాం.

పిషర్ సూత్రం ప్రకారం $I_{01} = \sqrt{\frac{\sum P_1Q_0}{\sum P_0Q_0} \times \frac{\sum P_1Q_1}{\sum P_0Q_1}}$

ధరలు, పిరమాణాలు తారుమారు చేయగా $Q_{01} = \sqrt{\frac{\sum Q_1P_0}{\sum Q_0P_0} \times \frac{\sum Q_1P_1}{\sum Q_0P_1}}$

వీటి లబ్దం అనగా $I_{01} \times Q_{01} = \sqrt{\frac{\sum P_1Q_0}{\sum P_0Q_0} \times \frac{\sum P_1Q_1}{\sum P_0Q_1}} \times \sqrt{\frac{\sum Q_1P_0}{\sum Q_0P_0} \times \frac{\sum Q_1P_1}{\sum Q_0P_1}}$

$$= \sqrt{\frac{\sum P_1Q_0}{\sum P_0Q_0} \times \frac{\sum P_1Q_1}{\sum P_0Q_1} \times \frac{\sum Q_1P_0}{\sum Q_0P_0} \times \frac{\sum Q_1P_1}{\sum Q_0P_1}}$$

$$= \frac{\sum P_1Q_1}{\sum P_0Q_0}$$

కాబట్టి పిషర్ సూచీ సంఖ్య కారణాంక విలోమ న్యాయాన్ని కూడా పాటిస్తుంది. పై రెండు పరీక్షలను సంతృప్తి పరచటం వలన పిషర్ సూచీ సంఖ్యను ఆదర్శ సూచీ సంఖ్య అని అంటాం.

చక్రీయ పరీక్ష (*Circular Test*)

మూడు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ సం॥లు ఉన్నప్పుడు మాత్రమే ఈ పరీక్ష అమలు వీలవుంది. సామాన్యంగా '0' ఆదార సమయంగా, '2' ప్రస్తుత సమయం అయితే I_{12} తోను '2' ఆధార సమయం, '0' ప్రస్తుత సమయం అయితే I_{20} తోను సూచిస్తాము.

0, 1, 2 సమయాల్లో మన సూచీ సంఖ్యలు

I_{01}, I_{12} మరియు I_{20} అయితే వీటి లబ్దం ఒకటికి సమానమయితే ఆ సూచీ సంఖ్య చక్రీయ పరీక్షను సంతృప్తి పరచినట్లు భావిస్తాం.

లాస్పియర్, పాషీ మరియు పిషర్ సూచీ సంఖ్యలు ఈ పరీక్షను సంతృప్తి పరచలేవు అని తెలుసుకోవచ్చు.

ఉదా - ఈ క్రింది ఉదాహరణ ద్వారా పిషర్ సూచీ సంఖ్యను గణించి, అది పైన వివరించిన ఏ పరీక్షలలో వేటిని సంతృప్తి పరుస్తుందో తెలుసుకుందాం.

వస్తువు	ఆదాయ సమయం 1995		ప్రస్తుత సమయం	
	ధరలు	పరిమాణం	ధరలు	పరిమాణం
	P_0	Q_0	P_1	Q_1
బియ్యం	5	20	8	25
గోధుమలు	4	15	5	10
పంచదార	7	4	10	3
నూనెలు	10	2	12	3

చేయు విధము ముందుగా ఈ క్రింది విధంగా పట్టికను తయారు చేద్దాం.

వస్తువు	ఆధార సమయం 1995		ప్రస్తుత సమయం 2000		P_0Q_0	P_1Q_0	P_0Q_1	P_1Q_1
	ధరలు	పరిమాణం	ధరలు	పరిమాణం				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	2x 3	4 x 3	2x 5	4 x 5
బియ్యం	5	20	8	25	100	160	125	200
గోధుమలు	4	15	5	10	60	75	40	50
పంచదార	7	4	10	3	28	40	21	30
కందిపప్పు	10	2	12	3	20	24	30	36
				మొత్తము	208	199	216	316
					$\sum P_0Q_0$	$\sum P_1Q_0$	$\sum P_0Q_1$	$\sum P_1Q_1$

పిషర్ సూచీ సంఖ్య $= I_{01} = \sqrt{\frac{\sum P_1Q_0}{\sum P_0Q_0} \times \frac{\sum P_1Q_1}{\sum P_0Q_1}} \times 100$

$$= \sqrt{\frac{199}{208} \times \frac{316}{216}} \times 100 = \sqrt{\frac{62884}{44928}} \times 100$$

$$= \sqrt{139.97} \times 100$$

$$= 118.31$$

కాల విలోమ పరీక్ష

$$I_{01} = \sqrt{\frac{\sum P_1Q_0}{\sum P_0Q_0} \times \frac{\sum P_1Q_1}{\sum P_0Q_1}} = \sqrt{139.97}$$

$$I_{10} = \sqrt{\frac{\sum P_0Q_1}{\sum P_1Q_1} \times \frac{\sum P_0Q_0}{\sum P_1Q_0}} = \sqrt{\frac{216}{316} \times \frac{208}{199}} = \sqrt{\frac{44928}{62884}}$$

వీటి లబ్ధము $I_{01} \times I_{10} = \sqrt{\frac{62884}{44926}} \times \sqrt{\frac{44928}{62884}} = 1$

కనుక పిషర్ సూచీ సంఖ్య ఇచ్చిన దత్తాంశంలో కాల విలోమ పరీక్షను తృప్తి పరుస్తుంది.

కారణాంక విలోమ పరీక్ష

$I_{01} = \sqrt{\frac{\sum P_1Q_0}{\sum P_0Q_0} \times \frac{\sum P_1Q_1}{\sum P_0Q_1}}$ మరియు $Q_{01} = \sqrt{\frac{\sum Q_1P_0}{\sum Q_0P_0} \times \frac{\sum Q_1P_1}{\sum Q_0P_1}}$

వీటి లబ్ధం $I_{01} \times Q_{01} = \sqrt{\frac{\sum P_1Q_0}{\sum P_0Q_0} \times \frac{\sum P_1Q_1}{\sum P_0Q_1} \times \frac{\sum Q_1P_0}{\sum Q_0P_0} \times \frac{\sum Q_1P_1}{\sum Q_0P_1}}$

$$= \sqrt{\frac{199}{208} \times \frac{316}{216} \times \frac{216}{208} \times \frac{316}{199}}$$

$$= \frac{316}{208} = \frac{\sum P_1Q_1}{\sum P_0Q_0}$$

కాబట్టి ఇచ్చిన దత్తాంశం నుండి లెక్కించిన ఫిషర్ సూచీ సంఖ్య తాకణాంక విలోమ పరీక్షను కూడా తృప్తి పరుస్తుంది.

చక్రీయ పరీక్ష

ఈ క్రింది దత్తాంశమును ఉపయోగించి ఫిషర్ సూచీ సంఖ్య చక్రీయ పరీక్షను తృప్తి పరుస్తుందో లేదో తెలుసుకుందాం.

వస్తువు	1995		1998		2000	
	ధర	పరిమాణము	ధర	పరిమాణము	ధర	పరిమాణము
A	5	10	7	8	10	10
B	3	15	2	20	5	18
C	6	8	10	7	12	5

1995 ఆధార సంవత్సరంగా 1998కు ఫిషర్ సూచీ సంఖ్యను నిర్మించటానికి ఈ క్రింది పట్టిక తయారు చేద్దాం.

వస్తువు	1995		1998					
	ధర P_0	పరిమాణము Q_0	ధర P_1	పరిమాణము Q_1	P_0Q_0	P_0Q_1	P_1Q_0	P_1Q_1
A	5	10	7	8	50	40	70	56
B	3	15	2	20	45	60	30	40
C	6	8	10	7	48	42	80	70
					143	142	180	166
					$\sum P_0Q_0$	$\sum P_0Q_1$	$\sum P_1Q_0$	$\sum P_1Q_1$

ఫిషర్ సూచీ సంఖ్య సూత్రం $I_{01} = \sqrt{\dfrac{\sum P_1Q_0}{\sum P_0Q_0} \times \dfrac{\sum P_1Q_1}{\sum P_0Q_1}}$ (100 గుణకము లేకుండా)

$$= \sqrt{\frac{180}{143} \times \frac{166}{142}} = \sqrt{\frac{29880}{20306}} = \sqrt{1.47} = 1.21$$

1998 సం॥ ఆధార సమయంగా 2000 సం॥కు ఫిషర్ సూచీ సంఖ్యను నిర్మించటానికి ఈ క్రింది పట్టిక తయారు చేద్దాం.

వస్తువు	1998ఆధార సం॥		2000 ప్రస్తుత సం॥					
	ధర	పరిమాణము	ధర	పరిమాణము	P_0Q_0	P_0Q_1	P_1Q_0	P_1Q_1
A	7	8	10	10	56	70	80	100
B	2	20	5	18	40	36	100	90
C	10	7	12	5	70	50	84	60
					166	156	164	250

ఫిషర్ సూచీ సంఖ్య $I_{12} = \sqrt{\dfrac{164}{166} \times \dfrac{250}{156}} = \sqrt{\dfrac{41000}{25896}} = 1.26$

2000 సం॥ ఆధార సమయంగా, 1995 సం॥నికి ఫిషర్ సూచీ సంఖ్య నిర్మించటానికి ఈ క్రింది పట్టిక తయారు చేద్దాం.

వస్తువు	2000 ఆధార సం॥		1995 ప్రస్తుత సం॥					
	ధర P_0	పరిమాణము Q_0	ధర P_1	పరిమాణము Q_1	P_0Q_0	P_0Q_1	P_1Q_0	P_1Q_1
A	10	10	5	10	100	100	50	50
B	5	16	3	15	90	75	54	45
C	12	5	6	8	60	96	30	48
					250	271	134	143

ఫిషర్ సూచీ సంఖ్య $I_{20} = \sqrt{\frac{134}{250} \times \frac{143}{271}} = \sqrt{\frac{19162}{67750}} = 0.53$

కాబట్టి $I_{01} \times I_{12} \times I_{21} = 1.21 \times 1.26 \times 0.53$

$= 0.8 \neq 1$

అందుచే ఫిషర్ సూచీ సంఖ్య చక్రీయ న్యాయాన్ని తృప్తి పరచలేదు.

13.7 ప్రత్యేక సూచీ సంఖ్యలు:

సూచీ సంఖ్యలను ఒక ఆధార సమయంలో ఉన్న పరిస్థితులతో ప్రస్తుత సమయంలో పరిస్థితులతో పోల్చి ఇప్పటి పరిస్థితిలో ఉన్న మార్పును తెలుసుకొంటానికి ఉపయోగిస్తాం. వివిధ రంగాలలో వివిధ సూచీ సంఖ్యలు నిర్మిస్తూ ఉంటారు. ఉదాహరణకు వ్యాపార రంగంలో ధరల స్థాయిలోని మార్పులు తెలుసుకోవటానికి, వ్యవసాయ రంగంలో కాని, పారిశ్రామిక రంగంలో ధరలస్థాయిలలోని మార్పులు తెలుసుకోవటానికి, వినియోగదారుల జీవన వ్యయంలో వచ్చిన మార్పులు తెలుసుకోవటానికి వివిధ రంగాలలో వివిధ సందర్భాలలో వివిధ ఉద్దేశాలతో సూచీ సంఖ్యలు నిర్మించాలి. ఈ విధమైన కొన్ని ముఖ్యమైన సూచీ సంఖ్యల గురించి తెలుసుకోవటమే ఈ విభాగం ఉద్దేశం.

13.7.1 టోకు ధరల సూచీ సంఖ్యలు:

వస్తువుల ధరలు ఎల్లపుడూ మారుతూ ఉంటాయి. టోకు ధరల సూచి అన్ని మార్కెట్‌లో జరుగుతున్న ధరల మార్పును తెలియచేస్తాయి. ఈ టోకు ధరల సూచి ఒక దేశానికి గాని, ఒక రాష్ట్రానికి గాని లేక ఒక పెద్ద పట్టణానికి గాని నిర్మిస్తారు. ఒక ఆర్తిక వ్యవస్థలో వినియోగదారుడు, ఉపయోగిస్తున్న వస్తువుల టోకు ధరలలో ఎటువంటి మార్పు వస్తుంది, దీని ప్రభావం ఆర్థిక వ్యవస్థ పై ఎలా ఉంటుంది తెలుసుకోవటానికి ఈ సూచి సంఖ్య ఉపయోగపడుతుంది. భారతదేశంలో ఈ టోకు ధరల సూచి ప్రభుత్వ ఆర్థిక సలహాదారుని పర్యవేక్షణలో నిర్మించబడతాయి. ప్రతి రాష్ట్రంలో ఆర్థిక గణాంక శాఖ వారు (*Directorate of Economics & Statistics*) వీటిని నిర్మిస్తారు.

13.7.2 వినియోగదారుల సూచీ సంఖ్య (*Consumer Pnie Index Number*) లేక జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్య (*Cost of Living Index*):

టోకు ధరల సూచీని వస్తువుల టోకు ధరలను పరిగణనలోకి తీసుకిని నిర్మిస్తారు. కాని వినియోగదారుడు కొన్ని వస్తువులను మాత్రమే వినియోగిస్తాడు. ఆ వస్తువుల యొక్క ధరలలో మచ్చే మార్పులు మాత్రమే వినియోగదారుని జీవన వ్యయం పై ప్రభావం చూపిస్తుంటాయి. కాబట్టి విభిన్న స్థాయిలలో లేకు ప్రాంతములోని వ్యక్తుల జీవన ప్రమాణాన్ని పరిశీలించి చూసి వారు వినియోగించే వస్తువుల ధరలలో వచ్చే మార్పులను తెలుసుకోవటానికి వినియోగదారుడు సూచీని నిర్మిస్తారు. దీనిని మొదట్లో జీవన ప్రమాణ సూచీ సంఖ్య అని పిలుస్తూండే వారు ఆ తరువాత **1949**లో దీని పేరు వినియోగదారుల సూచీ సంఖ్యగా పిలుస్తున్నారు. ఈ సూచీ సంఖ్యలో వస్తువుల చిల్లర ధరల మాత్రమే తీసుకుంటారు. మన దేశంలో ఈ జీవన వ్యయ ప్రమాణ సూచీ సంఖ్యలు లేబర్ బ్యూరో ద్వారా తెలియజేస్తుంటారు. మన దేశంలో ప్రభుత్వోద్యోగుల జీవన ప్రమాణ సూచీ సంఖ్య, మధ్య తరగతి కుంటుంబీకుల జీవన ప్రమాణ సూచీ సంఖ్య, శ్రామిక వర్గాల జీవన ప్రమాణ సూచీ అధికారంగా భావిస్తున్నాయి.

ఒక వర్గం లేక ఒక ప్రాంతం ప్రజలు కొనుగోలు శక్తి ఆధార సం॥ కొనుగోలు శక్తితో పోల్చి వినియోగదారుని వాస్తవ ఆదాయం ఎంతో తెలుసుకోటానికి జీవన వ్యయ ప్రమాణ సూచీ సంఖ్యలు ఉపయోగిస్తాం. ఈ సూచీ సంఖ్యలు వేతనాలు సవరించటం లోనూ, ధరలు నిర్ణయించటంలోనూ, వస్తు సేవల మార్కెట్ల విశ్లేషించుటలోనూ ఉపయోగపడతాయి.

జీవన వ్యయ ప్రమాణ సూచీ సంఖ్య నిర్మాణంలో ఈక్రింది జాగ్రత్తలు పాటిస్తే గానె తప్ప అది వాస్తవికతను ప్రతిబింబించదు.

1. ఈ సూచీ సంఖ్య ఏ ప్రాంతంలో, ఏ తరగతి ప్రజలకు తక్కువ ఆదాయ వర్గం, అధిక ఆదాయ వర్గం, కార్మిక వర్గం, శ్రామిక వర్గం, వ్యవసాయ కూలీ వర్గం నిర్మించబడుతుందో ముందుగా నిర్ణయించుకోవాలి. అంతేకాక ఆ వర్గంలోని ప్రజలకు ఒకే రకమైన ఆహార వ్యయ అలవాటులు కలిగి ఉండాలి.

2. ఏ విధమైన వైపరీత్యాలు లేని సమయాన్ని ఆధార సమయంగా ఎంచుకోవాలి.
3. కుటుంబ బడ్జెట్ పై విచారణ సమయంలో కుటుంబాలను యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయన పద్ధతి ద్వారానే ఎన్నుకోవాలి. ఆ కుటుంబాలలో అధికంగా ఉపయోగించే వస్తువులనే సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణానికి ఉపయోగించాలి. ఒక్కొక్క కుటుంబం ఆహార పదార్థాలు, వస్త్రాలు, దీపాలు మరియు ఇంధనం, ఇంటి అద్దె, ఇతరములు మొదలైన వాటి పై ఎంతెంత ఖర్చు చేస్తున్నది తెలిసే విధంగా ప్రశ్నావళి ఉండాలి.
4. ఆ ప్రాంతంలోని స్థానిక మార్కెట్లు, సూపర్-మార్కెట్లు కోపరేటివ్ మరియు డిపార్టుమెంటు స్టోర్‌ల నుండి వివిధ వస్తువుల చిల్లర ధరలను సేకరించాలి. ఇది వారానికి ఒకసారి చేయాలి.
5. సాధారణంగా ఈ సూచీ సంఖ్యలు వారానికి ఒకసారి నిర్మిస్తారు. వారాల సూచీ సంఖ్యల సగటును మాసపు సూచీ సంఖ్యగాను, మాసపు సూచీ సంఖ్యల సగటును సం॥ సూచీ సంఖ్యగాను పరిగణిస్తారు.

జీవన వ్యయ ప్రమాణ సూచీ సంఖ్యను రెండు పద్ధతుల ద్వారా నిర్మిస్తాం. (1) సమిష్టి వ్యయ పద్ధతి (2) కుటుంబ బడ్జెట్ పద్ధతి.

సమిష్టి వ్యయ పద్ధతి: ఈ పద్ధతి లాస్పియర్ సూచీ సంఖ్య సూత్రం పై ఆధార పడి వుంటుంది. అనగా ఆధార సం॥లో ఉపయోగించిన వస్తువుల పరిమాణాలు భాగాలుగా ఉపయోగిస్తాం. కావున జీవన వ్యయ ప్రమాణ సూచీ సంఖ్య సూత్రం $= \dfrac{\sum P_1Q_0}{\sum P_0Q_0} \times 100$

కుటుంబ బడ్జెట్ పద్ధతి: ఈ పద్ధతిలో జీవన వ్యయ ప్రమాణ సూచీ సంఖ్యను భారిత సాపేక్ష ధరల సగటును ఉపయోగించి నిర్మిస్తాం. ఇక్కడ భారాలుగా ఆధార సం॥లో ఉపయోగించిన విలువలను తీసుకుంటాం. అంటే ప్రస్తుత సం॥ ధర P_1 ఆధార సం॥ ధర P_0 అయితే $\dfrac{P_1}{P_0} \times 100$ సాపేక్ష ధర అవుతుంది.

దీనిని సాధారణంగా I తో సూచిస్తాము. ఆధార సం॥లో ఉపయోగించిన వస్తువుల పరిమాణం Q_0 అయితే ఆ వస్తువుల యొక్క విలువ $P_0Q_0 = W$ అయితే జీవన వ్యయ ప్రమాణ సూచీ సంఖ్య $= \dfrac{\sum \left(\dfrac{P_1}{P_0} \times 100\right) W}{\sum W}$ అవుతుంది.

W విలువ P_0Q_0 పై సూత్రంలో ప్రతిక్షేపించగా $\dfrac{\sum \left(\dfrac{P_1}{P_0} \times 100\right) P_0Q_0}{\sum P_0Q_0} = \dfrac{\sum P_1Q_0}{\sum P_0Q_0} \times 100$ అవుతుంది.

ఉదా: ఈ క్రింది దత్తాంశాన్ని ఉపయోగించి జీవన వ్యయ ప్రమాణ సూచికను ఎలా నిర్మించాలో చూద్దాం.

వస్తు సముదాయం	సూచీ సంఖ్య (I)	భారాలు (W)	$I \times W$
బియ్యం	150	40	$150 \times 40 = 6000$
దుస్తులు	120	8	$120 \times 8 = 960$
ఇందనం, దీపాలు	135	12	$135 \times 12 = 1620$
ఇంటి అద్దె	95	15	$95 \times 15 = 1425$
ఇతరములు	75	25	$75 \times 25 = 1875$
		$\sum W = 100$	$\sum IW = 11,880$

జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్య

$$= \frac{\sum IW}{W} = \frac{11880}{100} = 118.80$$

ఉదా: ఈ క్రింది దత్తాంశంనకు **1995**కు జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్య కనుక్కుందాం.

వస్తువు	1990		ప్రస్తుత సం॥ ధరలు	P_0Q_0	P_1Q_0
	ధర (P_0)	పరిమాణం(Q_0)	(P_1)		
బియ్యం	20	40	35	800	1400
దుస్తులు	35	7	40	245	280
ఇంధనం, దీపాలు	10	3	15	30	45
ఇంటి అద్దె	12	1	20	12	20
ఇతరములు	25	4	30	100	120

$\sum P_0Q_0$ 1187 $\sum P_1Q_0$ 1865

జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్య $= \dfrac{\sum P_1Q_0}{\sum P_0Q_0} \times 100 = \dfrac{1865}{1187} \times 100 \quad = 157.12$

13.5 సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో ఎదురయ్యే సమస్యలు:

ఈ విభాగంలో వివిధ సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో ఎదురయ్యే సమస్యలను గురించి తెలుసుకుందాం.

సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో ఈ క్రింది విషయాలు ప్రాముఖ్యత వహిస్తాయి.

1. సూచీ సంఖ్యానిర్మాణ ఉద్దేశం.
2. ప్రాతినిధ్యం వహించే వస్తువుల నిర్ణయం
3. ధరల సేకరణ
4. ఆధార సమయ నిర్ణయం
5. ఉపయోగించే సగటు నిర్ణయం
6. ఉపయోగించే భారాల నిర్ణయం
7. ఉపయోగించే సూత్ర నిర్ణయం

1. సూచీ సంఖ్య నిర్మాణ ఉద్దేశం: సూచీ సంఖ్యను ఏ ప్రయోజనం కోసం నిర్మిస్తున్నామో ముందుగా నిర్ణయించుకోవాలి. ఎందుకనగా అన్ని సందర్భాలకూ పనికి వచ్చేలా సూచీ సంఖ్యను నిర్మించటం సాధ్యమయ్యే పని కాదు. వేరు వేరు ప్రయోజనాలకు వేరు వేరు సూచీ సంఖ్యలు నిర్మించాల్సిన అవసరం ఉంటుంది. ఉదాహరణకు వ్యవసాయ ఉత్పత్తిని తెలియజేసే సూచీ సంఖ్యను నిర్మించాలంటే వ్యవసాయ ఉత్పత్తులకు సంబందిన సమాచారాన్ని మాత్రమే పరిగణనలోకి తీసుకోవాలి. వినియోగదారుల సూచీని నిర్మించాలంటే ఒకే స్థాయికి చెందిన వ్యక్తులు ఉపయోగించే వస్తువుల చిల్లర ధరలను మాత్రమే పరిగణించాలి. కాబట్టి ఏ ప్రయోజనం కోసం సూచీ సంఖ్యను నిర్మిస్తున్నామో ముందుగా నిర్ణయించుకోవాలి. అప్పుడే దానికి అనుగుణంగా సమాచారం సేకరించే వీలు అవుతుంది. ఇది కాలాన్ని, ధన వ్యయాన్ని నిరోధిస్తుంది.

(2) సూచీ సంఖ్య నిర్మాణం ముఖ్యోద్దేశం తెలిసిన తరువాత ఆ ఉద్దేశానికి ప్రాతినిధ్యం వహించే వస్తువులనే పరిగణనలోకి తీసుకోవాలి. ఉదాహరణకు ఆర్థిక ఆదాయ వర్గానికి వినియోగించే సూచి నిర్మించేటప్పుడు వారు వాడే వస్తువుల ధరలను మాత్రమే పరిగణించాలి. అన్ని వస్తువుల ధరలు పరిగణనలోకి తీసుకుంటే ఆ సూచీ సంఖ్య అవాస్తవమైన పరిస్థితిని తెలియజేస్తుంది.

(3) సూచీ సంఖ్య నిర్మాణంలో పరిగణించవలసిన వస్తువులు నిర్ణయించిన తదుపరి వాటి ధరలు సేకరించాలి. ఒక్కొక్క వస్తువు ధర ఒక్కొక్క ప్రాంతంలో ఒక్కొక్క రకంగా ఉంటుంది. అన్ని ప్రాంతాల నుండి ధరలు సేకరించటం కష్టం. కాబట్టి పరిస్థితిని బట్టి

ఎక్కడ నుండి ధరలు సేకరించాలో జాగ్రత్తగా నిర్ణయించాలి. ఉదాహరణకు ఒక వస్తువును అది ఉత్పత్తి అయ్యే ప్రాంతంలో తక్కువ ధరకు మిగతా ప్రాంతాలలో ఎక్కువ ధరకు అమ్మటం సహజం. కాబట్టి ఆ వస్తువుల ధరలను నిర్ణీత ధరలకు అయ్యే ప్రదేశాల నుండి ధరలు సేకరించాలి. ఒకే ప్రదేశం నుంచి కాక వేర్వేరు ప్రదేశాల నుండి ధరలు సేకరించి వాటి సగటును సూచీ సంఖ్య నిర్మాణంలో ఉపయోగిస్తే ఫలితం బాగా వుంటుంది.

4. ఆధార సమయ నిర్ణయం: సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో ఆధార సమయం చాలా ప్రాముఖ్యత వహిస్తుందని ముందుగానే తెలుసుకున్నాం. సరైన ఆధార సమయాన్ని ఎన్నుకోకపోతే ఆ సూచీ సంఖ్య సరైన ప్రయోజనాలు ఇవ్వదు. సాధారణంగా ఆధార సమయాన్ని ఎంచుకునేటప్పుడు ఈ క్రింది విషయాలు పరిగణనలోకి తీసుకోవాలి.

ఎ. ఆధార సమయంగా ఎంచుకునే సంవత్సరం అసాధారణమైనది కాకూడదు. అంటే కరువు కాటకాలు, వరదలు, భూకంపాలు, కార్మిక సంక్షోభాలు, ఆర్థిక మాంద్యము, యుద్ధాలు, వ్యాపార అస్థిరత్వాలు మొదలగు అసాదారణ పరిస్థితులు లేని సమయాన్ని ఆధార సమయంగా ఎన్నుకోవాలి. పైన ఉదహరించిన అసాదారణ పరిస్థితులలో ధరలు, ప్రమాణాలు, మిగిలిన సామాజిక వి,యాలు నిలకడ కోల్పోయి అవాస్తవికతను ప్రతిబింబిస్తాయి. కాబట్టి వీటి పై ఆధారపడి నిర్మించిన సూచీ సంఖ్యలకూ అవాస్తవిక పరిస్థితులనే సూచిస్తాయి. కాని నిజమైన పరిస్తితిని తెలియజేయవు. కాని ఒక్కొక్కప్పుడు అవి విధాల సామాన్యంగా ఉంటే సమయాన్ని ఎంచుకోవాటం కష్టం అవుతుంది. అప్పుడు కొన్ని సంవత్సరాల ధరల సగటును ఆధార సంవత్సర విలువగా పరిగణించవచ్చు.

బి. ఆధార సమయం అత్యంత దూరమైనది కాకూడదు. ఎందుకనగా సూచీ సంఖ్యలు స్వల్పకాలిక నిర్ణయాలు తీసుకోవటం లోనూ, ప్రణాళికలు రూపొందించటం లోను తోడ్పడతాయి. కనుక ఆధార సమయం వీలైనంత సన్నిహిత గతంలోనిదై ఉండాలి. ఉదాహరణకు 2000 సం॥లో వినియోగదారుల సూచీ సంఖ్య నిర్మిస్తున్నప్పుడు 1970 సం॥న్ని ఆధార సం॥గా ఎంచుకోవటం సమంజసం కాదు.

5. ఉపయోగించవలసిన సగటును నిర్ణయించుట: సూచీ సంఖ్యలు ఒక రకమైన సగటులని ఈ భాగం మొదటలోనే చెప్పుకున్నాం. సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో ముఖ్యంగా అంకమధ్యమం, మధ్యగతం మరియు గుణమధ్యమంలను ఉపయోగిస్తాం. కాని వివిధ సగటులకు కొన్ని ఉపయోగాలు, కొన్ని పరిమితులు ఉన్నాయి. కాబట్టి మన ఉపయోగించే సగటు ధర్మాన్ని బట్టి సూచీ సంఖ్య నిర్మాణ, ఉద్దేశాన్ని దృష్టిలో పెట్టుకొని సరైన సగటును ఉపయోగించుట వలన మంచి ఫలితం ఉంటుంది.

6. ఉపయోగించవలసిన భారాలు నిర్ణయించుట: అన్ని వస్తువులకు ఒకే ప్రాధాన్యత ఇవ్వటం సమంజసం కాదు. ఆ వస్తువు యొక్క అవసరాన్ని బట్టి దాని ప్రాదాన్యత ఉంటుంది. ప్రాదాన్యతను బట్టి వస్తువులకు భారాలు ఇవ్వాలి. భారిత సూచీ సంఖ్యలు అభారిత సూచీ సంఖ్యల కంటే మేలైనవి.

7. సూత్రం నిర్ణయించుట: సూచీ సంఖ్యలు నిర్మించుటకు అనేక సూత్రాలున్నాయి. ఏ సూత్రం ఉపయోగించాలనేది, ఆ సందర్భాన్ని బట్టి, లభఅయమైన దత్తాంశ స్వరూపాన్ని బట్టి, సూచీ సంఖ్య నిర్మాణ ఉద్దేశాన్ని బట్టి నిర్ణయించాల్సి ఉంటుంది. కొన్ని లక్షణాలు కలిగి ఉన్న సూచీ సంఖ్యలను ఆదర్శ సూచీ సంఖ్యలు అంటారని తరువాత విభాగంలో వివరించటం జరిగింది. అటువంటి లక్షణాలు కలిగి వున్న సూచీ సంఖ్య సూత్రాన్ని ఉపయోగించటం మంచిది.

4.2 పరిమాణ సూచీ సంఖ్యలు:

గడచిన భాగాలలో వివరించిన సూచీ సంఖ్యలని ధరల సూచీ సంఖ్యలంటాం. ధరల సూచీ సంఖ్యలు వస్తువుల ధరలో వచ్చే మార్పులకు ఎలా చేస్తాయో, వస్తువుల ఉత్పత్తి పరిమాణాలలో, వినియోగ పరిమాణంలో పంపిణి పరిమాణంలో వచ్చే మార్పులను పరిమాణ సూచీ సంఖ్య సూచిస్తుంది. ఈ సూచీ సంఖ్యలను ముఖ్యంగా పారిశ్రామిక వ్యవసాయ ఉత్పత్తుల స్థాయిలోని మార్పులు తెలుసుకొంటానికి ఉపయోగిస్తారు. ధరల సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో ఉపయోగించే పద్దతులు ఇక్కడ కూడా ఉపయోగిస్తాం, అయితే వస్తువుల పరిమాణాలు టన్నులు, లీటర్లు, మీటర్లు అని పలురాకులుగా ఉంటాయి. కాబట్టి వీటిని సంఘటితం చేయాలంటే ఇక్కడ సరళ సంఘటిత సూచీ సంఖ్య నిర్మించటం వీలుపడదు.

పరిమాణ సూచీ సంఖ్యలో 'ధరలు' భారాలుగా యిచ్చి సూచీ సంఖ్యలను నిర్మిస్తారు. భారిత పరిమాణ సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో ఉపయోగించే పలు సూత్రాలు ఇలా వుంటాయి.

1. లాస్పియర్ పరిమాణ సూచీ సంఖ్య

$$I_{01} = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 P_0} \times 100$$

2. పాషీ పరిమాణ సూచీ సంఖ్య

$$I_{01} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 P_1} \times 100$$

3. ఫిషర్ పరిమాణ సూచీ సంఖ్య

$$I_{01} = \sqrt{\frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \times \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p}} \times 100$$

4. మార్షల్-ఎడ్జ్‌వర్త్ పరిమాణ సూచీ సంఖ్య

$$I_{01} = \frac{\sum q_1 (P_0 + P_1)}{\sum q_0 (P_0 + P_1)} \times 100$$

5. డ్రాబిష్ - బౌలీ పరిమాణ సూచీ సంఖ్య

$$I_{01} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} + \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_0}\right] \times 100$$

విలువల సూచీ సంఖ్యలు:

వస్తువుల విలువలోని మార్పులను కొలవటానికి ఉపయోగిస్తాం. ఒక వస్తువు యొక్క విలువ దాని ధర మరియు పరిమాణం లబ్దంనకు సమానం అవుతుంది. ఆధార సమయంలో వస్తువుల విలువల మొత్తం $\sum v_0 = \sum p_0 q_0$ అయి, ప్రస్తుత సమయంలో వస్తువు విలువల మొత్తం $\sum v_1 = \sum p\, q_1$ అయితే విలువల సూచీ సంఖ్య $\frac{\sum v_1}{\sum v_0} \times 100 = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} \times 100$ అవుతుంది.

13.8 సూచీ సంఖ్యల కాలశ్రేణులు (*Time series of Index Numers*):

సూచీ సంఖ్యలు ఒక వ్యవస్థకు కాని, వస్తు సముదాయానికి కాని ప్రతి సంవత్సరం నిర్మిస్తే సూచీ సంఖ్యల కాలశ్రేణి ఏర్పడుతుంది. ఉదాహరణకు వినియోగదారుల సూచీ సంఖ్య 1960 సం॥ నుండి 2000 వరకు ఉన్నాయి. వీటిని సమీకరిస్తే మనకు వినియోగదారుల సూచీ సంఖ్య కాల శ్రేణి ఏర్పడుతుంది. ఈ సూచీ సంఖ్యలు కాలశ్రేణుల ఉపయోగించేటప్పుడు మనకు కొన్ని సమస్యలు ఎదురవుతాయి.

13.8.1 ఆధర సమయం మార్పు, బదిలీ (*Base Year shifting*):

సూచీ సంఖ్యల ఆధార సమయంను, వేరొక ఆధార సమయానికి మార్చటాన్ని ఆధార సమయం బదిలి అంటాము. ఎక్కడో దూరంగా ఉన్న సం॥ ఆధార సమయంగా నిర్మించిన సూచీ సంఖ్యలను ఇప్పటి సూచీ సంఖ్యలో పోల్చటం సమంజసం కాదు. (అర్థవంతం కాదు). అందుకని ఆ ఆధార సమయాన్ని సన్నిహిత ప్రస్తుత సమయానికి మార్పు చేయాల్సి ఉంటుంది. ఈరకంగా పాత సూచీ సంఖ్యల శ్రేణిని క్రొత్త సూచీ సంఖ్యల శ్రేణిగా మార్చటం జరుగుతుంది. (ఉదాహరణకు మన దేశంలో *Whole Sale Price Indians* 1970-71 ఆధార సం॥గా ఒక శ్రేణి మరియు 1981-82 ఆధార సం॥గా ఇంకొక శ్రేణి వుంది. 1970-71 శ్రేణిలోని ఒక సూచి సంఖ్యను 81-82 శ్రేణిలోని మరొక సూచీ సంఖ్యతో పోల్చటం వీలుపడదు. కావున 1970-71 ఆధార సమయము సూచీ సంఖ్యల శ్రేణిని 1981-82 ఆధార సమయం శ్రేణిగా మార్చి పోల్చవచ్చు. ఈ క్రింది సూత్రం ఉపయోగించి సూచీ సంఖ్యల ఆధార సమయాన్ని మార్చవచ్చు.

$$\text{క్రొత్త ఆధార సమయం సూచీ సంఖ్య} = \frac{\text{ప్రస్తుత సం॥ సూచీ సంఖ్య పాత ఆధార సమయం}}{\text{క్రొత్త ఆధార సమయం సూచీ సంఖ్య}} \text{x } 100$$

ఉదాహరణ ద్వారా ఆధార సమయం మార్పు ఎలా చేయాలో తెలుసుకుందాం. ఈ క్రింది దత్తాంశములో వినియోగదారుల సూచీ సంఖ్యలు 1981 నుండి 1990 వరకు 1980-81 ఆధార సమయంగా ఇవ్వబడినది. వీటిని 1985 ఆధార సమయం సూచీ సంఖ్యలుగా మార్చుదాం.

సం॥	సూచీ సంఖ్య	సూచీ సంఖ్యలు (1985 సం॥ ఆధారంగా)
1981	105	$\frac{105}{170}\times 100 = 61.76$
1982	111	$\frac{111}{170}\times 100 = 65.29$
1983	129	$\frac{129}{170}\times 100 = 75.88$
1984	165	$\frac{165}{170}\times 100 = 97.06$
1985	170	$\frac{170}{170}\times 100 = 100$
1986	175	$\frac{175}{170}\times 100 = 102.94$
1987	182	$\frac{182}{170}\times 100 = 107.06$
1988	191	$\frac{191}{170}\times 100 = 112.35$
1989	206	$\frac{206}{170}\times 100 = 121.18$
1990	230	$\frac{230}{170}\times 100 = 135.29$

13.8.2 సూచీ సంఖ్యల శ్రేణులను జోడించుట (*Splicing of series of index numbers*):

ఒక్కొక్కప్పుడు అప్పటి వరకు నిర్మించిన సూచీ సంఖ్యల శ్రేణిని ఆపి, వేరొక ఆధార సమయంతో క్రొత్త సూచీ సంఖ్యల శ్రేణిని నిర్మించటం జరుగుతుంది. ఒక్కొక్క సమయంలో ఆర్థిక పరిస్థితులలో వచ్చిన తీవ్రమైన మార్పుల వలన అప్పటి వరకూ నిర్మించిన సూచీ సంఖ్యల శ్రేణిని ఆపి క్రొత్త ఆధార సమయంతో క్రొత్త సూచీ సంఖ్యల శ్రేణిని చయారు తేయటం జరుగుతుంది. ఇటువంటి శ్రేణులను కలిపి ఒకే శ్రేణిగా నిర్మించటాన్ని 'జోడించటం' అంటాం. ఈ క్రింది పద్ధతిని ఉపయోగించి సూచీ సంఖ్యల శ్రేణులను జోడిస్తాం.

ఉదాహరణకు '*A*' అనే సూచీ సంఖ్యల శ్రేణి Y_1 సంవత్సరం ఆధారంగా నిర్మించబడింది అనుకుందాం. దీనిని మొదటి శ్రేణి అనుకుందాం. ఈ శ్రేణి Y_n సంవత్సరం వరకు ఉంది. Y_n సంవత్సరం ఆధారంగా రెండవ సూచీ సంఖ్యల శ్రేణి ఉందనుకుందాం. ఈ రెండవ శ్రేణిని y_1 సంవత్సరం ఆధారంగా మార్చి నిర్మించి రెండు శ్రేణులూ జోడిస్తాం.

సం॥	మొదటి శ్రేణి	రెండవ శ్రేణి	జోడించబడిన రెండవ శ్రేణి	సూచీ సంఖ్య
1970	$I_1=100$		$I_1=100$	
1971	-			
1972	-			
1973	-			
1974	-			
1975	I_n	$x_1=100$	$\frac{I_n}{I_1}\times x_1$	
1976		x_2	$\frac{I_n}{I_1}\times x_2$	
1977		x_3	$\frac{I_n}{I_1}\times x_3$	
1978	-			
1979	-			

ఉదాహరణ: క్రింది దత్తాంశములో రెండు సూచీ సంఖ్యల శ్రేణులు యివ్వబడ్డాయి. మొదటి శ్రేణి 1980 సం॥ ఆధార సమయంగా 1980-85 వరకు ఇవ్వబడింది. రెండవ శ్రేణి 1985 ఆధార సమయంగా 1985 నుండి 1989 వరకు ఇవ్వబడింది. రెండవ సూచీ సంఖ్యల శ్రేణి 1980 ఆధార సం॥ శ్రేణిగా మార్చి మొదట శ్రేణికి జోడించండి.

సం॥	మొదటి శ్రేణ 1980 ఆధార సం॥గా	రెండవ శ్రేణి 1985 ఆధార సం॥గా	జోడించిన సూచీ సంఖ్యల శ్రేణి 1980 ఆధార సం॥
1980	100	--	100
1981	120	--	120
1982	125	--	125
1983	133	--	133
1984	142	--	142
1985	150	100	$\frac{150}{100}\times 100=150.00$
1986		115	$\frac{150}{100}\times 115=172.5$
1987		122	$\frac{150}{100}\times 122=183.0$
1988		140	$\frac{150}{100}\times 140=210.00$
1989		164	$\frac{150}{100}\times 164=246.00$

13.8.3 సూచీ సంఖ్యల ప్రత్యోల్బణం (*Deflation of Index Number*):

మనం సంపాదించిన ద్రవ్యం విలువ, ఆ సమయంలో ధరలు, సేవలలో వచ్చు మార్పుల వలన మారుతూ వుంటుంది. అనగా నిజ ఆదాయం అనగా ద్రవ్యం కొనుగోలు శక్తి వస్తువులు సేవల ధరలు పెరిపోతుంటే, తగ్గుతూ వుంటుంది. ప్రస్తు ద్రవ్య విలువ పై

ధరల మార్పుల వలన వచ్చే ప్రభావాన్ని నిర్మూలించటాన్ని ప్రత్యోల్బణం అంటాం. ప్రత్యోల్బణం ఈ క్రింది సూత్రం ఉపయోగించి చేయవచ్చు.

$$\text{ప్రత్యోల్బణ విలువ} = \frac{\text{ప్రస్తుత విలువ}}{\text{ప్రత్యోల్బణం చేసేది}} \times 100$$

సూచీ సంఖ్య యొక్క విలోమం కొనుగోలు శక్తిని సూచిస్తుంది. ఒక సంవత్సరంలోని ద్రవ్యం యొక్క నిజ విలువ తెలుసుకోవాలంటే ఆ సం॥లో ద్రవ్య విలువను అదే సం॥లో ధరల సూచీ సంఖ్యచే భాగించగా వచ్చిన దానిని 100 చే హెచ్చిస్తే వస్తుంది అంటే

$$\text{ప్రత్యోల్బణ విలువ} = \frac{\text{ప్రస్తుత విలువ}}{\text{ప్రత్యోల్బణం చేసేది}} \times 100 \qquad \text{నిజ జీవిత భత్యం } (Real\ Wages) = \frac{\text{జీత భత్యం}}{\text{సూచీ సంఖ్య}} \times 100$$

ఉదాహరణ ద్వారా విలువలు ఎలా కనుక్కోవాలి తెలుసుకుందాం. క్రింది దత్తాంశంలో పనివారలకు ఇవ్వబడిన జీతం రూ॥లలో మరియు జీవన ప్రమాణ సూచీ సంఖ్యలు ఇవ్వబడ్డాయి. వీటిని ఉపయోగించి పనివారల నిజ జీతం కనుక్కుందాం.

సం॥	**జీతం రూ॥లలో**	**జీవన వ్యయ సూచిక (1990 $= 100$)**	**వాస్తవ జీతం రూ॥లలో**
1990	80	100	$\frac{80}{100}\times 100 = 80$
1991	95	105	$\frac{95}{105}\times 100 = 90.48$
1992	100	120	$\frac{100}{120}\times 100 = 83.33$
1993	112	142	$\frac{112}{142}\times 100 = 78.87$
1994	115	163	$\frac{115}{163}\times 100 = 70.55$
1995	120	175	$\frac{120}{175}\times 100 = 68.57$

13.9 గుర్తుంచుకోవల్సిన విషయాలు:

ఒక ప్రస్తుత సం॥లో ఉన్న పరిస్థితిని ఒక ఆధార సం॥లో ఉన్న పరిస్థితితో పోల్చి వచ్చిన మార్పును అంచనా వేయటానికి సూచీ సంఖ్యలు ఉపయోగిస్తాం. ఈ భాగంలో వివిధ సూచీ సంఖ్యలు, వాటి నిర్మాణం, పద్ధతులు, వాటి నిర్మాణంలో ఎదురయ్యే సమస్యలు వాటి పరిష్కారానికి తీసుకోవల్సిన జాగ్రత్తలు ఆదర్శ సూచీ సంఖ్య లక్షణాలు, అవి ఏ సూచీ సంఖ్యలకు వున్నాయి, సూచీ సంఖ్యల కాల శ్రేణులు వాటిలో ఎదురయ్యే సమస్యలు పరిష్కారం, మనదేశంలో వాడికలో ఉన్న సూచీ సంఖ్యలు వాటి నిర్మాణంను గురించి తెలుసుకున్నాం.

ఈ భాగంలో ప్రవేశ పెట్టిన కొన్ని ముఖ్యమైన విషయాలు తిరిగి పునఃశ్చరణ చేసుకుందాం.

1. **సూచీ సంఖ్య -** ఇది ఒక ప్రత్యేకమైన సగటు. ఒక కాలంలో సంబందిత వస్తువుల ధరలలో గాని, పరిమాణాలలో గాని విలువలలో గాని ఏర్పడిన వ్యత్యాసాన్ని తులనాత్మకంగా పరిశీలించటానికి వాడే సాధనం.
2. **ఆధార సమయం -** ఒక సమయంలో ని ధరలు లేక పరిమాణాలు, సమయాలలోని ధరలు, పరిమాణాతో పోల్చుతున్నప్పుడు ఆ వేరొక సమయాన్ని ఆధార సమయం అంటాం.

3. **సాపేక్ష విలువ -** ప్రస్తుతం ధర P_1, ఆధార సం॥లో ధర P_0 అయితే $\frac{P_1}{P_0} \times 100$ సాపేక్ష విలువ అంటారు.

4. **సరళ (అభారిత) సంఘటిత సూచీ సంఖ్య**

$$I_{01} = \frac{\sum P_1}{\sum P_0} \times 100$$

5. **భారిత సంఘటిత సూచీ సంఖ్య**

$$I_{01} = \frac{\sum P_1 W}{\sum P_0 W} \times 100$$

6. **లాస్పియర్ సూచీ సంఖ్య:** ఆధార సం॥లోని పరిమాణాలు భారాలుగా పరిగణిస్తూ నిర్మించే సూచీ సంఖ్య

$$I_{01} = \frac{\sum P_1 Q_0}{P_0 Q_0} \times 100$$

7. **పాషీ సూచీ సంఖ్య:** ప్రస్తుత సం॥లోని పరిమాణాలు భారాలుగా ఉపయోగిస్తాం.

$$I_{01} = \frac{\sum P_1 Q_1}{P_0 Q_1} \times 100$$

8. **ఫిషర్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్య:** లాస్పియర్ మరియు పాషీ సూచీ సంఖ్యల గుణ మద్యమం.

$$I_{01} = \sqrt{\frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0} \times \frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_0 Q_1}} \times 100$$

9. **డ్రాబిష్ - బౌలి సూచీ సంఖ్య:** లాస్పియర్, పాషీ సూచీ సంఖ్యల అంకమద్యమం

$$I_{01} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0} + \frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_0 Q_1}\right] \times 100$$

10. **మార్షల్ - ఎడ్జ్‌వర్త్ సూచీ సంఖ్య:** ఆధార సం॥ మరియు ప్రస్తుత సం॥లో పరిమాణాల మొత్తం లేక సగటుని భారాలుగా వినియోగించే సూచీ సంఖ్య.

$$I_{01} = \frac{\sum P_1 (Q_0 + Q_1)}{\sum P_0 (Q_0 + Q_1)} \times 100$$

11. **వాల్ష్ సూచీ సంఖ్య:** ఆధార సం॥ మరియు ప్రస్తుత సం॥లోని పరిమాణాల గుణమద్యమాన్ని భారాలుగా పరిగణించి నిర్మించే సూచీ సంఖ్య.

$$I_{01} = \frac{\sum P_1 \sqrt{Q_0 Q_1}}{\sum P_0 \sqrt{Q_0 Q_1}} \times 100$$

12. **కెల్లీ సూచీ సంఖ్య:** 1, 2 లేక 3 సం॥రాలలో వినియోగించిన పరిమాణాల అంక లేక గుణ మద్యమాన్ని భారాలుగా ఉపయోగించి నిర్మించే సూచీ సంఖ్య.

$$I_{01} = \frac{\sum P_1 W}{\sum P_0 W} \times 100$$

13. **కాల విపర్యయ పరీక్ష:** '0' ఆధార సం॥గా '1' ప్రస్తుత సం॥గా నిర్మించిన సూచీ సంఖ్య I_{01}, కాలాన్ని తారుమారు చేయగా అనగా '1' ఆధార సం॥గా, '0' ని ప్రస్తుత సం॥గా భావించి నిర్మించే సూచీ సంఖ్య I_{10} అయితే ఈ రెండు సూచీ సంఖ్యల

లబ్ధం ఒకటి కావాలి. అనగా $I_{01} \times I_{10} = 1$. అప్పుడు I_{01} కాల విపర్యయ న్యాయాన్ని పాటిస్తుంది అంటాం.

14. **కారణాంక తిరోవర్తన పరీక్ష:** ధరల సూచీ సంఖ్య మరియు ఆ పరిమాణాల సూచీ సంఖ్యల లబ్ధము. ప్రస్తుత సం॥లోని మొత్తం విలువలకు ఆధార సం॥లోని మొత్తం విలువలకు గల నిష్పత్తికి సమానం అయితే ఆ సూచీ సంఖ్య కారణాంక తిరోవర్తన న్యాయాన్ని పాటిస్తుంది అంటాం.

   '0' ఆధార సం॥గా '1' ప్రస్తుత సం॥నికి నిర్మించిన సూచీ సంఖ్య I_{01} అయితే , పై సూచీ సంఖ్య ధరలు పరిమాణాలను తారుమారు చేయగా వచ్చిన సూచీ సంఖ్య Q_{01} అయితే $I_{01} \times Q_{01} = \frac{\sum P_1Q_1}{\sum P_0Q_0}$ అయితే I_{01} కారనాంక తిరోవర్తన న్యాయాన్ని పాటించింది అన్నమాట.

15. **చక్రీయ పరీక్ష:** వరుసగా 1, 2, 3.... n సంవత్సరాలు వుంటే

   '1' ఆధార సం॥గా '2' ప్రస్తుత సం॥నికి నిర్మించిన సూచీ సంఖ్య $= I_{12}$

   '2' ఆధార సం॥గా '3' ప్రస్తుత సం॥నికి నిర్మించిన సూచీ సంఖ్య $= I_{23}$

   'n' ఆధార సం॥గా '3' ప్రస్తుత సం॥నికి నిర్మించిన సూచీ సంఖ్య $= I_{n1}$

   $I_{12} \times I_{23} \times ....I_{n\times1} = 1$ అయితే ఆ సూచీ సంఖ్య చక్రీయ న్యాయాన్ని పాటించింది అంటాం.

13.10 అభ్యాస ప్రశ్నలు:

1. సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో ఎదురయ్యే సమస్యలు, తీసుకోవాల్సిన జాగ్రత్తలు వివరించండి.
2. విపర్యయ పరీక్షలను విశదీకరంచి, ఫిషర్ సూచీ సంఖ్య ఆదర్స సూచీ సంఖ్యని నిరూపించండి.
3. సూచీ సంఖ్యలను 'ఆర్థిక భారమితులు' అని ఎందుకంటారు?
4. ఈ క్రింది దత్తాంశానికి 1980 సం॥ ఆధారంగా సరళ సంఘటిత సూచీ సంఖ్యనునిర్మించండి.

వస్తు సముదాయం	ధరలు రూ॥లలో	
	1980	1990
A	150	162
B	210	200
C	230	150
D	106	161

5. ఈ క్రింది దత్తాంశము నుపయోగించి (2000 సం॥నికి) లాస్పియర్, పాషీ, ఫిషర్ మరియు డ్రాబిష్ - బౌలీ సూచీ సంఖ్యలను కనుగొనండి.

వస్తు సముదాయం	1990 సం॥		2000 సం॥	
	ధర	పరిమాణం	ధర	పరిమాణం
A	5	25	10	70
B	14	16	6	35
C	2	40	5	85
D	6	10	9	24

6. ఈ క్రింది దత్తాంశం నుండి ఫిషర్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్యను కనుగొని అది కాల, కారణాంకాల విపర్యయ పరీక్షలను తృప్తి పరుస్తుంది అని చూపండి.

వస్తు సముదాయం	1995 సం॥		2001 సం॥	
	ధర	పరిమాణం	ధర	పరిమాణం
A	20	10	24	8
B	8	15	16	10
C	2	30	6	39
D	5	20	7	30
E	14	12	10	25

7. సూచీ సంఖ్యల ఆధార సం॥ను 1995 మారుస్తూ సూచీ సంఖ్యలు నిర్మించండి.

సంవత్సరం	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
సూచీ సంఖ్య	115	121	140	152	190	220	250	300

8. క్రింది రెండు సూచీ సంఖ్యల శ్రేణులు ఒకటి 1980 ఆధారంగా, రెండవది 1885 ఆధారంగా ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ రెంటిని జోడించి 1980 ఆధార సం॥గా గల సూచీ సంఖ్యల శ్రేణిని నిర్మించండి.

(ఎ) సంవత్సరం	సూచీ సంఖ్య	(బి) సంవత్సరం	సూచీ సంఖ్య
1980	100	1985	100
1981	120	1986	130
1982	118	1987	145
1983	131	1988	200
1984	142	1989	215
1985	150	1990	250

9. ఈ క్రింది దత్తాంశమునసరించి జీవన వ్యయ సూచీ ని నిర్మించండి.

వర్గం	ధరలు		భారాలు
	ఆధార సం॥	ప్రస్తుత సం॥	
ఆహారం	25	34	5
ఇందనం	5	8	1
వస్త్రాలు	15	22	2
ఇంటి అద్దె	10	17	3
ఇతరములు	30	45	1

10. ఈ క్రింది పట్టిక ఒక ప్రాంత ప్రజల జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్య మరియు వారి వేతనం రూ॥లలో ఇవ్వబడింది. జీవన వ్యయంలో పెరుగుదలను పరిగణించి వారి నిజమైన ఆదాయం కనుక్కోండి.

సం॥	1990	1991	1992	1993	1994	1995
జీవన వ్యయం	100	120	145	132	194	210
తలసరి ఆదాయం(రూ॥)	450	560	730	910	1020	1400

13.11 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు:

1. ఈ క్రింది దత్తాంశము నుపయోగించి లాస్పియర్, పాషీ ధరల సూచీ సంఖ్యలను నిర్మించి వాటి గుణాలను విశదీకరించండి.

వస్తు సముదాయం	ఆధార సం॥		ప్రస్తుత సం॥	
	ధర	పరిమాణము	ధర	పరిమాణము
A	*8*	*10*	*7*	*15*
B	*10*	*8*	*12*	*11*
C	*5*	*12*	*6*	*10*
D	*13*	*4*	*15*	*3*

2. క్రింది దత్తాంశమునుపయోగించి ఫిషర్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్య చక్రీయ న్యాయాన్ని సాధిస్తుందో లేదో కనుక్కోండి.

వస్తు సముదాయం	1998		1999		2000	
	ధర	పరిమాణము	ధర	పరిమాణము	ధర	పరిమాణము
A	*4*	*12*	*7*	*10*	*9*	*9*
B	*3*	*20*	*5*	*15*	*6*	*17*
C	*7*	*5*	*10*	*6*	*15*	*8*

3. సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో వచ్చే సమస్యలు వాటి నివారించటానికి తీసుకోవల్సిన జాగ్రత్తలు గురించి తెలపండి.
4. క్రింది పట్టిక హైదరాబాద్‌లోని మధ్య తరగతి కుటుంబాల బడ్జెట్ వివరాలు యివ్వబడ్డాయి. 1995 ఆధార సం॥గా జీవన వ్యయ సూచిక నిర్మించండి.

వస్తు సముదాయాలు	పరిమాణం	1995 సం॥లో ధర (రూ॥లలో)	2000 సం॥లో ధర (రూ॥లలో)
ఆహార పదార్థాలు	30	1250	1700
విద్యుత్ మరియు ఇందనం	15	200	500
దుస్తులు	20	600	750
అద్దె	10	300	400
ఇతరములు	25	500	600

5. మన దేశంలో నిర్మించబడే కొన్ని ప్రత్యేక సూచీ సంఖ్యలను గురించి తెలుపుతూ వాటి ఉపయోగాలు తెలియజేయండి.
6. సూచీ సంఖ్యల శ్రేణులలో ఎదురయ్యే సమస్యలు ఆధారం మార్పు, జోడించటం, ప్రత్యోల్బణం గురించి విశదీకరించండి.
7. ఆదర్శ సూచీ సంఖ్యకు కావల్సిన లక్షణాలు తెలుపుతూ, లాస్పియర్, పాషీ, ఫిషర్ సూచీ సంఖ్యలలో ఆ లక్షణాలు ఉన్నాయో లేదో నిరూపించటం ద్వారా తెలియజేయండి.

13.12 సంప్రదించవలసిన గ్రంథాలు:

1. *S.C. Gupta & V.K. Kapoor : Fundamental of Applied Statistics*
2. *D.C. Sonchetti & V.K.Kapoor : Statistics, theory, methods and applications*
3. *S.P. Gupta : Statistics*
4. *C.B. Gupta : Introduction to statistial methods*

పాఠం సంఖ్య : 14

సంభావ్యత
(Probability)

విషయక్రమం

లక్ష్యం :

ఈ పాఠ్యాంశములో మనము

- సంభావ్యత మీద ఉపోద్ఘాతం, కొన్ని ముఖ్య నిర్వచనము
- సంభావ్యత యొక్క బిన్నపరిశీలనలు
- సంభావ్యత యొక్క గణన పద్ధతులు మొదలైనవి నేర్చుకొంటాము.

14.1 ఉపోద్ఘాతం :

'సంభావ్యత అనే అంశం' సంభావ్యతా సిద్ధాంతం' గణాంకశాస్త్రానికి చాల ముఖ్యమైనవి. 'సంభావ్యత' భావన తొలిసారిగా జూదపు ఆట సంధర్భంలో ఉత్పన్నమైంది. ఫ్రెంచి జూదరి షవలియర్ డిమెయర్ (Chavalier de Mere) , గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు పాస్కల్ (1623-1662)ను, జూదపు ఆటల ఫలితాలను సైద్ధాంతికంగా ఊహించడం ఎట్లా అని ప్రశ్నించడంతో ప్రారంభమై, పాస్కల్, ఫెర్మా(Fermat 1601-1665)ల చర్చల ఫలితంగా 'సంభావ్యత' భావనకు 'సంభావ్యతా సిద్ధాంతానికి నాంది పలికినట్లు అయినది.

14.2 వివిధ నిర్వచనములు:

శాంపుల్ ఆవరణ (Sample Space) :

దాదాపు అన్ని విజ్ఞాన శాస్త్రాలలో ప్రయోగ పరిశీలన ఆవశ్యకత తప్పనిసరి. సాంఖ్యక శాస్త్రంలో కూడ కొన్ని ప్రత్యేక రకాల ప్రయోగాలు తటస్థపడతాయి. ఉదాహరణకు కొన్ని సందర్భాలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదా 14.1 : ఒక నాణేన్ని ఎగరవేయడం అనే ప్రయోగాన్ని తీసుకుందాం. నాణెం దాని అంచు మీద నిలబడనంత సన్నది అనుకుంటే, ఈ ప్రయోగం వల్ల సంభవించదగు రెండు సంఘటనలు నాణెం పై భాగాన కనిపించేది బొమ్మ లేదా బొరుసు. అయితే ప్రయోగం చేయకుండాయే ఫలితం వచ్చేదీ కచ్చితంగా చెప్పలేము. ఇంకా ఈ ప్రయోగాన్ని ఎన్ని సార్లయినా చేయవచ్చు.

ఉదా 14.2 : విద్యుదీపాలు తయారు చేసే ఒక కర్మాగారంలో తయారైన దీపాల జీవన పరిమాణాలు (దీపం వెలిగే సమయం, గంటలలో) తెలుసుకోగలం. అయితే ఇచ్చిన ఒక దీపంకు ఉండే జీవన పరిమాణం ఎంతో దానిని వెలిగించి పరీక్షించకుండా చెప్పలేం.

కాని ఇది $(0, \infty)$ గంటల మధ్య ఎంత అయినా కావచ్చని మాత్రం చెప్పగలం. ఇంకా ప్రతి దీపానికి జీవన పరిమాణాన్ని తెలుసుకోగలం కదా!

పై ఉదాహరణలలో కొన్ని మౌలిక లక్షణాలు ఉమ్మడిగా ఉన్నట్లు చూడవచ్చు. అవి ఏమటంటే ప్రతి ప్రయోగంలోనూ, సంభవించదగు ఫలితాల జాబితా ముందుగానే తెలుస్తున్నది కాని ఒకసారి ప్రయోగం చేస్తే వచ్చే ఫలితం కచ్చితంగా ఇది అని మాత్రం చెప్పవీలులేదు. అంటే ప్రయోగఫలితం అనిశ్చితత్వానికి లోనై ఉంటుంది. తరువాత ప్రయోగాన్ని సదృశ పరిస్థతుల్లో ఎన్ని సార్లయినా చేయవచ్చు. ఇటువంటి ప్రయోగాన్ని యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం లేదా సాంఖ్యక ప్రయోగం అంటాం.

యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం (Random Experiment) లేదా సాంఖ్యక ప్రయోగం (Statistical Experiment) : ఏ ప్రయోగంలో సంభవించదగ్గ అన్ని ఫలితాలు ముందుగా తెలుస్తాయో, ప్రయోగం చెయ్యకుండా దేని ఫలితాన్ని కచ్చితంగా ముందుగానే చెప్పలేమో, సదృశపరిస్థితుల్లో దేనినైతే అనేక సార్లు చేయగలమో అటువంటి ప్రయోగాన్ని యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం లేదా సాంఖ్యకం ప్రయోగం అంటాం.

సంభావ్యత సిద్ధాంతంలో యాదృచ్ఛిక ప్రయోగ ఫలితంలోని సంభవతను అధ్యయంచేస్తాం.

ప్రయోగ ఫలితాల సమూహాన్ని 'Ω' లో సూచిస్తే క్రింది ప్రయోగాలలో Ω స్వరూపాన్ని చూద్దాం. Ω దీనిని ఓమెగా (OMEGA).

ఉదా 14.3 : ఒక పాచిక **(1,2,3,4,5,6** అంకెలలో సూచించిన **6** ముఖాల గల ఒక ఘనం)ను దొర్లించే ప్రయోగాన్ని తీసుకుంటే ఇది యాదృచ్ఛక ప్రయోగమని తెలుస్తుంది కదా! దీని ఫలితాల సమితి.

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ అయింది.

ఉదా 14.4 : ఒక తెలుపు, ఒక నలుపు పాచికలను దొర్లించే ప్రయోగంలో పాచికలపై ముఖతలాలపై ఉండే అంకెల(యుగ్మం) ప్రయోగఫలితం అవుతుంది. కాబట్టి ఇక్కడ పూర్తి ప్రయోగాల ఫలితాల సమితి.

$\Omega = \{(1,1), 1,2), \ldots\ldots\ldots (1,6), (2,1)(2,2), \ldots\ldots\ldots (2,6), \ldots\ldots\ldots (6,1), (6,2), \ldots\ldots\ldots (6,6)\}$

ఉదా 14.5 : వివిధ రంగుల ఉన్న 'r' బంతులను 'n' పెట్టెలలో యాదృచ్ఛికంగా అమర్చే ప్రయోగాన్ని తీసుకుంటే Ω లో ఎన్ని మూలకాలు ఉంటాయి ?

జవాబు : ప్రతి ఒక్కబంతిని n పెట్టెలలో n రకాలుగా ఉండవచ్చు కాబట్టి r బంతుల్ని n^r విధాలుగా పెట్లెల్లో అమర్చవచ్చు. అంతే Ω మూలకాలు n^r ఉంటాయి.

Ω లోని ఉపసమితులపై బీజగణిత పరికర్మలను ఉపయోగించి కొన్ని ప్రత్యేక ఉపసమితుల తరగతులను నిర్వహించి, వాటి ఆధారంగా ప్రయోగానికి సంబంధించిన అర్థవంతమైన విమర్శ చేయవచ్చు. ముంగా సమితుల పరికర్మలను పరిశీలిద్దాం. ఇక పై జరపబడే చర్చలన్నింట్లోనూ తీసుకునే సమితులు Ω కు చెందినవి అనుకుందాం.

ఉదా 14.6 : నాణేన్ని ఎగురవేసి ప్రయోగంలో ఫలితం బొమ్మ అయితే H తోనూ బొరుసు అయితే T తో సూచిస్తే.

$\Omega = \{H,T\}$ అవుతుంది. తర్వాత పైన తెలిపిన విధంగా

$S = \{\{H\}, \{T\}, \{H,T\}, \phi\}$ అవుతుంది

S, కేవలం Ω లోని అన్ని ఉపసమితులు సమూహమని చూడవచ్చు.

ఉదా 14.7 : నాణేన్ని రెండు సార్లు ఎగరవేసే ప్రయోగంలో, రెండు ఫలితాలను క్రమంలో కుండలీకరణాలలో చూపుతున్నప్పుడు.

$\Omega = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T),\}$ అవుతుంది.

ఇంకా $S = \{ \phi, (H,H), (H,T)\}, \{(T,H)\}, \{(T,T)\}, \{(H,H), (H,T)\}$

$\{(H,H), (T,H)\}, \{(H,H), (T,T)\}, \{(H,T), (T,H)\}, \{(T,T), (T,H)\}, \{(T,T), (H,T)\}$

$\{(H,H), (H,T), (T,H)\}, \{(H,H), (H,T), (T,T)\}, \{(H,H), (H,T), T,T)\},$

$\{(H,H), (T,H), (T,T)\}, \{(H,T),(T,H),(T,T), \Omega \}$

ప్రయోగ ఫలితంలో కనీసం ఒక్క బొమ్మ కనిపించడమే ఘటన $\{(H,H), (H,T), (T,H)\}$ మూలకాల సమితిచే సూచితమవుతుంది. ఇదే విధంగా ప్రయోగ ఫలితంలో మహా అయితే ఒక బొమ్మ ఉండే ఘటన $\{(H,T),(T,H),(T,T)$ శాంపుల్ బిందువుల సమితి అవుతుంది.

సంభావ్యతకు సాపేక్ష సమన్వయము :

నిర్వచనం : ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగానికి చెందిన ఏదేని ఒక ఘటనను A తో సూచిస్తాము. M సార్లు ప్రయోగాన్ని జరిపితే, MA సార్లు A అనే ఘటన సంభవించింది అనుకుందాము. MA/M ను A యొక్క సాపేక్ష పౌనఃపున్యము అంటారు.

పై సాపేక్ష పౌనఃపున్యము ప్రయోగాల సంఖ్యను బట్టి మారుతూఉంటున్నప్పటి వాటిలో ఒక సాంఖ్యక క్రమము ఉందని, శాస్త్రజ్ఞులు అనుభవపూర్వకముగా అనేక సంధర్భాలలో తెలుసుకున్నారు. ప్రయోగాలు సంఖ్య అనంతంగా పెంచినకొలది సాపేక్ష పౌనఃపున్యములన్నీ ఒక స్థిరమైన విలువకు మిక్కిలి సమీపంలో ఉండడమే సాంఖ్యక క్రమము అని, ఆ విలువ A యొక్క సంభావ్యత కాగలదని శాస్త్రజ్ఞులు ఊహించినారు.

$$P(A) = \underset{M \to \infty}{Lt} \frac{MA}{M}$$

నిజ జీవితంలో ప్రతి ఒక్కరు 'సంభావ్యత' అనే పదాన్ని వివిధ సంధర్భాలలో పెక్కుసార్లు ఉపయోగిస్తూ ఉంటారు. ఒక ఘటన సంభవనీయతను అంచనా వేయవచ్చును. ఇందుకు మూడు నిర్వచనాలు ఉపయోగిస్తారు. వాటిలో మొదటిది సాంప్రదాయక నిర్వచనం. ఈ నిర్వీచనం ప్రకారం యాదృచ్ఛిక ప్రయోగాన్ని జరపకముందు కొన్ని నియమాలు తృప్తిపడితే ప్రతి సంభవనీయ నిర్వచనం ఆచరణీయం కాదు.

కొన్ని సమయాల్లో ఒక ఘటన సంభావ్యతను యాదృచ్ఛిక ప్రయోగాన్ని చాలాసార్లు జరిపిన తరువాతనే అంచనా వేయగలం. ఇందుకు రెండవదైన సంభావ్యత యొక్క సాంఖ్యక నిర్వచనాన్ని పరిగణలోకి తీసుకుంటాము. ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగాన్ని చాలాసార్లు జరపడం అమిత వ్యయ ప్రయాసలతో కూడి ఉండవచ్చును. అప్పుడు సంభావ్యత యొక్క సాంఖ్యక నిర్వచనం కూడా ఆచరణ యోగ్యంకాదు. పై రెండు నిర్వచనాల కంటే విశిష్టమైన సంభావ్యత యొక్క నిర్వచనం స్వీకృతాల పద్ధతి ద్వారా ఇవ్వగలము.

సంభావ్యత సాంప్రదాయక నిర్వచనము : ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగానికి చెందిన శాంపుల్ ఆవరణలోని ప్రాధమిక ఘటనల సంఖ్య n అనుకుంటే n (A) ప్రాధమిక ఘటనలు A అనే ఘటనకు అనుకూలమైతే

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}$$

ఒక సౌష్ఠవ నాణెమును ఎగురవేస్తే బొమ్మ పడడానికి సంభావ్యత ఎంత **?**

శాంపుల్ ఆవరణము $\Omega = \{H,T\}$

శాంపుల్ ఆవరణములోని ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్య = **2**

బొమ్మ పడడానికి అనుకూల ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్య =1

A బొమ్మపడడం

కాబట్టి $P(A) = 1/2$

ఒక పాచికను ఎగురవేస్తే సరిసంఖ్య రావడానికి సంభావ్యత ఎంత **?**

శాంపుల్ ఆవరణము $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

A : సరిసంఖ్య రావడం

అనుకూల ప్రాథమిక ఘటనలు $\{2\}, \{4\}, \{6\}$

శాంపుల్ ఆవరణంలోని ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్య : **6**

అనుకూల ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్య : **3**

కాబట్టి : $P(A) = 3/6 = 1/2$

నియత సంభావ్యత : $A, B \in T$, $P(A) \neq 0$ అనుకొండి . B అనే ఘటన A అనే ఘటన పైన ఆధారపడితే $P(B/A)$ ని A జరిగినపుడు B సంభావ్యత అని పిలుస్తారు. B అనే ఘటన A పై ఆధారపడకపోతే $P(B/A) = P(B)$ అని వ్రాస్తాము. ఇదే విధంగా $P(A/B)$ నిర్వచించవచ్చు.

$P(B/A)$, $P(A/B)$ లను నియత సంభావ్యతలు అని పిలుస్తారు. బాగుగా కలుపబడిన **52** పేక ముక్కల నుండి ఒక ముక్కను యాదృచ్ఛికంగా తీసినారు. రాజు వచ్చినది అని చెబితే అది ఎరుపు రంగు పేకముక్క అగుటకు సంభావ్యత ఎంత **?**

A: పేక ముక్క రాజు అవడం

B: పేక ముక్క ఎరుపు అవడం

B సంభావ్యత గణించడమంటే, B దృష్ట్యా శాంపుల్ ఆవరణంలోని ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్య, **52** ను హారములోని అనుకూల ఘటనల సంఖ్య **26**ను లవములోను తీసుకోవడం అవుతుంది.

అంటే $P(B) = 26/52 = 1/2$

వచ్చిన పేకముక్క రాజు అని చెబితే. శాంపుల్ ఆవరణంలో కేవలం **4** ప్రాథమిక ఘటనలుంటాయి. అందులో రెండు ముక్కలు ఎర్రగ ఉంటాయి గనుక

$P(B/A) = 2/4 = 1/2$

$P(B/A) = P(B)$

సమ సంభవ ఘటనలు : ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగానికి చెందిన ఘటనలు సమ సంభావ్యత అయినప్పుడు వాటిని సమ

సంభవఘటనలు అని పిలుస్తారు.

సౌష్టవమైన ఒక నాణెమును ఎగురవేస్తే బొమ్మ పడుటకు ఎంత అవకాశమునదో, బొరుసు పడడానికి కూడా అంతే అవకాశమున్నది. కావున 'బొమ్మపడడం, 'బొరుసుపడడం' లను సమసంభవ ఘటనలుగా భావించాలి.

పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు : ఒక ప్రయోగానికి చెందిన శాంపుల్ ఆవరణంలో A,B లు ఘటనలు, A యొక్క రాక B యొక్కరాకను నిరోధించినట్లయితే A, B లను పరస్పర వివర్ణత ఘటనలు అని అంటారు.

బాగుగా కలుపబడిన పేకముక్కలు నుండి పేక ముక్కను యాదృచ్ఛికంగా తీస్తే ఏ పేక ముక్క రావడానికైనా ఒకే అవకాశమున్నదని ఊహించవచ్చు వచ్చిన ముక్క మిగతా ముక్కలరాకను నిరోధిస్తుంది.

అనుకూల ప్రాధమిక ఘటనలు : ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం యొక్క శాంపుల్ ఆవరణములో ఒక ఘటన సంభవానికి అనుకూలాంగా ఉండే ప్రాధమిక ఘటనలను అనుకూల ప్రాధమిక ఘటనలుగా పేర్కొంటాము.

పాచికను యాదృచ్ఛికంగా విసిరే ప్రయోగంలో 'సరిసంఖ్యరావడం' అనే ఘటన సంభవానికి అనుకూలంగా ఉంటే శాంపుల్ ఆవరణలోని ప్రాధమిక ఘటనలు : 2రావడం, 4రావడం, 6రావడం.

సంభావ్యతా స్వీకృతాలు (Axioms of Probability): ఇప్పుడు స్వీకృత పద్ధతిన సంభావ్యత భావాన్ని వివరించి దాని ధర్మాలను అధ్యయనం చేద్దాం. ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగానికి సంబంధించిన మాపనీయ అంతరాళం (Ω, S) తీసుకుందాం. క్రింద స్వీకృత్వాలకు కట్టుబడి (Ω, S) పై నిర్వచింపబడిన 'P' సమితి ప్రయేయాన్ని సంభావ్యతామితి లేదా సంభావ్యత అని కొల్మొగోరోవ్ వివరించాడు.

ఇకపై ఉదాహరింపబడే సమితులు S కు చెందినవిగా భావిద్దాం

స్వీకృతాలు :

i) $P(A) \geq 0, \ \forall A \in S$

ii) $P(\Omega) = 1$

iii) $P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} Ai\right) = \dfrac{\sum^{\infty}}{j=1} P(A_j),\ (A_j \cap A_k = \phi,\ j \neq k)\ j,k = 1,2,.....$ లకు

గమనిక : 1. ఘటన A సంభావ్యతకు P(A) సంకేతం ఇది రుణాత్మకం కాదని స్వీకృతం (i) చెబుతుంది.

2. ఏదో ఒక ఘటన జరగడానికి సంభావ్యత ఒకటి అని స్వీకృతం (ii) చెబుతుంది. దీన్ని నార్మింగ్ (Norming) స్వీకృతం అంటాం.

3. స్వీకృతం (iii) ను గణసాధ్య సంకలనీయత (Countable Additivity) అంటారు.

4. P(A) ఒక సమితి, ఒక సమితి ప్రమేయం.

5. P పరిమితి సంకలన (Finite Additivity) ధర్మాన్ని కలిగి ఉంటుందని సులభంగా చూడవచ్చు.

కాబట్టి S కు చెందిన సమతులపై నిర్వచించబడి రుణాత్మకంగాని, గణసాధ్యసంకలనీయతా ధర్మం కలిగి నార్మ్‌చేయబడిన 'P' ప్రమేయం ఒక సమితి. దీనిని సంభావ్యతగా వర్ణించవచ్చు.

లక్షణాలు :

లక్షణం 1 : $P(\phi) = 0$

లక్షణం 2 : సంభావ్యతా ప్రమేయం P కు పరిమితి సంకలన ధర్మం ఉంటుంది.

లక్షణం 3 : $P(A^*) = 1 - P(A)$

లక్షణం 4 : $A \subset B$ అయితే $P(A) \leq P(B)$

లక్షణం 5 : $\phi \subset A \subset \Omega$ కాబట్టి పై ఫలితం నుండి $0 \leq P(A) \leq 1$

లక్షణం 6 : సంకలన సూత్రం

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(AB), \forall \; A,B$$

ఈ ఫలితం నుండి, $P(AB) \geq 0$ కాబట్టి $P(AUB) = P(A) + P(B)$ అనే సార్వత్రికంగా ఒక ఉపఫలితం.

ఉదా 14.8:

ఉదా : 5లో $A = \{(1,1), (2,1),(3,1), (4,1). (5,1)\}$

$B = \{(1,2), (2,2),(3,2)\}$ గా తీసుకుందాం Ω లోని మూలకాలన్నీ సమసంభావాలు అనుకుందాం అంతే ప్రతిఘటన సంభావ్యత 1/36 అప్పుడు $P(A) = 5/36$, $P(B) = 3/36$, $A \cap B = \phi$ కాబట్టి $A \cap B = 0$ మరియు

$P(AUB) = 5/36 + 3/36 = 8/36$ అయింది.

ఉదా 14.9 : ఉదాహరణ 16లో Ω లోని ప్రతిమూలకానికి **1/4** సంభావ్యతను ఆపాదిస్తే

$A = \{(H,H), (H,T)\}$

$B = \{(H,H), (T,H)\}$ ఘటనలకు

$P(A) = P(B) = 1/2$

$P(A \cap B) = 1/4$

$P(AUB) = 1/2 + 1/2 +- 1/4 = 3/4$

ఉదా 14.10 : ఒకే నాణేన్ని రెండు సార్లు ఎగురవేసే ప్రయోగంలో $\Omega = \{(H,T), (H,H), (T,T), (T,H)\}$ అని చూశాం సమ సంభావ్యతా నిర్దేశితం ప్రకారం ఇందులోని ప్రతి మూలకానికి సంభావ్యత **1/4**

నిర్వచనం : r పరిమాణం కల ప్రతిరూపం

n మూలకాలు $(a_1, a_2, ... a_n)$ లో r మూలకాల్ని ఒక క్రమ సదిశ $(a_{i1}, a_{i2}, ... a_{in})$గా రాస్తే వచ్చే దాన్ని r పరిమాణం కల క్రమ ప్రతిరూపం అంటాం.

ఒక మూలకం తర్వాత ఇంకో మూలకాన్ని ఎన్నుకుంటూ క్రమ ప్రతిరూపాన్ని నిర్మిస్తే ప్రత్యేకంగా రెండు సందర్భాలు సాంఖ్యకశాస్త్రంలో తటస్థపడతాయి. అవి (i) ఒకసారి మూలకాన్ని ఎన్నుకున్న తర్వాత తిరిగి దాన్ని సమిష్టిలో ఉంచేయడం చేస్తూ

కావలసినన్ని మూలకాలను యాదృచ్ఛికంగా తీసుకోవడాన్ని, "తిరిగి ఉంచే" లేదా "పునఃస్థాపిత" (with replacement) ప్రతిరూప గ్రహణ పద్ధతి అంటాం. ఈ పద్ధతినతీసిన ప్రతిరూపంలో ఒక మూలకం ఎన్నిసార్లయినా కనిపించవచ్చు. తర్వాత ఎంత పరిమాణంకల ప్రతిరూపాన్నయినా గ్రహించవీలవుతుంది ఈ సందర్భంలో r పరిమాణం కల ప్రతిరూపాలు n^r ఉంటాయని సులభంగా చూడవచ్చు.

(ii) ఒకసారి మూలకాన్ని ఎన్నుకున్న తర్వాత తిరిగి దాన్ని సమిష్టిలో ఉంచకుండా ఉండే పద్ధతిలో యాదృచ్ఛికంగా మూలకాన్ని తీసుకోవడాన్ని "తిరిగి ఉంచని" లేదా పునఃస్థాపితం కాని (without replacement) ప్రతిరూప గ్రహణ పద్ధతి అంటాం. ఈ పద్ధతిన గ్రహించిన ప్రతిరూపంలో ఒక మూలకం ఒక్కసారి మాత్రమే కనిపిస్తుంది. తర్వాత సమష్టి పరిమాణామానికి మించిన పరిమాణం కల ప్రతిరూపం తీయడానికి వీలుపడదు. సమష్టిలో n మూలకాలు ఉండే (r < n) పరిమాణం కల ప్రతిరూపాల సంఖ్య $n(n-1)(n-r+1) = {}^np_r$ అవుతుంది. అందువల్ల ఈ విషయాన్ని సూత్రం 2 లో పొందుపరుద్దాం.

సూత్రం 2 : n పరిమాణం కల సమిష్టి నుండి r పరిమాణం కల ప్రతిరూపాన్ని

i) 'తిరిగి ఉంచే' పద్ధతిలో n^r విధములగా తీయవచ్చు ఇంకా $r \geq n$ కావచ్చు

ii) 'తిరిగి ఉంచిని' పద్ధతిలో npr విధాలుగా తీయవచ్చు కాని $r \leq n$ కావాలి.

ఉదా 14.11: 'తిరిగి ఉంచే' పద్ధతిలో n వస్తువుల నుండి 'r' వస్తువుల్ని యాదృచ్ఛికంగా తీస్తే, ఏ వస్తువు ఒక సారికి మించి రాకపోవడానికి సంభావ్యతి ${}^np_r/nr$ అవుతుంది.

ఉదా 14.12 : n బంతుల్ని n పెట్టెలలో యాదృచ్ఛికంగా ఉంచామనుకుందాం. అప్పుడు ప్రతి పెట్టెలో బంతి ఉండడానికి సంభావ్యత పై ఉదాహరణ నుండి $n^!/n^n$ అని వస్తుంది.

ఉదా 14.13 : 'r' విద్యార్థులున్న ఒక తరగతిని తీసుకుందాం. విద్యార్థుల పుట్టినరోజులు సంవత్సరంలోని 365 రోజుల్లో 'r' పరిమాణం కల ఒక ప్రతిరూపం అవుతుంది. అప్పుడు విద్యార్థులు పుట్టిన రోజులన్నీ భిన్నమైనవి కావడానికి సంభావ్యత $365Pr/(365)^r$ అవుతుందని గ్రహించవచ్చు.

ఉదా 14.14 : బ్రిడ్జ్ పేకాటలో ఒక ఆటగాడికి వచ్చే 13 ముక్కాలలో 2 ఇస్పేట్లు 7 ఆఠీన్లు, 3 డైమన్లు, 1 కళావరు ఉండడానికి సంభావ్యత ఎంత.

సాధన : 52 ముక్కల్లో 13 ముక్కలు వచ్చేందుకు మొత్తం అవకాశాలు $\binom{52}{13}$ ఇస్పేటు ముక్కలలో, 13 ఇస్పేట్లు ముక్కలలో 2 ఇస్పేట్లు రావడానికి అవకాశాలు $\binom{13}{2}$ ఆఠీను ముక్కల్లో 7 ఆఠీను ముక్కలు రావడానికి అవకాశాలు $\binom{13}{7}$ 13 డైమను ముక్కల్లో 3 డైమన్లు రావడానికి అవకాశాలు $\binom{13}{3}$ 13 కళావరు ముక్కల్లో 1 కళావరు రావడానికి అవకాశాలు కాగా $\binom{13}{1}$ కావలసిన ఘటన జరగడానికి ఏ రెండు ఇస్పేట్లు, ఏ 7 ఆఠీన్లు, ఏ 3డైమన్లు, ఏ కళావరు అయినా రావచ్చు కాబట్టి. అటువంటి అమరికకు మొత్తం అవకాశాల సంఖ్య $\binom{13}{2}\binom{13}{7}\binom{13}{1}\binom{13}{3}$ అవుతుంది కాబట్టి ఈ ఘటనకు సంభావ్యత

$$\binom{13}{2}\binom{13}{7}\binom{13}{1}\ \binom{13}{3}\binom{52}{13}$$

ఉదా 14.15: ఒక సంచికలో 5 ఎర్రని, 3 ఆకుపచ్చని, 2 నీలం, 4 తెల్లని బంతులున్నాయి. ఒకసారి తీసినవి తిరిగి సంచిలో పెట్టకుండా, యాదృచ్ఛికంగా 8 బంతుల్ని తీస్తే వాటిలో 2 ఎర్రని, 2 ఆకుపచ్చని, 1 నీలం, 3 తెల్లని బంతులు ఉండడానికి సంభావ్యత ఎంత ?

సాధన : పై ఉదాహరణలో మాదిరిగా ఈ ఘటనకుండే సంభావ్యత

$$\frac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{2}{1}\binom{4}{3}}{\binom{14}{8}}$$ అని గ్రహించవచ్చు.

14.3 నియత సంభావ్యత (Conditional Probability):

బేయీ సిద్ధాంతం (Bayes Theorem): కొన్ని సందర్భాలలో ఒక ఘటన A సంభవించిందని తెలిసినప్పుడు ఆ సమాచారాన్ని ఉపయోగించి ఇష్ట ఘటన B కుండే సంభావ్యతను నిర్ధారించడంలో మనకు కుతూహలం ఉంటుంది. ఈ విషయం గురించి విపులీకరించే ముందు కొన్ని ఉదాహరణలను చూద్దాం.

ఉదా 14.16 : A గుర్తు గల పెట్టెలో ఒక తెల్లబంతి, రెండు నల్ల బంతులు, B గుర్తు గల పెట్టెలో ఒక నల్ల బంతి, రెండు తెల్ల బంతులున్నాయి. నిష్పాక్షికమైన నాణేన్ని ఎగురవేయగా బొమ్మ వస్తే A పెట్టె నుండి, బొరుసు వస్తే B పెట్టెనుంచి యాదృచ్ఛికంగా ఒక బంతి తీయబడుతుంది. నల్లబంతి తీయడం అన్న ఘటనను E తో గుర్తించుదాం. బొమ్మను H, బొరుసును T, i- వ పెట్టెనుంచి, j- వ నల్ల బంతిని bij i, j = 1,2 లకు i వ పెట్టె నుంచి j వ తెల్లబంతిని wi j, i,j = 1,2 లకు గుర్తులతో సూచిస్తే ఈ ప్రయోగపు ఫలితాల పూర్తి జాబితా.

Ω = [Hb11, Bb12, Bw11, Tb21, Tw21, Tw22] అవుతుంది కాబట్టి

P[నల్లబంతి తీయడం] = P(E) = P{Hb11, Hb12, Tb21} = 3/6 = 1/2

కాని నాణేం ఎగురవేయగా బొమ్మ వస్తే బంతిని A పెట్టెనుండే తీస్తాం కాబట్టి బొమ్మ వచ్చిందన్న నిబంధన పై P(E) = 2/3

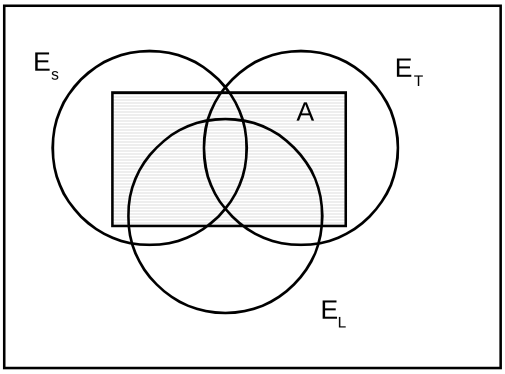
P{బొమ్మ రావడం, నల్లబంతితీయడం} = 2/6 = 1/3, P[బొమ్మరావడం] = 1/2 కావడం బొమ్మవచ్చిందన్న నిబందనపై P(E) అంటే E యొక్క నియత సంభావ్యత

$$\frac{P\{\text{బొమ్మరావడం నల్లబంతి} \cap \text{తీయడం}\}}{P\{\text{బొమ్మరావడం}\}}$$

బేయిస్ సిద్ధాంతము :

E1, E2 .... En లు పరస్పర వియుక్త ఘటనలు

P(Ei) $\neq 0$, i= 1,2,........ n)



$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ ఏదేని ఒక ఘటన అయినప్పుడు P(A) > 0 అయితే

P[Ei/A] = $\dfrac{P(Ei)P(A/Ei)}{\sum_{i=1}^{n} P(Ei)P(A/Ei)}$ అని నిరూపించండి

ఉదా 14.15 : మొదటి పెట్టెలో 1 తెలుపు, 2 నలుపు మరియు 3 ఎర్రబంతులు, రెండవపెట్టెలో 2 తెలుపు, 1 నలుపు మరియు ఒక ఎరుపు, మూడవ పెట్టెలో 4 తెలుపు 5 నలుపు మరియు 3 ఎర్రని బంతులున్నాయి. ఒక యాదృచ్ఛికంగా గ్రహించబడిన పెట్టెనుండి రెండు బంతులను యాదృచ్ఛికంగా తీసినారు. అవి ఒక తెలుపు, ఒక ఎరుపు బంతులయితే ఆ రెండు బంతులు మొదటి పెట్టె నుండి తీయబడడానికి సంభావ్యత ఎంత ?

E1 : మొదటి పెట్టె తీసుకొనబడడం

A : రెండు బంతులలో ఒక తెలుపు మరియు యొకటి ఎరుపు కావడం

సంభావ్యత కనుగొనవలసిన ఘటన E1/A

P(E1) = 1/3

E_2 = 1/3 రెండవ పెట్టె తీసుకొనబడడం

$P(E_2) = 1/3$

అవుతుంది.

E_2 = మూడవ పెట్టె తీసుకొనబడడం

$P(E_3) = 1/3$

$P(A/E_1) = \dfrac{{}^1c_1 \text{ X } {}^3c_1}{{}^6c_2}$

$P(A/E_2) = \dfrac{{}^2c_1 \text{ X } {}^3c_1}{{}^6c_2}$

$P(A/E_3) = \frac{{}^4c_1 \times {}^3c_1}{{}^{12}c_2}$

$\sum_{i=1}^{3} P(E_i)\, P(A/E_i) = 1/3 \times 1/5 + 1/3 \times 1/3 + 1/3 \times 2/11 = 1/15 + 1/9 + 2/33$

$P(E_1)\, P(A/E_1) = 1/3 \times 1/5 = 1/15$

$P(E_1/A) = \frac{1/15}{1/15 + 1/9 + 2/33} = \frac{1/15}{33 + 55 + 30/495} = \frac{1}{15} \times \frac{495}{118} = \frac{33}{118}$

ఉదా 14.17 : ఒక కర్మాగారంలో తయారు చేయబడే బోల్టులలో వరుసగా **25%, 35%, 440%** బోల్టులను A,B,C అనే యంత్రాలనుపయోగించి తయారుచేస్తారు. వాటిలో వరుసగా 5%, 4%, 2% బోల్టులు నాణ్యత లోపించి ఉంటాయి. ఒక బోల్టును యాదృచ్ఛికంగా తీసుకుంటే అది నాణ్యతలోపించి ఉన్నది. అది A అనే యంత్రం ద్వారా తయారయి ఉండడానికి సంభావ్యత ఎంత**?**

E_1 బోల్టు మొదటి యంత్రం ద్వారా తయారు చేయబడి ఉండడం

E_2 బోల్టు రెండవ యంత్రం ద్వారా తయారు చేయబడి ఉండడం.

E_3 బోల్టు మూడవ యంత్రం ద్వారా తయారుచేయబడి ఉండడం.

$P(E_1) = 25/100 = 1/4$

$P(E_3) = 40/100 = 2/5$

$P(E_4) = 20/100 = 1/5$

E = (యాదృచ్ఛికంగా తీసుకోబడిన) బోల్టు నాణ్యత లేకుండా ఉండడం,

సంభావ్యతి కనుగొనవలసిన ఘటన E_1/e

$P(E/E_1) = 5/100 = 1/20 = 0.05$

$P(E/E_2) = 4/100 = 0.04$

$P(E/E_3) = 2/100 = 0.02$

$= \sum_{i=1}^{3} P(E/E_i)\,(E_i) = 1/4 \times 0.05 + 2/5\ 0.04 + 1/5 \times 0.02$

$= P(E_i)\,(E/E_i) = 1/4 \times 0.05$

$$P(E_1/E) = \frac{P(E_1)P(E/E_1)}{\sum_{i=1}^{n} P(E/E_i)P(E_1)}$$

$$= \frac{1/4x0.05}{1/4x0.05 + 2/5x0.04 + 1/5x0.02}$$

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం యొక్క శాంపుల్ ఆవరణంకు , శాంపుల్ ఆవరణం యొక్క ఉపసమితుల ద్వారా నిర్మితమైన ఘటనల క్షేత్రం T అయితే

$$\forall \quad A, B \in T$$

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

A,B వియుక్తి సమితులు అయితే

$(A \cap B) = \phi$ అవుతుంది కావున

$$P(AUB) = P(A) + P(B)$$

ఉదా 14.18 : బాగుగా కలుపబడిన **52** పేకముక్కల నుండి ఒక ముక్క యాదృచ్ఛికంగా తీసుకోనబడింది. అది స్పేడ్‌గానీ, ఆసుగానీ అగుటకు సంభావ్యత ఎంత **?**

A : తీసుకొనబడిన పేకముక్క స్పేడ్ కావడం

B : తీసుకొనబడిన పేకముక్క ఆసు కావడం

'$(A \cap B)$: తీసుకోబడిన పేకముక్క స్పేడు మరియు ఆసుకావడం

AUB : తీసుకోబడిన పేకముక్క స్పేడు మరియు ఆసుకావడం.

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

శాంపుల్ ఆవరణలో **52** ప్రాధమిక ఘటనలున్నాయి.

అందులో స్పేడు ముక్కలు **13** కావున, స్పేడు రావడానికి అనుకూల ప్రాధమిక ఘటనల సంఖ్య **13** అవుతుంది.

$P(A) = 13/52$

తీసుకురావడానికి అనుకూల ఘటనల సంఖ్య **: 4**

$P(B) = 4/52$

స్పేడు, ఆసురావడానికి అనుకూల ఘటనల సంఖ్య **:1**

P'$(A \cap B)$ = 1/52

$P(AUB) = 13/52 + 4/32 - 1/52 = 4/13$

ఉదా 14:19 : ఒక పెట్టెలో **1,2చ3,4** అంకెలు గల నాలుగు చీటీలు, వేరొక పెట్టెలో **2,4,6,7,8,9** అంకెలు గల ఆరు చీటీలు ఉన్నాయి.

ఒక పెట్టెను యాదృచ్ఛికంగా తీసుకొని, ఆపెట్టె నుండి ఒక చీటీని యాదృచ్ఛికంగా తీసుకుంటే, ఆ చీటీపైన అంకె 2 గానీ 4 గానీ అగుటకు సంభావ్యత ఎంత ?

A : మొదటి పెట్టెను తీసుకురావడం, దాని నుండి తీయబడిన చీటీలో 2గానీ, 4 గానీ ఉండడం.

B : రెండవ పెట్టెను తీసుకురావడం, దానని నుండి 2 గానీ, 4గానీ ఉన్న చీటీతీయడం.

A : $A_1 \cap A_2$

A_1 : మొదటిపెట్టెను తీయడం

A_2 : మొదటి పెట్టెనుండి 2గానీ, 4గానీ రాయడం

$P(A) : P(A_1)\, P(A_2/A_1)$

B : $B_1 \cap B_2$

B_1 : రెండవ పెట్టె తీయడం

B_2 : దానీ నుండి 2 గానీ, 4 గానీ రావడం

$P(B) : P(B_1)\, P(B_2/B_1)$ A,B లు పరస్పర విసర్జితాలు

AUB ఒక పెట్టెను దానినుండి ఒక చీటీని తీస్తే అది 2గానీ, 4గానీ కావడం.

$P(AUB) = P(A)+P(B)$

$= P(A_1)+P(A_2/A_1)+P(B_1)\, P(B_2/B_1)$

$= 1/2\ .2/4 + 1/2\ .\ 2/6 = 5/12$

ఉదా 14.20 : ఒక సమస్యను ఇద్దరు విద్యార్థులు వేరువేరుగా సాధించేందుకు సంభావ్యతలు 3/7, 7/12, ఆసమస్య సాధించబడేందుకు సంభావ్యత ఎంత ?

A : మొదటి విద్యార్థి సమస్యను సాధించడం.

B : రెండవ విద్యార్థి సమస్యను సాధించడం.

AUB : సమస్య సాధించబడడం.

$(AUB)^c : A^C \cap B^C$ సమస్య సాధించబడక పోవడం

$P(AUB) = 1 - P(A^C \cap B^C) = 1 - P(A^C) - P(B^C) = 1 - 4/7 - 5/12 = 16/21$

ఉదా 14.21 : ఒక సంచిలో 6 తెలుపు, 9 నలుపు బంతులున్నాయి. ఆ సంచి నుండి నాలుగు బంతులను యాదృచ్ఛికంగా తీస్తే మొదటి ప్రయత్నంలో అవి అన్నీ తెల్లబంతులు, రెండవ ప్రయత్నంలో అవి అన్నీ నల్లబంతులవడానికి, క్రిందివి నిజమైనపుడు, సంభావ్యతను కనుక్కొండి.

(i) మొదటి ప్రయత్నంలో తీసిన బంతులను తిరిగి సంచిలో ఉంచినపుడు

(ii) మొదటి ప్రయత్నంలో తీసిన బంతులను తిరిగి సంచిలో ఉంచనపుడు.

(i) A : మొదటి ప్రయత్నంలో నాలుగు తెల్లబంతులు రావడం

B : రెండవ ప్రయత్నంలో నాలుగు నల్లబంతులు రావడం

15 బంతులనుండి **4** బంతులను ${}^{15}C_4$ రకాలుగా తీయవచ్చు

$$P(A) = \frac{{}^{6}C_4}{{}^{15}C_4}$$

9 నల్లబంతులనుండి **4** బంతులను ${}^{9}C_4$ రకాలుగా తీయవచ్చు

$$P(B) = \frac{{}^{6}C_4}{{}^{15}C_4}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$= \frac{{}^{6}C_4}{{}^{15}C_4} \times \frac{{}^{6}C_4}{{}^{15}C_4} =$$

(ii) మొదటి ప్రయత్నలలో వచ్చిన బంతులను ${}^{11}C_4$ రకాలుగా తీయవచ్చు మొదటి ప్రయత్నంలో వచ్చినవి **4** తెల్లబంతులు కాబట్టి **9**నల్లబంతులు నుండి **4** నల్లబంతులను ${}^{9}C_4$ రకాలుగా తీయవచ్చు

$$P(A) = \frac{{}^{6}C_4}{{}^{15}C_4}$$

$$P(B/A) = \frac{{}^{9}C_4}{{}^{11}C_4}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{{}^{6}C_4}{{}^{15}C_4} \times \frac{{}^{9}C_4}{{}^{11}C_4}$$

ఉదా 14.22 : రెండు నిష్పాక్షిక నాణేల్ని ఎగరవేసే ప్రయోగానికి

$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$

ఇప్పుడు A = { రెండు నాణేలు ఒకే ముఖాన్ని చూపడం}

B = { కనీసం ఒక్క నాణేమైనా H ను చూపడం}

అనుకుంటే P(A) = 2/4

ఇంకా B జరిగిందన్నప్పుడు (TT ప్రయోగ ఫలితం కాదు కాబట్టి) A జరగడానికి

సంభావ్యత **1/3** అని చూడగలము. ఇక్కడ కూడా

P { B జరిగిందని తెలిస్తే A జరగడం } = $\frac{1}{3}=\frac{1/4}{3/4}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ అని గమనించాలి

నిర్వచనం:

స్వాతంత్రత (Independence) **లేక సాంఖ్యక స్వతంత్రత (Statistical Independence) :** రెండు ఘటనలు A,B లను $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ అయితే A, B లను స్వతంత్ర ఘటనలు లేదా సాంఖ్యక స్వతంత్ర ఘటనలు అంటాం.

ఫలితం : A, B లు స్వతంత్ర ఘటనలైతే A*, B లు

A, B* లు A*, B* లు కూడా స్వతంత్రమైనవి అవుతాయి.

14.4 సారాంశము:

సంభావ్యత అనగా, ఒక ఘటన ఏర్పడటానికి కావలసిన అవకాశము. యాధృచ్ఛికంగా జరిగే వివిధ ఘటనలను ఆధారం చేసుకొని విషయ నిర్ధరణ కావించుటకు సంభావ్యత గణన చాలా అవసరము సాంప్రదాయక మరియు సాపేక్ష సంభావ్యత భావనలను గురించి తెలుసుకోన్నాము. రెండింటిలోను ఒకేమాదిరి నియమాలనుబట్టి సంభావ్యత స్వీకృతాలు రచించి తద్వారా సంభావ్యతను నిర్వచించారు. నియత సంభావ్యత, బేయిస్ సిద్ధాంతమును సోదాహరణముగా చదివినాము. వీటిని వివిధ క్లిష్టతరమైన ఘటనల సంభవ నియతనుబట్టి ఉపయోగిస్తాము.

14.5 గుర్తుంచుకోవలసిన అంశాలు :

సంభావ్యత విలువ ఎప్పుడు 0 నుండి 1 మధ్యలోనే ఉండవలెను.

14.6 స్వయం సమీక్షా ప్రశ్నలు

1. ముగ్గురు పిల్లలు వున్న కుటుంబాలను అధ్యయనం చేసే సందర్భంలో పిల్లల వయస్సుల ఆరోహణ క్రమంతో వారు మగో, ఆడో గుర్తిస్తే ప్రతి రూప అంతరాళం రాయండి.
2. ఒక పెట్టెలో 5 తెల్లని, 4 నల్లని బంతులున్నాయి. దీని నుంచి 4 బంతుల్ని తీసి రెండోపెట్టెలో వేసి దాని నుంచి ఒక బంతిని తీసి చూడగా అది నల్లనిది అయింది. రెండో పెట్టెలో మిగిలిన 3 బంతుల నుంచి మళ్ళీ ఒక బంతిని తీస్తే అది తెల్లనిది కావడానికి సంభావ్యత ఎంత.
3. ఒక సంభావ్యతా అంతరాళానికి సంబంధించిన ఘటనలు A,B స్వతంత్ర ఘటనలు అయి $P(A)=\frac{1}{3}, P(B)=\frac{3}{4}$ అయితే $(i)P(A\cup B)$ (ii) $P(A/A\cup B)$ (iii) $P(B/A\cup B)$ లను గణన చేయండి.
4. చెట్టు మీది జామపండును ఒక కుర్రవాడు ఒకసారి రాయి వేసి పడకొట్టడానికి సంభావ్యత $\frac{1}{4}$ అయితే ఆ కుర్రవాడు నాలుగుసార్లు ప్రయత్నించి జామపండును పడకొట్టడానికి సంభావ్యత ఎంత?

14.7 చదువవలసిన పుస్తకాలు :

1. Fundamentals of Mathematical Statistics : S.G. Gupta & V.K. Kappor, Publisher S. Chand & Co
2. Basic Statistics by B.L. Agarwal, Third Edition, New Age International (P) Limited.

పాఠం : 15

సైద్ధాంతిక విభాజనాలు

(Theoritial Distributions)

విషయక్రమం

లక్ష్యం :

ఈ పాఠ్యంశములో మనము

- యాదృచ్ఛిక చలరాశులు, విచ్ఛిన్న మరియు అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశులు
- సంభావ్యత విభాజనము విచ్ఛిన్న మరియు అవిచ్ఛిన్న సంభావ్యత విభాజనాలు
- ద్విపద విభాజనం, పాయిజాన్ విభాజనం
- సామాన్య విభాజనాల లక్షణాలు గురించి చదువుకుంటుము.

15.1 ఉపోద్ఘాతం:

సాదారణంగా మన అనుభంలో కేవలం ప్రయోగ ఫలితాలను పరిశీలించడంకాక, వాటిపై నిర్వచించబడ్డ ప్రమేయాల్ని ఆధ్యయనం జరుగుతుంది.

ఉదాహరణకు ఒక నాణేన్ని n సార్లు ఎగురవేస్తే బొమ్మ లేదా బొరుసు ఎన్ని సార్లు సంభవించిందో తెలుసుకోవడంలో కుతూహలం ఉంటుంది. కాని మొత్త సంభవించ దగ్గ 2n ఫలితాలలో ఒక ఫలితర H (బొమ్మకు), T (బొరుసుకు) గుర్తులతో ఏర్పడ్డ ఒక n సదిశ కాగా ఏ ఫలితం వచ్చింది అన్న దానితో మనకు కుతూహలం ఉండదు. అయితే ఈ ఫలితానికి సంబంధించి ఒక ప్రమేయ విలువ ఏమటిన్నది మనకు ముఖ్యం. ఒక ఫలితంలో H వచ్చిన దానికొక ఉదాహరణ.

అటువంటి ప్రమేయాలను ఆధ్యయనం చేయవలసిన అవసరం యాదృచ్ఛిక చలరాశి భావనకు దారి తీస్తుంది.

విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి : X అనే చలరాశి X11, X12 .... Xn అనే విలువలను వరుసగా P11, P21 .... Pn అనే సంభావ్యతలతో P1 + P2 + ... PK=1 అయ్యేటట్లు తీసుకుంటే X ను విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి అని, X యొక్క విభాజనాన్ని విచ్ఛిన్న విభాజనం అని P(X=Xi) = Pi ని సంభావ్యతా ప్రమేయమని అంటాము.

రెండు సౌష్టవమైన పాచికలను విసిరితే, వాటి మీద చుక్కల మొత్తాన్ని X తో సూచిస్తే, మనకు క్రింది విచ్ఛిన్న విభాజనం ఉత్పన్నమవుతుంది.

X :	2	3	4	5	6	7	8	9
P(X) :	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36
X :	10	11	12					
P(X) :	3/36	2/36	1/36					

అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి : X అనే చలరాశి ఒక అవిచ్ఛిన్న సమితిలోని విలువలన్నింటకీ తీసుకొంటుంది అని అనుకుందాం. ఒక ప్రతిరూపం యొక్క సాపేక్ష పౌనఃపున్య క్రమభుజి, ప్రతిరూపం లోనికి అభిసరణ చెందితే, ఒక అవిచ్ఛిన్న వక్రమవుతుంది. అట్టి అవిచ్ఛిన్న వక్రము యొక్క గణిత స్వరూపాన్ని $y = f(x)$ గా వ్రాస్తాము.

y = f(x) అనే వక్రము మరియు X అక్షముచే పరిబద్ధము అయిన ప్రదేశము యొక్క విలువ 'ఒకటి' అవుతుంది. చుక్కలతో చూపబడిన ప్రదేశాన్ని $P(a \le x \le b)$ గా వ్రాస్తాము. y = f(x) ను సంభావ్యతా సాంద్రతా ప్రమేయం, X ను అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి అంటారు.

15.2 విచ్ఛిన్న విభజనాలు (Discrete Distributions):

ద్విపద విభాజనాన్ని జేమ్సు బెర్నూలి ప్రతిపాదించారు. అందువల్ల ఈ విభాజనానికి వారి పేరు బెర్నూలి విభాజనల అని కూడా మరోపేరు. 1713 లో ఈ విభాజనం గురించి బెర్నూలి తొలిసారిగా తన గ్రంథం "The Ars Conjectandi" లో విశదీకరించారు.

ద్విపత విభాజనం సైద్ధాంతిక విభాజనాల్లో చాలా ప్రాముఖ్యత కలిగి ఉంది. ఉదాహరణకు , సాంఘిక విజ్ఞాన శాస్త్ర రంగాల్లో, వ్యాపార, వాణిజ్య రంగాల్లో ఈ విభాజనం యొక్క అనువర్తనాలు ఎంతో ఉపయోగకరంగా ఉంటాయి. ఇందుకు ఒక ఉదాహరణ తీసుకుందాం. విద్యుత్ పరిశ్రమలో 10 శాతం బల్బులు లోపభూష్టమైనవిగా కనుక్కోబడ్డాయి. 50 బల్బులు ప్రతిరూపాన్ని యాదృచ్ఛికంగా తీసుకుంటే దానిలో ఒక లోపమైన బల్బు ఉండడానికి సంభావ్యత కనుక్కోవడానికి ద్విపద విభాజనం ఉపయోగపడుతుంది. ఇంకా సాంఖ్యక గుణ నియంత్రం (Statistical Quality) లో p, np నియంత్రణ పటాలు నిర్మాణంలో కూడా ఈ విభాజన ఉపయోగపడుతుంది.

యత్నాలన్నీ స్వతంత్రంగా ఉన్నప్పుడు ప్రతి యత్నంలోనూ సఫలం, విఫలం అనే రెండు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు (Mutually Exclusive Events) మాత్రమే ఉన్నప్పుడూ, ప్రతి యత్నంలోనూ సఫల స్థిరంగా ఉన్నప్పుడు ద్విపద విభాజనం ఉపయోగాస్తాం.

ఇప్పుడూ, ముందుగా బెర్నూలి ప్రయత్నాన్ని గురించి తెలుసుకుందాం.

నిర్వచనం : ఒక ప్రయోగంలోని ఫలితాలు రెండే రెండు పరస్పర వివర్జాత పరిపూర్ణ ఫలితాలై (Mutually exclusive and exhaustive out comes) ఆ ప్రయోగాన్ని ఎన్ని సార్లుస్వతంత్రంగా పునారావృతం చేసినా, ప్రతి ప్రయత్నంలోని ఫలితం సంభావ్యత సమానమైతే , అటువంటి ప్రయోగ ప్రయత్నాన్ని బెర్నూలీ ప్రయత్నం (Bernoulli Trail) అంటారు.

బెర్నూలీ ప్రయత్నానికి అనువైన ప్రసిద్ధమైన ఉదాహరణ, నాణేన్ని ఎగురవేయడం, ఒక పాచికను ఎగురవేసునప్పుడు, ఏదో ఒక ఘటనను సఫలంగానూ మిగిలినవన్నీ విఫలంగానూ పరిగణిస్తే. ఆ ప్రయోగం బెర్నూలి యత్నానికి మరొక ఉదాహరణ అవుతుంది.

కాబట్టి బెర్నూలీ యాదృశ్చిక చలరాశి యొక్క ఆశంసిత విలువ (Expected value) P విస్తృతి PQ అవుతుంది.

నిర్వచనం : ఏదైనా రుణాత్మకం కాని విచ్ఛిన్న యాదృశ్చిక చలరాశి X సంభావ్యతా ద్రవ్య ప్రమేయం.

$P(X=x) = ncx\, px\ q\, n\text{-}x, x = 0,1,........n; \quad p, q \geq 0, p+q = 1$

ద్వారా సూచించబడినప్పుడు, ఆ చలరాశిని ద్విపద చలరాశి (Binomial Variable) అనీ, దాని విభాజనం ద్విపద విభాజనమనే అంటారు.

ద్విపద లక్షణాలు: X విభాజనం B(x = n, p) గా సూచిద్దాం.

ద్విపద విభాజనం ఆశంసిత విలువ (Expected Value) $\mu_1^{1} = E(x) = np$

ద్విపద విభాజనం విస్తృతి (Variance) $V(x) = npq$

క్రమ విచలనం $\sigma = +\sqrt{npq}$

సూచన : ప్రయత్నాల సంఖ్య 'n' అనంతంగా పెంచితే (అంటే $n \to +\infty$ అయితే), $B_1 \to 0,\ B_2 \to 3,\ \gamma_1 \to 0,$ $\gamma_2 \to 0$ అవుతాయి. కాబట్టి $n \to \infty$ అయినప్పుడు ద్విపర విభాజనం సామాన్య విభాజనానికి (Normal Distribution) అభిసరణ చెందుతుంది.

స్వతంత్ర ద్విపద యాదృశ్చిక చలరాశుల సంకలన ధర్మం

(Additive property of independent Binomial Variables)

x, y లు రెండు ద్విపద యాదృచ్ఛిక చలరాశులు

$x \sim B\,(x = n1, p)$

$y \sim B\,(y = n2, p)$ అని తీసుకుందాము.

అప్పుడు

$\phi x(t) = (q+peit)n1$

$\phi y(t) = (q+peit)n2$

అవుతాయి.

x,y లు వరుస క్రమంలో (n1, p), (n2, p) పరామితులలో స్వతంత్ర ద్విపద చలరాశులైతే, (x+y) యాదృచ్ఛిక చలరాశి మితులు (n1+n2, p) అవుతాయి.

సార్వత్రికంగా x : (i=1,2, ... k) లు k స్వతంత్ర ద్విపద యాదృచ్ఛిక చలరాశులై

Xi N B(x:ni, p) అయితే $x : \sim B(x = ni, p)$ లు $\sum_{i}^{K} xi = x1+x2+ .... +xk$ కూడ ద్విపద యాదృచ్ఛిక చలరాశి B(n1+n2+............+nk, p) అవుతుందని గమనించాలి.

ముఖ్య గమనిక : రెండు స్వతంత్ర ద్విపద యాదృచ్ఛిక చలరాశుల భేదం ద్విపద చలరాశి కాదు.

ఉదాహరణ 15.1: ఒక ప్రక్కన 2,రెండో ప్రక్కన 3 గుర్తించబడిన 5 సౌష్టవ నాణాలు ఉన్నాయి. వాటిని ఎగురవేసినప్పుడు మొత్తం 12 రావటానికి సంభావ్యత ఎంత ?

జవాబు : మొత్తం 12 రావటానికి రెండు నాణాలు మీద 3 అంకెలు మూడు నాణాల మీద 2 అంకెలు , ఉండేటట్లు నాణాలు పడాలి. నాణాలు సౌష్టవం కాబట్టి, వాటి మీద 3 పడటానికి సంభావ్యత (P) = వాటి మీద 2 పడటానికి సంభావ్యత (q) = 1/2

5 నాణాలను ఎడర వేసినప్పుడు మొత్తం 12 రావటానికి

సంభావ్యత = 5C2 (1/2)2 (1/2)3 = 5/16

ఉదాహరణ 15.2: పారిశ్రామిక కార్మికులకు ఒకానొక వ్యాది సోకటానికి 20% అవకాశం ఉంది. పరీక్షించిన 6 మంది కార్మికులలో కనీసం నలుగురికన్నా ఆ వ్యాధి సోకటానికి సంభావ్యత ఎంత ?

జవాబు : వ్యాధి సోకటానికి సంభావ్యత = P = 20/100 =1/5 వ్యాధి సోకకుండా ఉండటానికి సంభావ్యత q = 1-1/3 = 4/3

కనీసం నలుగురు ఉన్నా వ్యాధి సోకటానికి సంభావ్యత

$= p(x \geq 4) = p(x=4)+p(x=5) + p(x=6)$

= 6C2 (1/5)4 (4/5)2 + 6C5 (1/5)5 (4/5) + 6C6 (1/5)6 (4/5)2

ఉదాహరణ 15.3: ఒక ప్రాంతంలో మంచు 30 రోజుల్లో 10 రోజులు కురిస్తే

(i) ఒక వారంలో కనీసం మూడు రోజులు మంచుకురిసేందుకు

(ii) ఒక వారంలో ముందు మూడు రోజులు మంచు లేకుండా తరువాత మంచు కురవడానికి సంభావ్యతలను కనుక్కోండి?

జవాబు : ఏదైనా ఒక రోజు మంచు కురవడానికి సంభావ్యత P = 10/30 =1/3

q = 1-p

= 1- 1/3 = 2/3

ఒక వారంలో అధమం 3 రోజులు మంచు కురవడానికి సంభావ్యత

$= P(x \geq 3) = 1 - P(x<2)$

= 1- [P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)]

= 1- [7C0 (1/3)0 (2/3)7-0 + 7C1 (1/3)1 (2/3)7-1 + 7C2 (1/3)2 (2/3)7-2]

= 0.4294

ii) మొదటి మూడు రోజులు మంచు లేకుండా తరువాత మంచు కురవడానికి సంభావ్యత = qqq. pppp

= (2/3)3. (1/3)4

= 0.0037

15.3 పాయిసన్ విభాజనము :

పాయిసన్ విభాజనాన్ని ఫ్రాన్స్ దేశంకు చెందిన గణిత శాస్త్రవేత్త సైమన్ డెనిస్ పాయిసన్ 1837 లో కనుగొన్నారు.పాయిసన్ విభాజనం ప్రముఖ విభాజనాలలో ఒకటి, పలు సంధర్భాలలో ఈ విభాజనం ప్రయోజనకరంగా ఉపయోగపడుతుంది. ఉదాహరణకు, సాంఖ్యక గుణ నియంత్రణలో, నియంత్రణ పటాల నిర్మాణంలో, నియంత్రణ అవధుల గణనకు ఈ విభాజనం ప్రయోగపడుతుంది. ఇంకా దత్త ఫలితం సంభావ్యత చాలా తక్కువగా ఉండి, అవకాశ ఆవరణ చాలా ఎక్కువగా ఉండే క్రింది సంధర్భాలలో ఈ విభాజనం ఉపయోగపడును.

1. గుండెజబ్బు లేదా కాన్సరు మొదలైన వ్యాధులలో వచ్చే దావుల సంఖ్య.
2. ఏదైనా ఒక పట్టణంలో జరిగిన ఆత్మహత్యల సంఖ్య.
3. ఒక కర్మాగారం నుండి తయారు చేసిన వస్తువులలోని లోపాల సంఖ్య .
4. 100 బ్లేడ్ల ప్రాకెట్టులోని పనికి రాని బ్లేడ్ల సంఖ్య.
5. ఒక కాల పరామానంలో జరిగే ప్రయాదాల సంఖ్య.
6. మొదటి అచ్చులో వచ్చే అచ్చు తప్పుల సంఖ్య .
7. ఒక వీధిలో 'l' కాలంలో పయనించే కారుల సంఖ్య
8. 't' సమయంలో నశించే రేడియో పరమాణువుల సంఖ్య.
9. ఏదైనా ఒక కాలపరిమాణంలో ఒక టెలిఫోన్, టెలిఫోన్ ఎక్స్చేంజిలో అందుకున్న పిలుపులు.
10. ఏదైనా ఒక ఉపరాతలాన్ని తగిలిన బాంబు శకలాల సంఖ్య పై సంధర్భాలలో ఉదాహరణలు మరింకెన్నో కూడా చెప్పవచ్చు.

పాయిజన్ విభాజనం కింది నియమాలను తృప్తి పరుచు ద్విపద విభాజనం యొక్క హద్దుగా కూడా రాబట్టవచ్చు.

(i) ద్విపద విభాజనంలో ని ప్రయత్నాల సంఖ్య అనంతం (అంటే) $n \to \propto$

(ii) ద్విపద విభాజనంలోని సంభావ్యత P అపరిమితమేన చిన్నది. (అంటే $P \to 0$)

(iii) $n \to a$, $p \to 0$ అయిన n, p స్థిరరాశి, = n>0 అయి ఉండాలి.

ద్విపద మాదృచ్ఛిక చలరాశి సంభావ్యత ద్రవ్య ప్రమేయం

P(X =x) = nCx px qn-x ; X= 0,1,2, ... n

$$= \frac{n(n-1)(n-2)-(n-x+1)}{x!} \text{ px(1-p)n-x}$$

$$= \frac{n(n-\frac{1}{n})(n-\frac{2}{n}).......(1-\frac{x+1}{n})}{x!}(\cap P)^{x}(1-P)^{a-n}$$

పైన చెప్పిన 1,2,3 లను తృప్తి పరిస్తే, అంటే

$n \to a, P \to 0, \cap P = \lambda$ స్థిరరాశి

Lt P(X=x), If (1-1/n)(1-2/n) .... (1-x-1/n) .... λ x (1- λ /n)n-x, x!

$P \to 0$

$\cap P = \lambda$ స్థిరరాశి

$$= \frac{\lambda x}{xi} \text{ Lt } [(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})..........(1-(\frac{x-1}{n})] = (1-\frac{\lambda}{n})^{n-x}$$

$$= \frac{\lambda x}{xi} \text{ Lt } [(1-\frac{\lambda}{n})^{n} + (1-\frac{\lambda}{n})^{a}] = \frac{\lambda x}{xi} \text{ C - } \lambda$$

$$= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad x = 0,1,2, ...$$ అవుతుంది.

ఉదా 15.4: ఒక సౌష్టవమైన పాచికను ఐదుసార్లు వచ్చుటకు సంభావ్యత కనుక్కోండి.

$n = 5$

$x = 3$ అ సంఖ్య

$x= 0,1,2,3,4,5$

3 వస్తేసఫలం (s)

సంభావ్యత కనుగోనవలసిప ఘటన : {x=2}

P[x=2] = (5/2) (1/6)2 (5/6)6-2

= 10 x 1`/36 x 125/216 = 625/3888

15.4 అవిచ్ఛిన్న విభాజనాలు (Continuous Distribution):

క్రిందటి పాఠంలో ద్విపద విభాజనం , పాయిజాన్ విభాజనం వంటి విచ్ఛిన్న విభజనాల గురించి చదివినాము. ఈ పాఠంలో , సామాన్య విభాజనం (Normal Distribution) అనే అవిచ్ఛిన్న విభాజనం గురించి చదువుతాము.

సామాన్య విభాజనం (Normal Distribution):

ప్రతిరూప సంఖ్యా శాస్త్రంలో (Sample Statistics) స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక చలరాశుల విభాజనాలు తెలియక పోయినా, ప్రతి రూప అంకమధ్యమాల (Sample Mens) విభాజనం, ప్రతి రూప పరిమాణం (Sample Size) పెద్దదిగా ఉన్నప్పుడు, సుమారుగా సామాన్య విభాజనాన్ని అనుసరిస్తుంది. ఈ లక్షణం గుణ నియంత్రణం (Quality Control) లో ఎంతో ఉపయోగపడుతుంది.

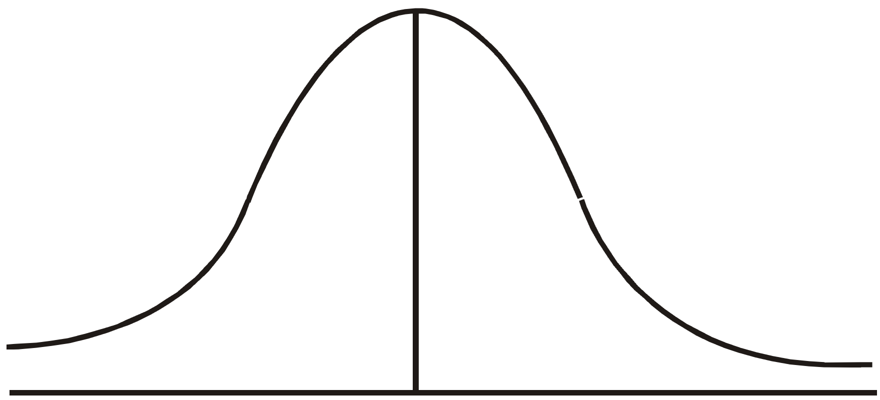
నిర్వచనం : ఒకానొక అవిచ్ఛిన్న మాదృచ్ఛిక చలరాశి X కింది సంభావ్యత సాంద్రతా ప్రమేయాన్ని

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma}.e^{\frac{-1}{2}\sum\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

అనుసరిస్తున్నది అనుకుంటే μ అంకమధ్యమంగాను σ^2 విస్తృతి గాను కల్గిన సామాన్య యాదృచ్ఛిక చలరాశి అని, దాని విభాజనాన్ని సామాన్య విభాజనం అని అంటారు. దీన్ని $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ తో సూచిస్తారు.

గమనిక : μ, σ అనే రెండు పరామితులు సామాన్య విభాజనాన్ని సంపూర్ణంగా నిర్ధారిస్తాయి.

సామాన్య విభాజనం లక్షణాలు : సామాన్య రేఖా పటం ముఖ్య లక్షణాలు (Features)



(పటం)

$x = \mu$ దగ్గర ఉన్న ద్వితీయ నిరూపకం నుంచి సామాన్య విభాజన రేఖాపటంపై పటంలో లాగే సౌష్ఠవంగా ఉంటుంది. x విలువ ఎక్కువగా పెరుగుతుంటే, y విలువ వేగంగా క్షీణిస్తూ ఉంటుంది. అంకమధ్యమం నుంచి రెండు వైపులా ఈ వక్రం అనంతంగా విస్తరించి ఉంటుంది. $x = \mu$ అయితే y నిరూపకం గరిష్ఠం (Maximum) అవుతుంది. అప్పుడు ఆ గరిష్ఠ y నిరూపకం = $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}$ అవుతుంది. $x = \mu$ దగ్గర ద్వితీయ నిరూపకం సామాన్య నిరూపకం సామాన్య వక్రం కింద ఉన్న వైశాల్యాన్ని ఖచ్చితంగా రెండు వైపుల సమభాగాలు చేస్తుంది.

సామాన్య విభాజనం అశంశిత విలువ , విస్తృతి:

E(x)	=	μ
విస్తృతి V(x)	=	σ^2
అశంశిత విలువ	=	μ
విస్తృతి	=	σ^2

సామాన్య విభాజనం బహుళకం (Mode):

λ = μ ఛసామాన్య విభాజనం బహుళకం

బహుళకం = μ

సామాన్య విభాజన మధ్యగతం (Median):

మధ్యగతం = μ

సామాన్య విభాజనంలో అంకమధ్యమం, బహుళకం,మధ్యగతం ఎప్పుడూ సమానంంగా ఉంటాయి. అందువల్ల ఈ విభాజనం సౌష్ఠవ విభాజనం అవుతుంది.

సామాన్య విభాజనం అసౌష్ఠవ గుణకం (Coefficient of Skewness):

$$\beta = \frac{\mu_4}{\mu^2{}_2} = \frac{3\sigma^4}{(\sigma^2)^2} = 3$$

ఉదాహరణ 15.5: సైనికుల ఎత్తులు 68.22 అంగుళాలు సరాసరి, 10.8 అంగుళాలు విస్తృతి గల సామాన్య విభాజనాన్ని అనుసరిస్తే, 1000 మంది సైనికులతో ఎంతో మంది 6 అడుగుల కంటే పొడుగ్గా ఉంటారు ?

జవాబు : అంగుళలలో ఎత్తులను X తో సూచిద్దాం, అప్పుడు $X \sim N(68.22, 10.8)$ అవుతుంది.

X=6 అడుగులు =72 అంగుళాలు అయితే ,

$$Z = \frac{x - m}{\sigma}$$

$$= \frac{72 - 68.22}{\sqrt{10.8}}$$

$$= 1.15$$

$$P(X>12) = P(Z>1.15)$$

కాని $P(Z>11.15) = 0.5 - P(0 \leq Z < 1.15)$

$$= 0.5 - 0.3746 = 0.1254$$

కాబట్టి 1000 మంది సైనికులలో , 6 అడుగుల కంటే ఎక్కువ ఉన్న వారి సంఖ్య = $1000 \times 0.1254 \approx 125$

15.5 సారాంశము : యాదృచ్ఛిక చలరాశి, విచ్ఛిన మరియు అవిచ్ఛిన చలరాశుల గురించి తెలుసుకొన్నాము. సైద్ధాంతిక విభాజనములలో విచ్ఛిన సంభావ్యత విభాజనలు, అవిచ్ఛిన సంభావ్యత విభాజనాలు తెలుసుకొన్నాము. వీటిలో ద్విపద విభాజనము, పాయిజాన్ విభాజనము మరియు సామాన్య విభాజనముల గురించి తెలుసుకొన్నాము. ఈ విభాజనముల యొక్క ఘాతికలను మరియు వాటి లక్షణములను నేర్చుకొన్నాము. ఈ విభాజనముల యొక్క ఉపయోగములు వాటి తీరుతెన్నులు పరిశీలన చేసినాము.

15.6 గుర్తుంచుకోవలసిన అంశాలు:

$B(X:n,p)$కు β_1, β_2 విలువలు p,q విలువలను తారుమారు చేసిన ఒకటిగానే ఉంటాయి. పాయిజన్ విభాజనము ఆశంసిత విలువ, విస్తృతి రెండూ ఎల్లప్పుడూ సమానం. వాటి విలువ పాయిజన్ విభాజన పరిమితి.

15.7 స్వయం సమీక్షా ప్రశ్నలు :

1. x, y లు వరుస క్రమంలో $B\left(5,\frac{1}{2}\right)$ $B\left(7,\frac{1}{2}\right)$అనే రెండు స్వతంత్ర ద్విపద యాదృచ్ఛిక చలరాశులైతే $P(x+y=3)$ను కనుక్కోండి.
2. ఒక అసొష్టవ పాచికను ఎగరవేసినప్పుడు, 10 సార్లు ఎగరవేయడంలో 5 సరిసంఖ్యల సంభావ్యత 4 సరిసంఖ్యల సంభావ్యత రెట్టింపునకు సమానం. ఒక్కొక్కసారి పడే పాచికల చొప్పున 10,000 సార్లు ఎగరవేస్తే ఎన్నిసార్లు సరిసంఖ్యరాకుండా ఉంటుంది.
3. x, y లు రెండు స్వతంత్ర పాయిజన్ చలరాశులు $P(x=1)=P(x=2)$, $P(y=2)=P(y=3)$ అయితే $v(x-2y)$ను కనుక్కోండి.
4. ఒక పాయిజాన్ విభాజనం పరామితి 1 అయితే దాని అంకమద్యమము నుండి మధ్యమ విచలనము క్రమవిచలనానికి $\frac{2}{e}$రెట్లుగా ఉంటుందని చూపండి.
5. సైనికుల ఎత్తులు 68.22 అంగుళాలు సరాసరి, 10.8 అంగుళాలు విస్తృతి గల సామాన్య విభాజనాన్ని అనుసరిస్తే 1000 మంది సైనికులలో ఎంతమంది 6 అడుగుల కంటే పొడుగ్గా ఉంటారు?
6. ఒక సామాన్య విభాజనంలో 7% విలువలు 35 కంటే తక్కువగానూ 89% విలువలు 63 కంటే తక్కువగా ఉంటే ఆ సామాన్య అంకమధ్యమాన్ని క్రమవిచలనాన్ని కనుక్కోండి.

15.8 చదువవలసిన పుస్తకాలు

1. Fundamentals of Mathematical Statistics : S.C. Gupta & V.K. Kapoor, Publisher S. Chand & Co.
2. Basic Statistics by B.L. Agarwal, Third Edition, New Age International (P) Limited.

పాఠం 16 పరికల్పనా పరీక్షలు (*Tests of Hypothesis*)

ఉద్దేశాలు

ఈ పాఠ్యభాగం చదివిన తరువాత ఈ క్రింది అంశాలపై మనకు అవగాహన ఏర్పడుతుంది.

* శూన్య పరికల్పన, ప్రత్యామ్నాయ పరికల్పన, మొదట రకం దోషం, రెండల రకం దోషం, సార్థకతాస్థాయి, సందిగ్ధ విలువలు
* బృహత్ ప్రతిరూపాలలో సార్థకతా పరీక్షలు
* లఘు ప్రతిరూపాలలో సార్థకతా పరీక్షలు
* కై - స్క్వేర్ - పరీక్ష
* F - పరీక్ష మరియు
* సాంఖ్యక అంచనా పద్ధతులు

విషయక్రమం

16.1 పరిచయం:

జనాభా లేక సమిష్టి (*Population*) యొక్క స్థిరరాశులను పరామితులు (*Parameters*) అంటారు. ఉదాహరణకు సమిష్టి అంకమధ్యమం, క్రమ విచలనం మొ॥ వాటిని పరామితులు అంటాం. సామాన్యంగా పరామితుల విలువలు తెలియవు. ప్రతిరూపాల విలువల (*Sampling Values*) ఆధారంగా పరామితుల అంచనాధారాలు (*Estimates*)ను కనుక్కుంటాం, ప్రతిరూపాల అంకమధ్యమం, క్రమవిచలనం మొ॥ వాటిని సాంఖ్యకాలు (*Statistic*) అని అంటారు.

పరికల్పన (*Hypothesis*) అనగా ఒక సమిష్టి పరామితికి నిర్ణయించబడిన విలువ లేక షరతుల గురించిన ప్రవచనం (*Statement*) కావచ్చు, లేక రెండు సమిష్టుల పరామితుల మధ్య సంబంధాన్ని తెలియజేసే ప్రవచనమైనా కావచ్చు. సామాన్యంగా పరికల్పనను ముందుగానే ఏర్పరుస్తాము. ప్రేక్షిత (*Observed*) దత్తాంశము ఆధారంగా, ఒక పరీక్షా పద్ధతి (*Test Procedure*)ని అనుసరించి, నిర్ణయించిన లేక, ముందుగానే ఏర్పరచిన పరికల్పనను అంగీకరించటమో లేక తిరస్కరించటమో చేస్తాం. ఈ క్రింది ఉదాహరణలు పరిశీలించినట్లయితే పరికల్పనా పరీక్షల ఉద్దేశం పూర్తిగా అవగతమౌతుంది.

ABC కాలేజి ప్రధానోపాధ్యాయుడు ఆర్థిక శాస్త్రంలో ఆ కాలేజి విద్యార్థులకు సగటున 70 మార్కులు వచ్చాయి అని అన్నారు. ఈ ప్రవచనాన్ని ఎలా అంగీకరించటం. కాబట్టి ఈ ప్రవచనం నిజమో కాదో తెలుసుకోవటానికి, ఆ కాలేజిలో ఆర్థిక శాస్త్రం చదివిన విద్యార్థుల సమిష్టి నుంచి ఒక యాదృచ్ఛిక (*Random*) ప్రతిరూపం తీసుకొని, వారి మార్కుల సగటును కనుక్కుంటాం. సార్థకతా పరీక్షను (*Test of signigicance*) నిర్వహించి, ఈ ప్రేక్షిత విలువల ఆధారంగా, ప్రధానోపాధ్యాయుడు చెప్పింది అంగీకరించటమో, తిరస్కరించటమో జరుగుతుంది.

అలాగే ఒక మార్కెటింగ్ అధికారి, సేల్స్ సిబ్బందికి ఒక ప్రత్యేకమైన శిక్షణ వలన అమ్మక సామర్థ్యం పెరుగుతుంది అంటారు. ఆధారం ఏది? ఈ సందర్భంలో, సేల్స్ సిబ్బంది యొక్క సమిష్టి నుండి ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రతిరూపం తీసుకొని, వారి అమ్మక సామర్థ్యాన్ని శిక్షణ యివ్వక ముందు, యిచ్చిన తరువాత కొలుస్తాం. సార్థకతా పరీక్షనుపయోగించి శిక్షణ, అమ్మక సామర్థ్యాన్ని పెంచేదీ లేనిది నిర్ణయిస్తాం.

కాబట్టి, పైన ఉదహరించినట్లు ప్రతి రూపాల యొక్క సాంఖ్యకాల ఆధారంగా, పరామితుల గురించి ప్రవచించిన ప్రతి కల్పనను అంగీకరించటమో, తిరస్కరించటమో నిర్ణయించటానికి ఉపయోగించే సాంఖ్యక పరీక్షలనే, సార్థకతా పరీక్ష అని కూడా అంటారు.

సామాన్యంగా, ప్రతిరూపాల సాంఖ్యకానికి, పరామితికి మధ్య తేడా వుంటుంది. ఎందుకంటే ప్రతిరూపం సమిష్టి కాదు కాబట్టి. మరి అటువంటి పరిస్థితులలో, ప్రతి రూపం విలువల ఆధారంగా పరామితి గురించి ప్రవచించిన ప్రతికల్పనను అంగీకరించటం లేక తిరస్కరించటం కొంత రిస్క్‌తో కూడుకున్న పని. ఈ రిస్క్‌నే మనం సార్థకతా స్థాయి (*Level of Cignificance*)గా తరువాత నిర్వచిస్తాం. సాంఖ్యక పరీక్ష ప్రాతిపదిక పై ప్రతికల్పనను అంగీకరిస్తే ఆ ఫలితాన్ని నిసార్థకతా (*Not-Signigicant*) ఫలితం అని, పరికల్పనను కనుక తిరస్కరిస్తే ఆ ఫలితాన్ని సార్థకతా (*Significant*) ఫలితం అని అంటాం. అందుకనే ఈ సాంఖ్యక పరీక్షలను సార్థకతా పరీక్షలని కూడా పిలుస్తారు.

16.2 పరికల్పనలో రకాలు (*Types of Hypothesis*):

ఒక సమిష్టి విభాజనం యొక్క పరామితి గురించి ప్రస్తావించిన పరికల్పనలు రెండు రకాలు.

1. శూన్య పరికల్పన (*Null Hypothesis*)
2. ప్రత్యామ్నాయ పరికల్పన (*Alternative Hypothesis*)

శూన్య పరికల్పన - అంగీకరించటానికి గాని తిరస్కరించటానికి గాని రూపొందించబడిన పరికల్పనను 'శూన్య పరికల్పన' అంటాం. (సామాన్యంగా, శూన్య పరికల్పనను తిరస్కరించటానికి అనువుగానే ప్రవచిస్తాం.) శూన్య పరికల్పనను H_0తో గుర్తిస్తాము.

ప్రత్యామ్నాయ పరికల్పన - శూన్య పరికల్పనను విభేదించే విధంగా ప్రవచించిన పరికల్పనను ప్రత్యామ్నాయ పరికల్పన అంటాం. దీనిని H_1లేక H_Aతో గుర్తిస్తాము.

ఉదా - $H_0 : \mu = 0$ శూన్య పరికల్పనకు ఈ క్రింది ప్రత్యామ్నాయ పరికల్పనలను ఏర్పరచవచ్చు.

1. $H_1 : \mu \neq 0$ (or) $H_i : \mu > 0$ (or) $H_1 : \mu < 0$

అలాగే $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ శూన్య పరికల్పనకు $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ (or) $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ (or) $H_1 : \mu_1 > \mu 2$లు ప్రత్యామ్నాయ పరికల్పనలు అవుతాయి.

ఒక సాంఖ్యక పరికల్పన (*Statical Hypothesis*) విభాజనాన్ని గురించి పూర్తిగా నిర్దేశిస్తే దానిని సరళ లేక సామాన్య (*Simple Hypothesis*) అని, లేని ఎడల సంయుక్త (*Composit*) పరికల్పన అని అంటాం.

ఉదాహరణకు ఒక సామాన్య విభాజనంలో (*Normal Distribution*) క్రమ విచలనం విలువ తెలిసి $H_0 : \mu = 25$ ను $H_1 : \mu = 32$ కు వ్యతిరేకంగా పరిక్షించాలనుకున్నప్పుడు ఈ పరికల్పన సరళ పరికల్పన అవుతుంది. ఎందుకనగా ఈ విభాజనంలో 'μ' 25 కాని 32 కాని అవుతుంది. ఇలాకాక $\mu_1 : \mu \neq 25$, $H_1 : \mu > 25$ (or) $H_1 : \mu < 25$ అయితే H_1 సంయుక్త పరికల్పన అవుతుంది.

16.3 దోషాలలో రకాలు (*Types of Errors*):

సార్థకతా పరీక్ష నిర్వహించిన తరువాత, ప్రతిపాదించిన పరికల్పనను అంగీకరించాలా లేక తిరస్కరించాలా అనే నిర్ణయం తీసుకునేటప్పుడు ఒక్కొక్కసారి తప్పు నిర్ణయాలు తీసుకునే అవకాశం వుంది. వీటినే దోషాలు అంటాం. సార్థకతా పరీక్షలలో ఎదురయ్యే దోషాలు రెండు రకాలు. అవి

1. మొదటి రకం దోషం (*Type - I Error*)

2. రెండవ రకం దోషం (*Type - II Error*)

శూన్య పరికల్పన 'నిజం' అయినప్పుడు దానిని తిరస్కరించటం వల్ల ఏర్పడే దోషాన్ని మొదట రకం దేషమని, శూన్య పరికల్పన 'నిజం కానప్పుడు' దానిని అంగీకరించటం వల్ల ఏర్పడే దోషాన్ని రెండవ రకం దోషమని పిలుస్తారు. ఇదే విషయాన్ని పట్టిక రూపంలో క్రింది విధంగా విశదీకరించవచ్చు.

సమిష్టిలో పరిస్థితి	ప్రతిరూపం ఆధారంగా తీసుకన్న నిర్ణయం	
	H_0 : అంగీకరించటం	H_0 : తిరస్కరించడం
H_0 : నిజం (H_1 : నిజం కాదు)	సరైన నిర్ణయం	మొదటి రకం దోషం
H_0 : నిజం కాదు(H_1 : నిజం)	రెండవ రకం దోషం	సరైన నిర్ణయం

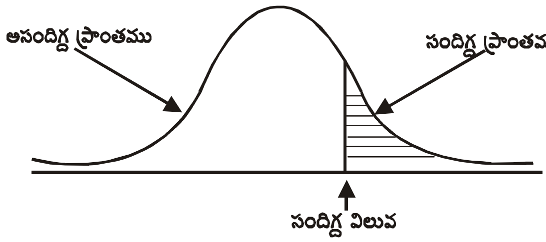
ఈ దోషాలను స్పష్టంగా అర్థం చేసుకోటానికి ఒక చిన్న ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాం. ఒక రోగి తనకు కాన్సర్ రోగం ఉందనే భయంతో వైద్యున్ని సంప్రదిస్తే, ఆ డాక్టరు రోగికి కాన్సర్ లేదని అభిప్రాయపడి కాన్సర్ వ్యాధికి చికిత్స చేయలేదు. నిజానికి ఆ రోగికి కాన్సర్ వ్యాధి వుంది. ఇది మొదటి రకందోషం. అలాకాక వైద్యుడు అతనికి కాన్సర్

వుందని అభిప్రాయపడి కాన్సర్ వ్యాధికి చికిత్స చేస్తాడు. నిజం ఏమిటంటే ఆ రోగి కాన్సర్ వ్యాధితో భాదపడుట లేదు. ఇది రెండో రకం దోషం. ఈ ఉదాహరణాన్ని క్షుణ్ణంగా పరిశీలిస్తే మొదటి రకం దోషంఎంతటి తీవ్ర పర్యవసానానికి దారి తీస్తుందో తెలుస్తుంది.

కాన్సర్ రోగికి ఆ రోగానికి చికిత్స జరగకపోవటం వలన అది ఆ వ్యక్తి మరణానికి దారితీస్తుంది. కాని రెండవ రకం దోషం వలన సమయం, డబ్బు నష్టమే కాని ప్రాణ నష్టం లేదు.

16.4 సార్థకతా స్థాయి (*Level of Significance*):

పైన ఉదహరించినట్లుగా రెండవ రకం దోషం కన్నా, మొదటి రకం దోషం చాలా తీవ్రమైంది. అందువలన మొదటి రకం దోషం చేసే సంభావ్యతను మనం నియంత్రిస్తాం. ఇందుకోసమై ఆ సంభావ్యతకు అవధులు



ఏర్పరుస్తాము. దీనిని సార్థకతా స్థాయి అంటాం. దీనిని సంకేతాలలో α (అల్ఫా) అనే గ్రీకు అక్షరంతో గురిస్తాము. 'α' విలువ ఎక్కువగా వుంది అంటే, నిజమైన శూన్య పరికల్పనను తిరస్కరించే అవకాశాలు మెండుగా వున్నాయన్నమాట. నిర్దేశించిన సార్థక స్థాయి వద్ద రెండవ రకం దోషం యొక్క సంభావ్యతను కూడా తక్కువ వుండేలా సార్థకతా పరీక్షలు సూచించబడతాయి.

సందిగ్ధ ప్రాంతము (*Critical Region*): శూన్య పరికల్పనను పరీక్షించటానికి ఒక సాంఖ్యక పరీక్షను ఉపయోగిస్తాం. ఈ పరీక్షలో వుపయోగించేటటువంటి సాంఖ్యకం సామాన్యంగా తెలిసిన విభజనాన్ని అనుసరిస్తుంది. (ఉదా. సామాన్య విభాజనం *t* - విభాజనం, కై - స్క్వేర్ విభాజనం మొ॥వి) అందుచేత ఒక పరీక్షలో, సంభావ్యతా సాంద్రతా వక్రాన్ని రెండు ప్రాంతాలుగా విభజించవచ్చు. అవి

1. అసందిగ్ద ప్రాంతము (*Acceptance Region*)
2. సందిగ్ద ప్రాంతము (*Cretical Region*)

శూన్య పరికల్పనను తిరస్కరించే ప్రాంతాన్ని సందిగ్ద ప్రాంతమని అంటాము. సందిగ్ద ప్రాంతము యొక్క వైశాల్యము 'α'కు సమానం అవుతుంది. ఒక సంభావ్యతా సాంద్రతా వక్రములో అసందిగ్ద ప్రాంతాన్ని సందిగ్ద ప్రాంతాన్ని కలిపే బిందువు విలువను సందిగ్ద విలువ అంటాం.

ఏక - పార్శ్వ , ద్వి - పార్శ్వ పరీక్షలు (*One-Tailed, Two-Tailed Tests*):

ప్రత్యామ్నాయ పరికల్పన,

$H_1 : \mu_1 < \mu_2, H_1 : \mu_1 > \mu_2, H_1 : \mu > \mu_0, H_1 : \mu_1 < \mu_0, H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ or $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ మొ॥ వాటిలో ఒక్కటైనప్పుడు, సందిగ్ద ప్రాంతము, సంభావ్యతా సాంద్రతా వక్రము యొక్క ఒక చివర్లోనికి మాత్రమే విస్తరించి వుంటుంది. క్రింది పటాలు

చూడండి.

$H_1 : \mu > \mu_0$

(or)

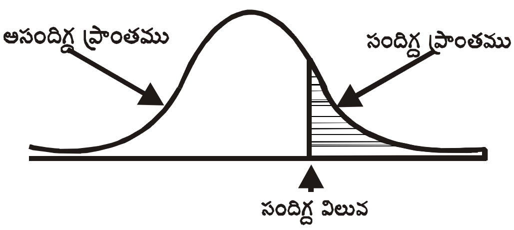
$: \mu_1 > \mu_2$

(or)

$: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

$: \sigma^2 > \sigma_0^2$

అయితే సందిగ్ధ ప్రాంతము క్రింది పటంలో చూపిన విధంగా సంభావ్యతా సాంద్రతా వక్రము యొక్క కుడి చివర్లో మాత్రమే విస్తరించి వుంటుంది.



ప్రత్యామ్నాయ పరికల్పన

$H_1 : \mu < \mu_0$

or

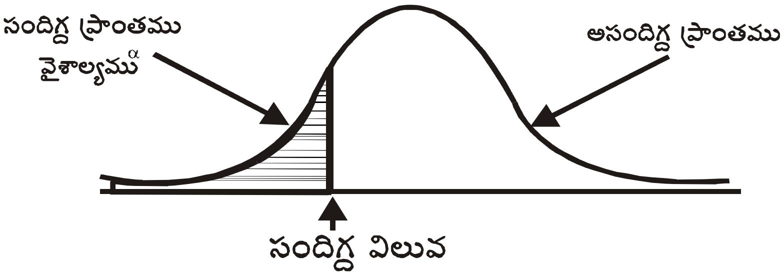
$: \mu_1 < \mu_2$

(or)

$: \sigma^2 < \sigma_0^2$

$: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$

కనుక అయినట్లయితే సందిగ్ధ ప్రాంతము, క్రింది పటములో చూపిన విధంగా సంభావ్యతా విభాజనం సాంద్రతా వక్రము యొక్క ఎడమ చివర్లోలో మాత్రమే విస్తరించి వుంటుంది.

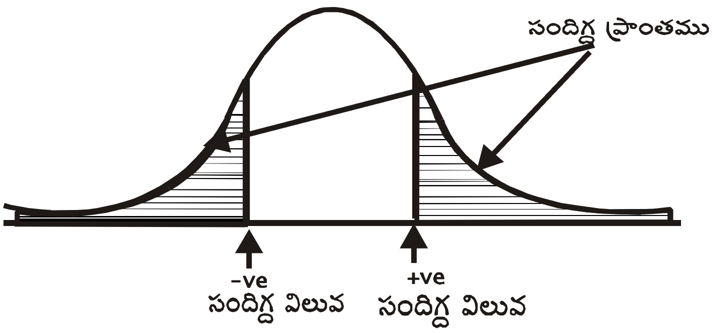


అలాంటి పరిస్థితులలో సార్థకతా పరీక్షను ఏకపార్శ్వ పరీక్ష అంటారు.

ఒక వేళ ప్రత్యామ్నాయ పరికల్పన

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_0$

$\mu_1 \neq \mu_2$ మొ॥వి అయితే సందిగ్ధ ప్రాంతము, సంభావ్యత సాంద్రతా వక్రములోని రెండు చివర్లలోనూ (క్రింది పటము చూడండి) విస్తరించి వుంటుంది.



ఇటువంటి సందర్భాలలో సాంఖ్యక పరీక్షను ద్వి-పార్శ్వ పరీక్ష అంటాం.

సాంఖ్యక పరీక్ష పరిమాణము మరియు శక్తి (*Size and Power of a Test*)

శూన్య పరికల్పనను తిరస్కరించే సంభావ్యతను (α) పరీక్ష యొక్క పరిమాణం అని కూడా పిలుస్తాము. శూన్య పరికల్పన నిజం కానప్పుడు దానిని తిరస్కరించే సంభావ్యతను ఆ పరీక్ష యొక్క శక్తి అని అంటారు. దీనిని సంకేతాలలో $1-\beta$లో గుర్తిస్తాము. ఒకే వర్గానికి చెందిన పరీక్షలలో ఒకే పరిమాణం వద్ద ఎక్కువ శక్తి గల పరీక్షను ఉత్తమ పరీక్షగా పరిగణిస్తారు.

16.5 సార్థకతా పరీక్షలు (*Tests of Significance*)

ఈ విభాగంలో వివిధ సార్థకతా పరీక్షలు గురించి తెలుసుకుందాం, సార్థకతా పరీక్షలను ప్రతిరూపాల పరిమాణం బట్టి రెండు రకాలుగా విభజించవచ్చు.

1. బృహత్ ప్రతిరూపాల సార్దకతా పరీక్షలు (*Large Sample Tests*)

2. లఘు ప్రతి రూపాల సార్థకతా పరీక్షలు (*Small Sample Tests*)

సార్థకతా పరీక్షలు గురించి తెలుసుకునే ముందు, బృహత్ ప్రతి రూపాలు, లఘు ప్రతిరూపాలు మరియు క్రమ దోషం (*Standard Error*) గురించి తెలుసుకుందాం.

బృహత్ ప్రతి రూపం (*Large Sample*)

ఒక ప్రతి రూపం యొక్క పరిమాణం (*n*) 30 కన్నా ఎక్కువగా ఉన్న దానిని బృహత్ ప్రతి రూపం అంటాం. ప్రతిరూపం యొక్క పరిమాణం 30, అంతకన్నా తక్కువ అయితే దానిని లఘు ప్రతిరూపం (*Small Samples*)గా పరిగణిస్తాం.

16.5.1 క్రమ దోషం (*Standard Error*)

'*N*' విలువలు కలిగిన ఒక సమిష్టి నుండి '*n*' ($n < N$) పరిమాణం గల ప్రతిరూపాన్ని తీసుకున్నాం అనుకుందాం. మరియు ఈ ప్రతిరూపం లోని విలువల యొక్క అంకమధ్యం '$\bar{X}$' మరియు క్రమవిచలనం 's' అనుకుందాం.

పై '*N*' పరిమాణము గల సమిష్టి నుండి ఇటు వంటి '*n*' పరిమాణం గల ప్రతిరూపాలు N_{C_n} వస్తాయి. ఈ అన్ని ప్రతి రూపాలకు అంకమధ్యమాలు కనుగొన్నామనుకోండి. అపుడు మనకు N_{C_n} సంఖ్య అంకమధ్యమాలుంటాయి. ఈ అంకమధ్యమాలకు

పౌనఃపున్య విభాజనం పట్టిక తయారు చేస్తే దానిని ప్రతిరూప అంకమధ్య విభాజనం (*Sampling Distribution of Means*) అంటారు. ఈ ప్రతిరూప విభాజనం యొక్క క్రమ విచలనం లెక్కిస్తే దానిని అంకమధ్యమానికి కాక, మధ్యగతానికి, బహుళకానికి, క్రమవిచలనానికి అంచేగాక, ప్రతిరూప అనుపాతానికి, ప్రతిరూప సహసంబంధ గుణకానికి (*Sample Evefficient of Correlation*) కూడా క్రమ దోషం కనుగొనవచ్చు. క్రమదోషాన్ని సంకేతాలలో *SE* గా వ్రాస్తాము.

గమనిక - బృహత్ రపతిరూపాలలో పరిమాణం సంఖ్య పెరిగే కొలది ప్రతి రూపం యొక్క విస్తృతి రమారమిగా సమిష్టి విస్తృతికి దగ్గరవుతూ ఉంటుంది. కావున ప్రతిరూపాల విస్తృతిని సమిష్టి విస్తృతిగా పరిగణించవచ్చు. అందుచేత బృహత్ ప్రతిరూపాలలో సార్థకతా పరీక్షకు *z*- పరీక్ష (లేక) సామాన్య పరీక్షను ఉపయోగిస్తాం. లఘు ప్రతి రూపంలో సార్థకతా పరీక్షకు *t* - సంఖ్యాకాన్ని ఉపయోగిస్తాం.

16.6 బృహత్ ప్రతిరూపాలు - సార్థకతా పరీక్షలు (*Large Samples - Tests of Significance*)

బృహత్ ప్రతిరూపాలలో సార్థకతా పరీక్షలు ప్రామాణిక సామాన్య విభాజనం (*Standard Normal Distribution*) పై ఆధార పడి ఉంటాయి.

x అనే చలరాశి ఒక సామాన్య విభజనాన్ని అనుసరిస్తుంది అనుకుందాం. ఈ సామాన్య విభజనం యొక్క అంకమధ్యమం 'μ' విస్తృతి 'a^2' అయితే సంకేతాలుపయోగించి $x \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ వ్రాస్తాము అని మీకు తెలుసు. అలాగే $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ అని మార్పును తీసుకుంటే, *z* అనే చలరాశి ప్రామాణిక సామాన్య విభాజనాన్ని అనుసరిస్తుందని ఆ విభాజనం యొక్క అంకమధ్యమం '0' మరియు విస్తృతి '1' అవుతాయి. అని మనం దీని ముందు పాఠంలో చదువుకున్నాం.

ఒక $H_0 : \mu = \mu_0$ అనే ఒక శూన్య పరికల్పన నిజమా, కాగా అని నిరూపించటం మరియు ప్రతిరూపం అంకమధ్యమం 'μ' విస్తృతి 'σ^2'గా వున్న విభాజనం నుండి వచ్చినదీ లేనిది తెలుసుకోవడంతో సమానమౌతుంది. రాబోయే విభాగాలలో అంకమధ్యమం, అనుపాతం, విస్తృతి మొ॥ వాటి సార్థకతా పరీక్ష, వాటు సూత్రాలు, మొదలగు వాటి గురించి తెలునుకుందాం.

16.6.1 అంకమధ్యమం యొక్క సార్థకతా పరీక్ష (*Test for Mean*)

అంకమధ్యమం యొక్క సార్ధకతా పరీక్షకు ఉపయోగించే సూత్రం ప్రతిరూపం తీసుకున్న సమిష్టి విభాజనం యొక్క విస్తృతి విలువ తెలుసా? తెలియదా? అనే దాని మీద ఆధారపడి ఉంటుంది.

(ఎ) సమిష్టి విభాజనం 'విస్తృతి' తెలిసిన (σ *is known*)

$\bar{X}$ - ప్రతిరూపం యొక్క అంకమధ్యమం

μ - సమిష్టి అంకమధ్యమం

n - ప్రతిరూపం యొక్క పరిమాణం ($n > 30$)

σ^2 - సమిష్టి యొక్క విస్తృతి అయిన

$H_0 : \mu = \mu_0$ శూన్య పరికల్పనను పరీక్షించాల్సి వచ్చినపుడు బృహత్ ప్రతిరూపంలో $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ప్రామాణిక సామాన్య విభాజనం కలిగి వుంటుంది. అనగా $Z \sim N(0,1)$.

కావున H_0 క్రింద పరీక్షా సాంఖ్యకం (*Test Statistic*)

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

సార్ధకతా స్థాయి 'α' గా నిర్ణయిస్తే ప్రత్యామ్నాయ పరికల్పననుసరించి $(H_1 : \mu \neq \mu_0)$ సార్ధకతా పరీక్ష ద్వి పార్శ్వ పరీక్ష కావున సందిగ్ద విలువను $Z_{\alpha/2}$తో సంకేతంగా సూచిస్తాం.

నిర్ణయం - ఇచ్చిన దత్తాంశ విలువలు ఆధారంగా పై సూత్రాలనుపయోగించి $|Z|$ విలువ గణిస్తాము. ఈ విలువ పట్టికల నుండి గ్రహించిన $Z_{\alpha/2}$ విలువతో పోల్చి

1. $|Z|$ విలువ, $Z_{\alpha/2}$ విలువ కన్నా 'తక్కువ' అయినప్పుడు శూన్య పరికల్పనను అంగీకరిస్తాం.

   ($|Z| < Z_{\alpha/2} \to H_0$ అంగీకరించబడింది.)

2. $|Z|$ విలువ, $Z_{\alpha/2}$ విలువ కన్నా 'ఎక్కువ' అయినప్పుడు శూన్య పరికల్పనను తిరస్కరిస్తాం.

   ($|Z| > Z_{\alpha/2} \to H_0$ తిరస్కరించబడింది.)

ఉదా - కారు టైర్లు తయారు చేసే *ABC* అనే కంపెనీలో తయారైన టైర్ల మన్నిక సగటున 40,000 కి॥మీ॥ మరియు క్రమ విచలనం 3,000 కి॥మీ॥ కలిగి వుంటాయి. టైర్ల మన్నిక కాలం సామాన్య విభాజనాన్ని అనుసరిస్తుంది.

ఒక కొత్త ఉత్పాదక పద్ధతి టైర్ల మన్నిక కాలాన్ని పెంచుతుందని భావించి ప్రవేశపెట్టారు. ఆ తరువాత ఆ సంస్థ తయారు చేసిన, యాదృచ్ఛికంగా తీసుకున్న 100 టైర్ల మన్నికను పరిశీలించగా 41,200 కి॥మీ॥గా తేలింది. క్రొత్తగా ప్రవేశ పెట్టిన ఉత్పాదక పద్ధతి వలన టైర్ల మన్నిక కాలంలో పెద్ద తేడా లేదు. పరీక్షించండి?

సాధన - ముందుగా శూన్య పరికల్పన, ప్రత్యామ్నాయ పరికల్పనా ఏర్పాటు చేయాలి, ఈ సమస్యలో

$H_0 : \mu = 40,000$ (లేదా) ప్రతిరూప అంకమధ్యమానికి, సమిష్టి అంకమధ్యమానికి మధ్య తేడా సార్ధకత కాదు.

$H_1 : \mu \neq 40,000$

ఇచ్చిన విలువలు

ప్రతిరూప పరిమాణం $= n = 100$

ప్రతిరూప అంకమధ్యమం $= \bar{x} = 41,200$ కి॥మీ॥

సమిష్టి అంకమధ్యమం $= \mu = 40,000$ కి॥మీ॥

సమిష్టి క్రమవిచలనం $= \sigma = 3,000$ కి॥ మీ॥

H_0 ను పరీక్షించేందుకు పరీక్షా సాంఖ్యకం $Z = \dfrac{x - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{41,200 - 40,000}{\dfrac{3,000}{\sqrt{100}}} = \dfrac{1200}{300} = 4$

సార్థకతా స్థాయి 'α' 5 శాతం అయితే, ప్రత్యామ్నాయ పరికల్పనాధారంగా ఈ పరీక్ష ద్విపార్శ్వ పరీక్ష కాబట్టి పట్టికల నుండి గ్రహించిన $Z_{\alpha/2}$ విలువ 1.96 అవుతుంది.

నిర్ణయం - గణించిన $|Z|$ విలువ సందిగ్ధ విలువ 1.96 కన్నా ఎక్కువగా వుంది కావున H_0 :ను తిరస్కరిస్తాము. అనగా క్రొత్త పద్ధతిలో తయారు చేసిన టైర్ల మన్నిక కాలంలో పాత పద్ధతిలో తయారైన టైర్ల మన్నిక కాలంలో తేడా సార్ధకతను కలిగి వుంది అన్నమాట.

(బి) సమిష్టి విభాజనం 'విస్తృతి' తెలియనప్పుడు (σ *is Unknown*)

ఒక సమిష్టి యొక్క క్రమవిచలనం విలువ తెలియనప్పుడు, బృహత్ ప్రతిరూపం యొక్క క్రమ విచలనం '*s*' సమిష్టి క్రమవిచలనాన్ని 'σ' కి రమారమి అంచనా కాబట్టి పైన ఉపయోగించిన సూత్రంలో 'σ'కి బదులుగా '*s*'ను ఉపయోగిస్తాము.

శూన్య పరికల్పన $H_0 : \mu = \mu_0$ అయి

$H_1 : \mu \neq \mu_0$ అయినప్పుడు

మరియు బృహత్ ప్రతిరూపం యొక్క పరిమాణము $= n$

బృహత్ ప్రతిరూపం యొక్క పరిమాణము $= \bar{X}$

బృహత్ ప్రతిరూపం యొక్క పరిమాణము $= s$

సమిష్టి యొక్క అంకమద్యమం : μ అయిన యెడల పైన ప్రతిపాదించిన శూనయ పరికల్పన H_0 పై సార్ధకతా సాంఖ్యకం

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim / N(0,1)$$ అవుతుంది.

ఇంతకు ముందు పద్ధతిలో వివరించిన విధంగానే యిచ్చిన విలువలనుపయోగించి పై సూత్రాననుసరించి 'Z' విలువ కనుక్కుంటాం. ఇచ్చిన సార్ధకతా స్థాయి 'α' వద్ద పట్టిక నుండి సందిగ్ధ విలువను తీసుకొని గణించిన 'Z' విలువతో పోల్చి చూసి సరైన నిర్ణయాన్ని ఈ క్రింది విధంగా తీసుకుంటాం.

1. గణించిన $|Z|$ విలువ సందిగ్ధ విలువ కన్నా ఎక్కువ అయితే H_0 శూన్య పరికల్పనను తిరస్కరించటం (లేదా)
2. గణించిన $|Z|$ విలువ సందిగ్ధ విలువకన్నా తక్కువ లేక సమానం అయితే, శూన్య పరికల్పనను అంగీకరించటము జరుగుతుంది.

ఉదాహరణ - విద్యుత్ దీపాలను తయారు చేసే '*xyz*' అనే తయారీ సంస్థ అది తయారు చేసే విద్యుత్ దీపాల నగటు వెలుగు గంటలు (*Light Hours*) **1600** అని ప్రకటించింది. అదే సంస్థ నుంచి తీసుకున్న **100** విద్యుత్ దీపాల ప్రతిరూపం వెలుగు గంటల అంకమద్యమం **1610** మరియు క్రమవిచలనం **100** గంటలు అయిన ప్రతిరూప ఫలితం సంస్థ ప్రకటనను ధృవ పరుస్తుందా? పరీక్షించండి.

సాధన - పై ఉదాహరణలో

సమిష్టి యొక్క అంకమద్యమం $= \mu = 1600$ గం॥లు

ప్రతి రూపం యొక్క పరిమాణం $= n = 100$

ప్రతి రూపం యొక్క అంకమద్యమం $= \bar{x} = 1610$ గం॥లు

ప్రతి రూపం యొక్క క్రమవిచలనం $= s = 100$ గం॥లు

శూన్య పరికల్పన H_0 = సమిష్టి అంకమద్యమం మరియు ప్రతిరూపం అంకమద్యమం విలువల మద్య బేధం సార్ధకమౌవదు (సార్ధకం కాదు) i.e, $\mu = 160$

(Vs)

$H_1 =$ సమిష్టి అంకమద్యమం, ప్రతిరూప అంకమద్యమాల మధ్య సార్ధకమౌతుంది. ($\mu \neq 1600$)

పైన ప్రతిపాదించిన శూన్య పరికల్పనను పరీక్షించటానికి పరీక్ష సాంఖ్యకం $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$

ఇచ్చిన విలువలు ప్రతిక్షేపించగా $|Z| = \left| \dfrac{1610 - 1600}{100 / \sqrt{100}} \right| = \dfrac{10}{100/10} = 1$

ఒక శాతం సార్థకతా స్థాయి వద్ద ద్వి-పార్శ్వ పరీక్ష కాబట్టి సందిగ్ధ విలువ **2.58** అవుతుంది. లెక్కించిన $|Z|$ విలువ **2.58** కన్నా తక్కువ వుంది $(|Z| < 2.58)$ కాబట్టి, శూన్య పరికల్పనను నిరాకరించవద్దు. అనగా ప్రతిరూపం యొక్క అంకమధ్యమం సమిష్టి యొక్క అంకమధ్యమాన్ని ధృవపరుస్తుంది.

16.6.2 అంకమధ్యమాల సమానతకు సార్థకతా పరీక్ష (*Test for Difference Between Means*)

రెండు ప్రతి రూపాలు రెండు వేర్వేరు సమిష్టిల నుండి తీసుకున్నప్పుడు ఆ రెండు ప్రతిరూపాల నగటులు సమానతను పరీక్షించటానికి ఈ సార్థకతా పరీక్ష ఉపయోగిస్తారు.

'n_1' పరిమాణం గల ఒక బృహత్ ప్రతిరూపాన్ని 'μ_1' అంకమధ్యమం 'σ_2' క్రమ విచలనం కలిగిన ఒక సమిష్టి నుండి మరియు 'x_2' పరిమాణం గల వేరొక బృహత్ ప్రతిరూపం 'μ_1' అంకమధ్యమం 'σ_2', క్రమవిచలనం కలిగిన వేరొక సమిష్టి నుండి గ్రహిస్తే $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ లు ఈ బృహత్ ప్రతిరూపాల అంకమధ్యమాలు అనుకుందాం.

ప్రతిరూపాల పరిమాణం ఎక్కువ కాబట్టి

$$\bar{X}_1, \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right)$$

$$\bar{X}_2 \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right) \text{ అవుతాయి.}$$

$\bar{X}_1, \bar{X}_2$ లు రెండు స్వతంత్ర సామాన్య చలరాశులు కావున వీటి భేదం $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ ఒక సామాన్య చలరాశి అవుతుంది.

కాబట్టి $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$కు అనురూప ప్రామాణిక సామాన్య చలరాశి $Z = \dfrac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{Var(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}} \sim N(0,1)$ అవుతుంది.

శూన్య పరికల్పన $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ (రెండు ప్రతిరూపాల అంకమధ్యమాల మధ్య తేడా సార్థకం కాదు). $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

అయితే H_0 పై సార్థకతా సాంఖ్యకం $Z = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma^2}{n_2}}}$.

పరీక్షా పద్ధతి, నిర్ణయం తీసుకునే పద్ధతి యింతకు ముందు వివరించినట్లుగానే వుంటుంది. ఒక ఉదాహరణ ద్వారా రెండు ప్రతి రూపాల నగటు సమానం అవునో కాదో తెలునుకుందాం.

ఉదా - యాదృచ్ఛికంగా ఎన్నుకొన్న 100 పరిమాణం కలిగిన ఒక బృహత్ ప్రతిరూపం నగటు 900, 200 పరిమాణం గల వేరొక ప్రతిరూపం నగటు 800. అయితే సమిష్టి క్రమవిచలనం 200 అయినప్పుడు రెండు ప్రతిరూపాల నగటుల మధ్య భేదం సార్థకమౌతుందని చూపండి.

సాధన

మొదటి ప్రతి రూపం యొక్క పరిమాణం $= n_1 = 100$

మొదటి ప్రతి రూపం యొక్క సగటు $= \bar{X}_1 = 900$

రెండవ ప్రతి రూపం యొక్క పరిమాణం $= n_2 = 200$

రెండవ ప్రతి రూపం యొక్క సగటు $= \bar{X}_2 = 800$

సమిష్టి క్రమ విచలనాలు $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = 200$

శూన్య పరికల్పన $= H_0 : \mu_1 = \mu_2$ Vs

ప్రత్యామ్నాయ పరికల్పన $= H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ **(ద్వి-పార్శ్వ సార్ధకతా పరీక్ష)**

పైన వివరించిన లేక ప్రతిపాదించిన శూన్య పరికల్పనను పరీక్షించటానికి సార్ధకతా పరీక్ష సాంఖ్యకం

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim N\left(0,1\right)$$ అవుతుంది.

విలువలు ప్రతిక్షేపించగా $Z = \frac{900 - 800}{200\sqrt{\frac{1}{100} + \frac{1}{200}}} = \frac{100}{24.49} = 4.08$

5 శాతం సార్ధకతా స్థాయి వద్ద పట్టిక నుండి గ్రహించిన సందిగ్ధ విలువ **1.96**

నిర్ణయం - $|Z|$ విలువ **(4.08)** సందిగ్ధ విలువ **1.96** కన్నా ఎక్కువ కాబట్టి. **5** శాతం సార్ధకతా స్థాయి వద్ద రెండు ప్రతిరూపాల అంకమధ్యమంల భేదం సార్ధకమౌతుంది. అంటే శూన్య పరికల్పన తిరస్కరించబడింది అన్నమాట.

గమనిక - సమిష్టి యొక్క క్రమ విచలనాలు తెలియనప్పుడు బృహత్ ప్రతిరూపాలలో ప్రతిరూపాల క్రమ విచలనాలే సమిష్టి యొక్క క్రమ విచనాలకు అంచనాలు కాబట్టి పై సూత్రంలో సమిష్టి క్రమ విచలనాలకు బదులుగా ప్రతిరూప క్రమవిచలనాలను వాడతారు.

ఉదా - రెండు వేర్వేరు కళాశాల విద్యార్థుల నుండి సేకరించిన ప్రతి రూపాల సమాచారం క్రింద యివ్వబడింది.

కళాశాల	పరిమాణం	ప్రతిరూపాల విలువలు	
		మార్కుల సగటు	మార్కుల క్రమ విచలనం
A	*40*	*55*	*10*
B	*50*	*60*	*15*

పై దత్తాంశమును బట్టి రెండు కళాశాలలో విద్యార్థుల మార్కుల సగటు సమానం అని భావించవచ్చా?

సాధన

పైన ఇచ్చిన దత్తాంశంలో సమిష్టి యొక్క క్రమ విచలనాల వివరాలు లేవు.

కళాశాల '*A*' నుండి గ్రహించిన ప్రతిరూపం పరిమాణం : $n_1 = 40$

కళాశాల '*A*' నుండి గ్రహించిన ప్రతిరూపం అంకమధ్యమం : $\bar{X}_1 = 55$

కళాశాల '*A*' నుండి గ్రహించిన ప్రతిరూపం క్రమవిచలనం : $S_1 = 10$

కళాశాల '*B*' నుండి గ్రహించిన ప్రతిరూపం పరిమాణం : $n_2 = 50$

కళాశాల '*B*' నుండి గ్రహించిన ప్రతిరూపం అంకమధ్యమం : $\bar{X}_2 = 60$

కళాశాల '*B*' నుండి గ్రహించిన ప్రతిరూపం క్రమవిచలనం : $S_2 = 15$

పరీక్షించవలసిన శూన్య పరికల్పన

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ (రెండు కళాశాలలోని విద్యార్థుల మార్కుల సగటుల మధ్య తేడా సార్థకం కాదు)

(Vs)

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ (ద్వి-పార్శ్వ సార్థకతా పరీక్ష)

పైన ప్రతిపాదించిన శూన్య పరికల్పనను పరీక్షించటానికి సార్థకతా సాంఖ్యకం $|Z| = \left|\dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{S_1^{\,2}}{n_1} + \dfrac{S_2^{\,2}}{n_2}}}\right|$ విలువలు ప్రతిక్షేపించగా

$$= \left|\frac{55-60}{\sqrt{\dfrac{(10)^2}{40} + \dfrac{(15)^2}{50}}}\right| = \left|\frac{-5}{\sqrt{\dfrac{100}{40} + \dfrac{225}{50}}}\right| = \frac{5}{2.65} = 1.88$$

5 శాతం సార్థకతా స్థాయి వద్ద సందిగ్ధ విలువ **1.96** అవుతుంది. కానీ గణించిన $|Z|$ విలువ సందిగ్ధ విలువ కన్నా తక్కువగా వుంది. కాబట్టి శూన్య పరికల్పన H_0ను అంగీకరిస్తాం.

ఉదాహరణ - ఒక కళాశాలలో ఆటల పోటీలలో పాల్గొన్న **50** మంది విద్యార్థుల పొడవుల అంకమధ్యమం **67.4**" మరియు క్రమ విచలనం **2.5**". అదే కళాశాలలో ఆటలలో పాల్గొనని మరొక **50** మంది విద్యార్థుల పొడవు (ఎత్తు) అంకమధ్యమం **66.9**" క్రమవిచలనం **2.8**'' అయితే సార్థకతా పరీక్షలనుపయోగించి ఆటల పోటీలలో పాల్గొనే విద్యార్థుల ఎత్తు ఎక్కువని నిర్ధారించండి.

సాధన - పైన ఇచ్చిన సమస్యకు అనుగుణంగా ఏర్పాటు చేయవల్సిన శూన్య పరికల్పన మరియు ప్రత్యామ్నాయ పరికల్పనలు
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $\quad H_1 : \mu_1 > \mu_2$ (ఏక - పార్శ్వ పరీక్ష)

ఇచ్చిన దత్తాంశం ప్రకారం

మొదటి ప్రతిరూపం యొక్క పరిమాణం $: n_1 = 50$

మొదటి ప్రతిరూపం లో అంకమధ్యమం $: \bar{X}_1 = 67.4''$

మొదటి ప్రతిరూపం లో క్రమ విచలనం $: s_1 = 2.5''$

రెండవ ప్రతిరూపం యొక్క పరిమాణం $: n_2 = 50$

రెండవ ప్రతిరూపం యొక్క అంకమధ్యమం $: \bar{X}_2 = 66.9''$

రెండవ ప్రతిరూపం యొక్క క్రమ విచలనం $: s_2 = 2.8''$

$$H_0 \text{ పై సార్థకతా సాంఖ్యకం } |Z| = \left| \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \right| = \left| \frac{67.4 - 66.9}{\sqrt{\frac{(2.5)^2}{50} + \frac{(2.8)^2}{50}}} \right| = \frac{0.5}{0.28} = 1.79$$

5 శాతం సార్ధకతా సాఅథయి వద్ద ఏకపార్శ్వ పరీక్ష కాబట్టి సందిగ్ధ విలువ **1.645** అవుతుంది.

గణించిన $|Z|$ విలువ ఈ సార్ధకతా స్థాయి వద్ద సందిగ్ధ విలువ **1.645** కన్నా ఎక్కువగా వుంది కాబట్టి శూన్య పరికల్పన H_0 తిరస్కరించబడుతుంది.

అంటే ఆటల పోటీలలో పాల్గొనే విద్యార్థుల సగటు ఎత్తు ఆటలలో పాల్గొనని విద్యార్థుల సగటు ఎత్తు కంటే ఎక్కువ అని నిరూపించబడింది.

16.6.3 అనుపాత సార్ధకతా పరీక్ష (*Test for Proportions*)

ఒక సమిష్టి యొక్క అనుపాతం '*P*' అయివుండి, దాని నుండి గ్రహించిన ప్రతిరూపం యొక్క అనుపాతం '*p*' అయితే శూన్య పరికల్పన $H_0 : P = P_0$ ని పరీక్షించటానికి (లేక) ఒక ప్రతి రూపం '*p*' అనుపాతంగా గల ఒక

సమిష్టి నుండి గ్రహించబడిందో లేదో తెలుసుకోవటానికి ఈ అనుపాత సార్థకతా పరీక్షను ఉపయోగిస్తారు.

శూన్య పరికల్పన $H_0 : P = P_0$ అయి, ప్రత్యామ్నాయ పరిక్లపన $H_1 : P \neq P_0$ అయితే. ఒక బృహత్ ప్రతి రూపంలో '*p*' అనుపాతం అయితే, శూన్య పరికల్పన H_0 ని పరీక్షించటానికి సార్థకతా సాంఖ్యకం $z = \frac{P - P_0}{\sqrt{\frac{PQ}{n}}} \sim N(0,1)$

పై సూత్రంలో $Q = 1 - P$, 'n' ప్రతి రూపం యొక్క పరిమాణం అవుతాయి. ఉపయోగించింది ద్వి-పార్శ్వ పరీక్ష, ఏక-పార్శ్వ పరీక్ష అనే దానిని అనుసరించి Z విలువ కనుక్కుంటాం. ఇక శూన్య పరికల్పనను అంగీకరించటం, తిరస్కరించటం పైన వుపయోగించిన పరీక్షల మాదిరిగానే చేస్తాం.

ఉదా - ఆంధ్రప్రదేశ్ లోని ప్రజల కాఫీ, టీలు త్రాగే అలవాటు గురించి తెలుసుకునే ప్రయత్నంలో భాగంగా నిర్వహించిన సర్వేలో **500** మంది పరిమాణం కలిగిన ప్రతి రూపంలో **270** మంది టీ త్రాగుతున్నట్లు తేలింది. దీనిని బట్టి ఒక శాతం సార్థకతా స్థాయి వద్ద ఆంధ్రప్రదేశ్‌లో కాఫీ, టీ పానీయాలు సమానంగా ఆదరించబడుతున్నాయి అని చెప్పవచ్చా ?

సాధన

శూన్య పరికల్పన $H_0 : P \neq \frac{1}{2}$ (ఆంధ్రప్రదేశ్‌లో టీ, కాఫీ పానీయాలు సమానంగా ఆదరించబడుతున్నాయి.)

ప్రత్యామ్నాయ పరికల్పన $H_1 : P \neq \frac{1}{2}$ (ద్విపార్శ్వ పరీక్ష)

ఇచ్చిన విలువలు

ప్రతి రూపం యొక్క పరిమాణం : $n = 500$

ప్రతి రూపంలో టీ తాగే ప్రజల అనుపాతం : $P = \frac{270}{500} = 0.54$

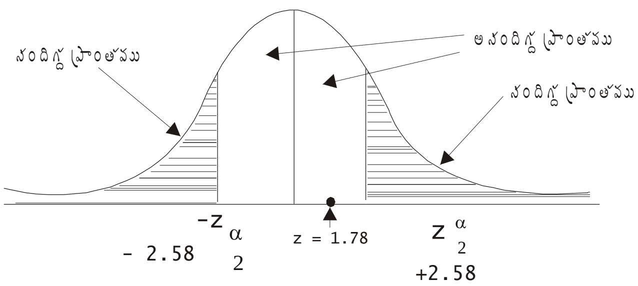
శూన్య పరికల్పన H_0 ని పరీక్షించటానికి సార్థకతా సాంఖ్యకం $Z = \frac{P - P_0}{\sqrt{\frac{PQ}{n}}} \sim N(0,1)$

$P = \frac{1}{2}$ కాబట్టి $Q = 1 - P = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$\therefore Z = \frac{0.54 - 0.5}{\sqrt{\frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{500}}} = \frac{0.04}{0.0223} = 1.78$$

ఒక శాతం సార్థకతా స్థాయి వద్ద ద్వి పార్శ్వ పరీక్ష కాబట్టి సందిగ్ధ విలువ **2.58** అవుతుంది (పట్టిక విలువ).

సందిగ్ద ప్రాంతము కింద పటములో చూపిన విధముగా వుంటుంది.



గణించిన Z విలువ పట్టిక విలువ కన్నా తక్కువగా వుంది లేక పై పటంలో చూపినట్లుగా అంసందిగ్ద ప్రాంతంలో వుంది కాబట్టి ఈ సమస్యలో శూన్య పరికల్పన తిరస్కరించబడదు. అనగా ఆంధ్రప్రదేశ్‌లో కాఫీ, టీ పానీయాలు సమానంగా ఆదరించబడుతున్నాయి అన్నమాట.

ఉదా - **1995** సం॥లో నిర్వహించిన ఆర్థిక సర్వే ప్రకారం **75** పారిశ్రామిక యూనిట్లలో **45** యూనిట్లు అధిక వృద్ధి రేటును కనబరిచాయి. ఈ ప్రతిరూప సమాచారం ప్రకారం **75** శాతం పారిశ్రామిక యూనిట్లు అధిక వృద్ధి రేటును కనబరచాయని చెప్పవచ్చా?

సాధన శూన్య పరికల్పన $H_0 : P = 0.75$

$H_1 : P \neq 0.75$ (ద్వీపార్శ్వ పరీక్ష)

ప్రతి రూపంలో వృద్ధి చూపిన పారిశ్రామిక యూనిట్ల అనుపాతం $P = \frac{45}{75} = 0.6$

H_0 ననుసరించి సార్థకతా సాంఖ్యకం $Z = \frac{P - P_0}{\sqrt{\frac{PQ}{n}}} \sim N(0.1)$

$$|Z| = \left| \frac{0.6 - 0.75}{\sqrt{\frac{0.75 \times 0.25}{75}}} \right| = \frac{0.15}{0.05} = 3$$

5 శాతం సార్థకతా స్థాయి వద్ద సందిగ్ద విలువ **1.96** అవుతుంది. గణించిన $|Z|$ విలువ **1.96** (పట్టిక విలువ) కన్నా ఎక్కువగా ఉంది కాబట్టి శూన్య పరికల్పన H_0 తిరస్కరించబడుతుంది. ప్రతి రూపం సమాచారం ఆధారంగా ఆర్థిక సర్వేలో చెప్పినట్లు **75** శాతం పారిశ్రామిక యూనిట్లు అధిక వృద్ధి రేటును నమోదు చేశాయని చెప్పజాలము.

16.6.4 రెండు అనుపాతాల మధ్య భేదానికి సార్థకతా పరీక్ష (*Test for Defference Between Two Proportions*)

రెండు ప్రతి రూపాల అనుపాతాల మధ్య తేడా సార్థకమౌతుందో లేదో తెలుసుకోవటానికి (లేక) రెండు వేర్వేరు ప్రతి రూపాల అనుపాతాలు ఒకే సమిష్టి నుండి గ్రహించినవో కాదో తెలుసుకోటానికి, ఈ సార్థకతా పరీక్షను

ఉపయోగిస్తాము.

రెండు వేర్వేరు ప్రతిరూపాలు వున్నాయనుకోండి. మొదట ప్రతి రూపం P_1 అనుపాతం కలిగిన ఒక సమిష్టి నుండి తీసుకొనబడింది. దీని పరిమాణం 'n_1' మరియు అనుపాతం P_1 అనుకుందాం. రెండవది P_2 అనుపాతం కలిగిన పేరొక సమిష్టి నుడి గ్రహించబడింది, దీని పరిమాణం 'n_2' మరియు అనుపాతం P_2 అనుకుందాం.

శూన్య పరికల్పన $H_0 : P_1 = P_2$

$H_1 : P_1 \neq P_2$ (ద్వి - పార్శ్వ పరీక్ష)

అయితే శూన్య పరికల్పన H_0 ననుసరించి సార్ధకతా పరీక్షా సాంఖ్యకం (P_1, P_2 విలువలు తెలిస్తే)

$$Z = \frac{P_1 - P_2}{SE(P_1 - P_2)} \sim N(0,1)$$ అవుతుంది.

ఇందులో $SE(P_1 - P_2) = \sqrt{\frac{P_1Q_1}{n_1} + \frac{P_2Q_2}{n_2}}$ అవుతుంది. $Q_1 = 1 - P_1$ మరియు $Q_2 = 1 - P_2$ అవుతాయి. P_1, P_2 విలువలు తెలియక పోయినట్లయితే ప్రతిరూపాల అనుపాతాలు P_1, P_2 లకు అంచనాలవుతాయి. అనగా P_1, P_1 యొక్క అంచనా, P_2, P_2 యొక్క అంచనా. కాని, సామాన్యంగా ప్రతి రూపాల అనుపాత విలువల ఆధారంగా వేరొక అనుపాతాన్ని క్రింది సూత్రాలనువయోగించి అంచనా వేస్తారు.

$$P = \frac{n_1P_1 + n_2P_2}{n_1 + n_2}$$

అపుడు సార్ధకతా సాంఖ్యకం $Z = \dfrac{P_1 - P_2}{\sqrt{PQ\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$ అవుతుంది.

ఇందులో $Q = 1 - P$ అవుతుంది.

ఈ పరీక్షనువయోగించి సమస్యను ఎలా పరిష్కరించాలో ఉదాహరణల ద్వారా తెలును కుందాం.

ఉదా - ఒక ప్రతి రూప సర్వే సేకరించిన ఫలితాల ఆధారంగా గడచిన సం॥లో '*A*' పేరు గల కాలేజిలో 500 మంది విద్యార్థులలో 300 మంది మొదటి శ్రేణిలో ఉత్తీర్ణులయ్యారు. అలాగే '*B*' అనే పేరు గల వేరొక కాలేజీలో 300 మంది విద్యార్థులలో 175 మంది ప్రథమ శ్రేణిలో ఉత్తీర్ణులయ్యారు. అయితే ఈ దత్తాంశము రెండు కాలేజీలలోనూ ప్రథమ శ్రేణిలో ఉత్తీర్ణులయిన విద్యార్థుల అనుపాతం ఒకే విధంగా వుందని తెలియజేస్తుందా?

సాధన

ఈ దత్తాంశంలో మొదటి ప్రతి రూపం పరిమాణం $= n_1 = 500$.

మొదటి ప్రతి రూపంలో మొదటి శ్రేణిలో ఉత్తీర్ణులయిన విద్యార్థులు $= 300$

రెండవ ప్రతి రూపం పరిమాణం $n_2 = 300$

రెండవ ప్రతిరూపంలో మొదటి శ్రేణిలో ఉత్తీర్ణులయిన విద్యార్థులు $= 150$

శూన్య ప్రతికల్పన H_0 మొదటి శ్రేణిలో ఉత్తీర్ణులయిన విద్యార్థుల అనుపాతం రెండు కాలేజీలలోనూ సమానం i.e., $P_1 = P_2$

$H_1 : P_1 \neq P_2$ (ద్వి - పార్శ్వ పరీక్ష)

'A' అనే కాలేజీలో ప్రతిరూపం పరిమాణం $n_1 = 500$ లో మొదటి శ్రేణిలో ఉత్తీర్ణులయిన విద్యార్థుల అనుపాతం $= \frac{300}{500} = 0.6$

కాలేజి 'B'లో ప్రతిరూప పరిమాణం 300లు అందులో మొదటి శ్రేణిలో పాసయిన విద్యార్థుల అనుపాతం $P_2 = \frac{150}{300} = 0.5$ పైన ప్రతిపాదించిన శూన్య పరికల్పనను పరీక్షించటానికి అనువైన పరీక్షా సాంఖ్యకం

$$Z = \frac{P_1 - P_2}{\sqrt{PQ\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim N(0,1)$$

$P = \frac{n_1P_1 + n_2P_2}{n_1 + n_2}$ విలువలు ప్రతిక్షేపించగా $= \frac{300+150}{500+300} = \frac{450}{800} = 0.56$

$Q = 1 - 0.56 = 0.44$

కాబట్టి $Z = \frac{0.6 - 0.5}{\sqrt{(0.56)(0.44)\left[\frac{1}{500} + \frac{1}{300}\right]}} = \frac{0.1}{0.035} = 2.86$

5 శాతం సార్ధకతా స్థాయి వద్ద సందిగ్ధ విలువ (ద్వి పార్శ్వ పరీక్ష కాబట్టి) 1.96 అవుతుంది.

నిర్ణయం - గణించిన $|Z|$ విలువ సందిగ్ధ విలువ కన్నా ఎక్కువగా వుంది కాబట్టి శూన్య పరికల్పనను తిరస్కరించటమైనది.

ఉదా - కాఫీ పై సుంకం పెంచక ముందు నిర్వహించిన ఒక సర్వేలో 500 పరిమాణం కలిగిన ఒక ప్రతి రూపంలో 400 మంది కాఫీ తాగే వారున్నారు. సుంకం పెంచిన తదుపరి సేకరించిన సర్వే విలువల ప్రకారం 600 మంది కలిగిన ఒక ప్రతి రూపంలో 400 మంది కాఫీ తాగే వారున్నారని తేలింది. కాఫీ పై సుంకం పెంచటం వల్ల కాఫీ తాగేవారి శాతం తగ్గింది? పరీక్షించండి.

సాధన

శూన్య పరికల్పన $H_0 : P_1 = P_2$ (సుంకం పెంచిన తరువాత పెంచక ముందు కాఫీ తాగే వారి అనుపాతంలో సార్ధకత తేడా లేదు) ప్రత్యామ్నాయ పరికల్పన $H_1 : P_1 > P_2$ (సుంకం పెంచక ముందు కాఫీ తాగే వారి అనుపాతం సుంకం పెంచిన తరువాత కాఫీ తాగే వారి అనుపాతం కన్నా ఎక్కువ).

ఇచ్చిన దత్తాంశం

సుంకం పెంచక ముందు

ప్రతి రూప పరిమాణం $n_1 = 500$

ప్రతి రూపంలో కాఫీ తాగే వారి అనుపాతం $= P_1 = \frac{400}{500} = 0.8$

సుంకం పెంచిన తరువాత

ప్రతి రూప పరిమాణం $n_2 = 600$

ప్రతి రూపంలో కాఫీ తాగే వారి అనుపాతం $= P_2 = \frac{400}{600} = 0.75$

గమనిక - ఇక్కడ దత్తాంశములో సమిష్టి అనుపాతాలు ఇవ్వబడలేదు. కాబట్టి పైనుదహరించిన సూన్య పరికల్పనకు అనువైన సార్ధకతా సాంఖ్యకం $Z = \frac{P_1 - P_2}{\sqrt{PQ\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim N(0,1)$

ఇందులో $P = \frac{n_1P_1 + n_2P_2}{n_1 + n_2}$

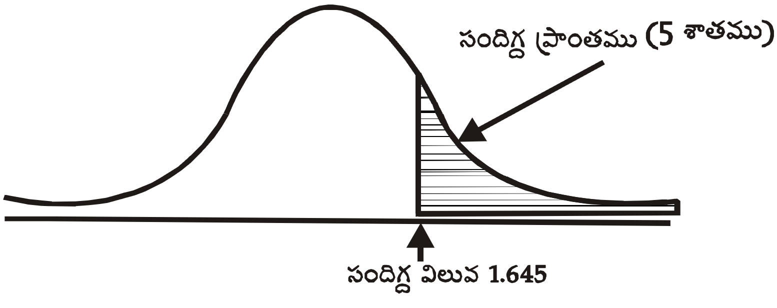
$$= \frac{400+400}{500+600} = \frac{800}{1100} = 0.73$$

$$Q = 1 - P = 1 - 0.73 - 0.27$$

కాబట్టి $Z = \frac{0.8 - 0.75}{\sqrt{(0.73)(0.27)\left(\frac{1}{500} + \frac{1}{600}\right)}} = \frac{0.05}{\sqrt{0.1971(0.002 + 0.0017)}}$

$$= \frac{0.05}{\sqrt{0.1971(0.0037)}} = \frac{0.05}{\sqrt{0.0007292}} = 1.85$$

5 శాతం సార్ధకతా స్థాయి వద్ద ఏక-పార్శ్వ పరీక్ష కాబట్టి సందిగ్ధ విలువ **1.645** అవుతుంది. క్రింది పటము చూడండి.



నిర్ణయం - గణించిన Z విలువ **1.85** సందిగ్ధ విలువ **1.645** కన్నా ఎక్కువగా వుంది కాబట్టి శూన్య పరికల్పన H_0 తిరస్కరించబడుతుంది. అంటే నుంకం పెంచిన తరువాత కాఫీ తాగే వారి అనుపాతం నుంకం పెంచక ముందు కాఫీ తాగే వారి అనుపాతం సార్ధకతగా తగ్గింది.

16.6.5 రెండు క్రమ విచనాల మద్య భేదం సార్ధకతను పరీక్షించుట (*Test for The Difference Between Two S.D's*)

పైన చెప్పుకున్నట్లు గానే వేర్వేరు క్రమ విచనాలు కలిగిన రెండు ప్రతి రూపాలు ఒకే సమిష్టి నుండి గ్రహించినవా లేదా తెలుసుకొనటానికి ఈ పరీక్ష చేస్తాం.

σ_1, σ_2 లు క్రమవిచలనాలుగా కలిగిన రెండు వేర్వేరు సమిష్టిల నుండి వరుసగా 'n_1' పరిమాణం 'S_1' క్రమవిచలనం కలిగిన ఒక ప్రతి రూపం, 'n_2' పరిమాణం 'S_2' క్రమ విచలనం కలిగిన మేరొక ప్రతి రూపం గ్రహించామనుకోండి. ఇక్కడ సమస్య $\sigma_1 = \sigma_2$ ను పరీక్షించటం కాబట్టి

శూన్య పరికల్పన $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$

ప్రత్యామ్నాయ పరికల్పన $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$

శూన్య పరికల్పనను పరీక్షించటానికి సాంఖ్యకం రెండు విధాలుగా వ్రాయవచ్చు.

1. సమిష్టుల క్రమవిచలనాలు తెలిసినట్లయితే (σ_1, σ_2 లు తెలుసు) అపుడు శూన్య పరికల్పనంకు అనుగుణమైన సార్ధకతా పరీక్ష సాంఖ్యకం $Z = \dfrac{S_1 - S_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{2n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{2n_2}}} \sim N(0,1)$ అవుతుంది.

2. సమిష్టుల క్రమవిచలనాలు తెలియనట్లయితే (σ_1, σ_2 లు తెలియవు) అప్పుడు శూన్య పరికల్పనకు అనుగుణమైన పరీక్షా సాంఖ్యకం $$Z = \frac{S_1 - S_2}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{2n_1} + \dfrac{S_2^2}{2n_2}}} \sim N(0,1)$$

పైన ఉపయోగించిన ఇతర సార్ధకతా పరీక్షలలో వలె ఇక్కడ కూడా ఇచ్చిన సార్ధకతా స్థాయి వద్ద సందిగ్ధ విలువ కనుక్కొని దీనిని గణించిన Z విలువతో పోల్చి శూన్య పరికల్పన, అంగీకరించడమో, తిరస్కరించటమో చేస్తాం.

ఉదా - రెండు రాష్ట్రాలకు చెందిన యువకుల ఎత్తు వివరించే రెండు వేర్వేరు ప్రతిరూపాల దత్తాంశము క్రింది విధముగా ఇవ్వబడ్డాయి.

	రాష్ట్రం *A*	రాష్ట్రం *B*
ప్రతి రూప పరిమాణం	1500	1700
ఎత్తు యొక్క అంకమద్యమం	67.4''	67.2''
క్రమ విచలనం	2.5''	3.0''

అయితే ఈ రెండు ప్రతిరూపాల క్రమ విచలనాల మధ్య భేదం సార్ధకతమౌతుందో లేదో తెలుసుకోండి.

సాధన శూన్య పరికల్పన $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$

$H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$ (ద్వి-పార్శ్వ పరీక్ష)

రాష్ట్రం '*A*'లో

ప్రతి రూప పరిమాణం : $n_1 = 1500$

ప్రతిరూప సగటు ఎత్తు అంగుళాలలో : $\bar{X}_1 = 67.4$

ప్రతిరూపం యొక్క క్రమ విచలనం : $S_1 = 2.5$

రాష్ట్రం '*B*' లో

ప్రతిరూప పరిమాణం : $n_2 = 1700$

ప్రతిరూప సగటు ఎత్తు అంగుళాలలో : $\bar{X}_2 = 67.2$

ప్రతిరూప క్రమవిచలనం : $S_2 = 3.0$

శూన్య పరికల్పన కింద పరీక్షా సాంఖ్యకం $Z = \dfrac{S_1 - S_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^{\,2}}{2n_1} + \dfrac{S_2^{\,2}}{2n_2}}} \sim N(0,1)$

విలువలు ప్రతిక్షేపించగా $|Z| = \left| \dfrac{2.5 - 3}{\sqrt{\dfrac{(2.5)^2}{2 \times 1500} + \dfrac{(3)^2}{2 \times 1700}}} \right| = \dfrac{0.5}{0.069} = 7.25$

ఒక శాతం సార్ధకతా స్థాయి విలువగా తీసుకున్నట్లయితే సందిగ్ధ విలువ 2.58 అవుతుంది (ద్వి-పార్శ్వ పరీక్ష కాబట్టి)

నిర్ణయం గణించిన Z విలువ సందిగ్ధ విలువ 2.58 కన్నా ఎక్కువగా వుంది కాబట్టి శూన్య పరికల్పనను తిరస్కరిస్తాము. అనగా రెండు ప్రతిరూపాల క్రమ విచలనాల మధ్య తేడా సార్ధకమౌతుంది.

16.7 లఘు ప్రతిరూపాల పరీక్షలు(*Small-Sample Tests*)

ప్రతిరూపాల పరిమాణం 30, కన్నా తక్కువ అయితే బృహత్ ప్రతి రూపాలంటాం అని, వాటి పరీక్షల గురించి పై విభాగంలో తెలుసుకున్నాం. ప్రతిరూపాల పరిమాణం 30, అంతకన్నా తక్కువైతే వాటిని లఘు ప్రతిరూపాలంటారు.

అని ఇంతకు ముందే తెలుసుకున్నాం. ఈ విభాగంలో లఘు ప్రతిరూపాలలో సార్థకతా పరీక్షల గురించి తెలుసుకందాం. బృహత్ ప్రతిరూపాలలో ఉపయోగించే పద్ధతినే ఇక్కడ కూడా ఉపయోగిస్తాం.

16.7.1 అంకమధ్యమానికి సార్థకతా పరీక్ష (*Significance Test for Single Mean*)

ఒక లఘు ప్రతి రూపం, μ అంకమధ్యమంగా కలిగిన ఒక సమిష్టి నుండి గ్రహించినదా లేదా (లేక) ప్రతిరూపం నగటు (అంకమధ్యమం)కు సమిష్టి అంకమధ్యమానికి మధ్య భేదం సార్థకమౌతుందో లేదో తెలుసుకోటానికి ఈ పరీక్షనుపయోగిస్తాం. ఈ పరీక్షలో శూన్య పరికల్పనను మరియు ప్రత్యామ్నాయ పరికల్పనను క్రింది విధంగా ఏర్పరుస్తాము.

శూన్య పరికల్పన $H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu \neq \mu_0$ (ద్వి పార్శ్వ పరీక్ష)

ప్రతిరూప పరిమాణము 'n' మరియు దాని అంకమధ్యమం $\bar{X}$ అయితే శూన్య పరికల్పన కింద పరీక్షా సాంఖ్యకం

$t = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$ (t విభాజనం) ఇక్కడ $S^2 = \dfrac{\sum\left(X - \bar{X}\right)^2}{n-1}$ (or) $t = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n-1}}$ అయితే ఇందులో

$s^2 = \dfrac{\sum\left(x - \bar{X}\right)^2}{n}$ తో లెక్కించబడుతుంది.

పైన నిర్వచించిన 't', t- విభాజనాన్ని $n-1$ స్వాతంత్ర్యంకముతో అనుసరిస్తుంది. α శాతం సార్థకతా స్థాయి అయినట్లయితే t విభాజనం పట్టిక ఆధారంగా సందిగ్ధ విలువలను తెలుసుకొని $|t|$ విలువ సందిగ్ధ విలువ కన్నా ఎక్కువ అయితే శూన్య పరికల్పనను తిరస్కరించటం, $|t|$ విలువ సందిగ్ధ విలువ కన్నా తక్కువ లేదా సమానం అయితే శూన్య పరికల్పన H_0 ని అంగీకరించటం జరుగుతుంది.

ఉదా - ఒక సబ్బు బిళ్ళలు తయారు చేసే యంత్రము 75 గ్రాముల నగటు బరువు కలిగిన సబ్బు బిళ్ళలు తయారు చేస్తుంది. 10 సబ్బు బిళ్ళల పరిమాణం కలిగిన ఒక ప్రతి రూపంలో సబ్బు బిళ్ళ నగటు బరువు 74.50 గ్రాములు గాను, క్రమ విచలనం 0.5 గ్రాములు గాను కనుగొనుటమైనది. అయితే 5 శాతం సార్థకతా స్థాయి వద్ద సబ్బుబిళ్ళ నగటు బరువు సార్థకమౌతుందని తెలియచేయండి.

సాధన

శూన్యపరికల్పన $H_0 : \mu = 75$ గ్రా॥ (లేక) (సమిష్టి నగటు, ప్రతిరూపం నగటుల మధ్య బేదం సార్థకము కాదు)

$H_1 : \mu \neq 75$ గ్రా॥లు (ద్వి-పార్శ్వ పరీక్ష)

ప్రతిరూపం యొక్క పరిమాణము $n = 10$

ప్రతిరూపం యొక్క నగటు $\bar{X} = 74.5$ గ్రా॥లు

ప్రతిరూపం యొక్క క్రమ విచలనం $S = 0.5$ గ్రా॥లు

శూన్య పరికల్పననుసరించి పరీక్షా సాంఖ్యకం $t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n-1}}$

$$= \frac{74.5 - 75}{0.5 / \sqrt{10-1}} = \frac{-0.5 \times \sqrt{9}}{0.5} = -3$$

5 శాతం సార్ధకతా స్థాయి వద్ద మరియు 9 స్వాతంత్ర్యాంకముల వద్ద 't' సాంఖ్యకం యొక్క సందిగ్ద విలువ ± 2.26 (పట్టిక నుండి) అవుతుంది.

నిర్ణయం - $|t|$ విలువ ఇచ్చిన సార్ధకతా స్థాయి వద్ద సందిగ్దత విలువ కన్నా ఎక్కువగా వుంది కావున శూన్య పరికల్పన తిరస్కరించబడినది.

ఉదాహరణ - ఒక నెలలో వేర్వేరు రోజులలో ఒక వస్తువు యొక్క ధర క్రింది విధముగా ఉన్నాయి. (ధర రూపాయలలో)

64, 68, 63, 65, 70, 69, 71, 68, 65, 66.

ఈ వస్తువు యొత్త సగటు ధర 65 రూ॥లు అనే ప్రతిపాదన నిజమా? కాదా? పరీక్షించండి.

సాధన

శూన్య పరికల్పన $H_0 : \mu = 65$

ప్రత్యామ్నాయ పరికల్పన $H_1 : \mu \neq 65$

ఇక్కడ మనకు ప్రతిరూప విలువలు మాత్రమే ఇవ్వబడ్డాయి కావున ఈ విలువల అంకమధ్యమం, క్రమవిచలనం కనుక్కోవాలి.

ధర (రూ॥లలో)	70 నుండి వ్యత్యాసం (d)	వ్యత్యాసం^{2} (d^2)
64	-6	36
68	-2	4
63	-7	49
65	-5	25
70	0	0
69	-1	1
71	1	1
68	-2	4
65	-5	25
66	-4	16

$\sum d = -31$ $\sum d^2 = -161$

అంకమధ్యమం $: \bar{X} = A + \frac{\sum d}{n}$

$$= 70 + \frac{(-31)}{10} = 70 - 3.1 = 66.9$$

క్రమ విచలనం $S = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{161}{10} - \left(\frac{-31}{10}\right)^2} = \sqrt{16.1 - 9.61} = \sqrt{6.41} = 2.55$$

శూన్య పరికల్పన పై పరీక్షా సాంఖ్యకం $t = \frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n-1}} \sim t_{n-1}$

విలువలు ప్రతిక్షేపించగా $t = \frac{66.9 - 65}{2.55 / \sqrt{10-1}} = \frac{1.9}{2.55 / \sqrt{90}} = 2.24$

ఒక శాతం సార్ధకతా స్థాయి వద్ద, ద్వి పార్శ్వ పరీక్ష కాబట్టి t సాంఖ్యకం పట్టిక విలువ **'9'** స్వాతంత్ర్యాంకాల వద్ద **3.25** అవుతుంది.

నిర్ణయం - $|t|$ విలువ సందిగ్ధ విలువ కన్నా తక్కువ కాబట్టి శూన్య పరికల్పన అంగీకరించబడుతుంది.

16.7.2 రెండు అంకమధ్యమాల మధ్య సార్ధకతా భేదానికి పరీక్ష (*Test of sigmificance for difference between means*)

రెండు వేర్వేరు లఘు ప్రతిరూపాలు ఒకే నగటు కలిగిన రెండు వేర్వేరు స్వతంత్ర సామాన్య విభాజనాల నుండి తీసుకున్నవా? లేదా? (లేక) రెండు స్వతంత్ర సమిష్టుల నగటువ మధ్య బేధం సార్ధకమా? కాదా? అని పరీక్షించటానికి ఈ పరీక్షనుపయోగిస్తారు. బృహత్ ప్రతిరూపాలలో ఈ రకమైన పరీక్ష *Z* సాంఖ్యకాని ఉపయోగించాము, కానీ ఇక్కడ '*t*' సాంఖ్యకానుపయోగించి ఈ పరీక్షలు నిర్వహిస్తాము.

'μ_1' అంకమధ్యమం మరియు 'σ_1^2' విస్తృతిగా కలిగిన ఒక సామాన్య విభాజనం నుండి 'n_1' పరిమాణం గల ఒక లఘు ప్రతిరూపం తీసుకున్నాం దీని విలువల నగటు (అంకమధ్యమం) $\bar{X}_1$ అనుకుందాం.

'μ_2' అంకమధ్యమం మరియు 'σ_2^2' విస్తృతిగా కలిగిన వేరొక సామాన్య విభాజనం నుండి 'n_2' పరిమాణం గల వేరొక ప్రతిరూప విలువల నగటు విలువ $\bar{X}_2$ అనుకుంటే

శూన్య పరికల్పన $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

ప్రత్యామ్నాయ పరికల్పన $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ అయి 'σ^2' విలువ తెలియనప్పుడు శూన్య పరికల్పన H_0 కొరకై పరీక్షా సాంఖ్యకం

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\hat{S}^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$ అవుతుంది.

ఈ సూత్రంలో $\hat{S}^2 = \frac{\sum\left(x_1 - \bar{X}_1\right)^2 + \sum\left(x_2 - \bar{X}_2\right)^2}{n_1 + n_2 - 2}$ లేదా $\hat{S}^2 = \frac{n_1 {s_1}^2 + n_2 {s_2}^2}{n_1 + n_2 - 2}$

${s_1}^2$ - మొదటి ప్రతిరూపం యొక్క విస్తృతి

${s_2}^2$ - రెండవ ప్రతిరూపం యొక్క విస్తృతి

α శాతం స్థాయి విలువ వద్ద $n_1 + n_2 - 2$ సాంఖ్యాకముల వద్ద t సాంఖ్యకం యొక్క సందిగ్ధ విలువ పట్టిక నుండి తెలుసుకొని, గణించిన $|t|$ విలువ సందిగ్ధ విలువ కన్నా ఎఉక్కవగా ఉన్న యెడల H_0ను తిరస్కరిస్తాము. లేకపోతే అంగీకరిస్తాము.

ఉదా - ఒక గ్రూపులోని **12** మంది విద్యార్థులకు 'A' అనే భోదనా పద్దతి, వేరొక గ్రూపులోని **15** మంది విద్యార్థులకు 'B' అనే భోదనా పద్దతిని అనుసరించి పాఠాలు చెప్పబడ్డాయి. మాసాంతరమున పరీక్షలో వారికి వచ్చిన మార్కులు ఈ క్రింది ఇవ్వబడినాయి. భోదనా పద్దతి 'A' - **32, 20, 34, 30, 36, 25, 30, 25, 36, 20, 18, 30**

భోదనా పద్దతి 'B' - **44, 34, 10, 22, 31, 47, 40, 30, 32, 35, 18, 21, 35, 29, 22**

మార్కుల దృష్ట్యా రెండు భోదనా పద్దతుల మద్య సార్ధకమైన భేదము ఉన్నదో లేదో కనుక్కోండి.

సాధన

ముందుగా ఇచ్చిన ప్రతరూపాల విలువల నుండి అంకమద్యమం మరియు క్రమవిచలనం కనుగొందాము.

మొదటి ప్రతి రూపం యొక్క అంకమద్యమం : $\bar{X}_1$

$$\bar{X}_1 = \frac{32+20+34+30+36+25+30+25+36+18+30}{12} = \frac{336}{12} = 28$$

రెండవ ప్రతిరూపం యొక్క అంకమద్యమం : $\bar{X}_2$

$$\bar{X}_2 = \frac{44+34+10+22+31+47+40+30+32+35+18+21+35+29+22}{15} = \frac{450}{15} = 30$$

సమిష్టి క్రమ విచలనాలు తెలియవు కాబట్టి ఇక్కడ $\hat{S}^2$ కనుక్కోవాలి అందుకోసమై

$$\sum\left(x_1 - \bar{X}_1\right)^2 = (32-28)^2 + (20-28)^2 + ... + (18-28)^2 + (30-28)^2$$

$$= 448$$

$$\sum\left(x_2 - \bar{X}_2\right)^2 = (44-30)^2 + (34-30)^2 + \ldots\ldots\ldots + (29-30)^2 + (22-30)^2$$

$$= 1410$$

$$\hat{S}^2 = \frac{448 + 1410}{12 + 15 - 2}$$

$$= 74.32$$

శూన్య పరికల్పన $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ (ద్వి-పార్శ్వ పరీక్ష)

శూన్య పరికల్పనకు అనుగుణమైన సాంఖ్యక పరీక్ష $t = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\hat{S}^2\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$

(క్రై-స్క్వేర్)

$$= \frac{28 - 30}{\sqrt{74.32\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{15}\right)}}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{74.32\,(0.39)}} = -0.599$$

సార్థకతా స్థాయి 5 శాతంగా పరిగణిస్తే, స్వాతంత్ర్యాంకాలు 25 దగ్గర సందిగ్ధ విలువ 2.06 (పట్టిక నుండి గ్రహించబడినది)

నిర్ణయం - $|t|$ విలువ సందిగ్ధ విలువ కన్నా తక్కువ వుంది కాబట్టి 5 శాతం సార్ధకతా స్థాయి వద్ద శూన్య పరికల్పన అంగీకరించబడుతుంది. ఉదాహరణకు ఈ క్రింది దత్తాంశంలో రెండు వేర్వేరు బ్రాండ్‌లకు చెందిన విద్యుత్ దీపాల ప్రతి రూపాల నుండి సేకరించిన విలువలు ఆధారంగా, విద్యుత్ దీపాల సగటు జీవిత కాలం మరియు క్రమవిచలనాలు యివ్వబడ్డాయి.

ప్రతి రూపం	విద్యుత్ దీపాల బ్రాండ్	
	A	*B*
పరిమాణం	10	15
సగటు	1250గం॥	1100గం॥
క్రమవిచలనం	36 గం॥	49 గం॥

పై దత్తాంశం ఆధారంగా A బ్రాండ్ విద్యుత్ దీపాల సగటు జీవిత కాలం 'B' బ్రాండ్ విద్యుత్ దీపాల సగటు జీవిత కాలం కన్నా సార్ధకంగా ఎక్కువనే పరికల్పనను పరీక్షించండి.

సాధన

శూన్య పరికల్పన $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ (ఏక-పార్శ్వ పరీక్ష)

'A' బ్రాండ్ విద్యుత్ దీపాల ప్రతి రూపం యొక్క

పరిమాణం $n_1 = 10$

జీవిత కాలం సగటు $\bar{X}_1 = 1250$ గం॥లు

క్రమ విచలనం $S_1 = 36$

'B' బ్రాండ్ విద్యుత్ దీపాల ప్రతిరూపం యొక్క

పరిమాణం $n_2 = 15$

జీవిత కాలం సగటు $\bar{X}_2 = 1100$ గం॥లు

క్రమ విచలనం $S_2 = 49$

పైన ప్రతిపాదించిన శూన్య పరికల్పనను పరీక్షించటానికి పరీక్షా సాంఖ్యకం $t = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\hat{S}^2\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$

ముందుగా $\hat{S}^2$ విలువ కనుక్కొందాం.

$$\hat{S}^2 = \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{10 \times (36)^2 + 15\,(49)^2}{10 + 15 - 2}$$

$$= \frac{48975}{23} = 2129.35$$

కాబట్టి $t = \dfrac{1250 - 1100}{\sqrt{2129.35\left(\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{15}\right)}}$

$$= \frac{150}{\sqrt{8162.5}} = \frac{150}{90.35} = 1.66$$

5 శాతం సార్ధకతా స్థాయి వద్ద మరియు **23** స్వాతంత్ర్యాకముల వద్ద t సాంఖ్యకం యొక్క సందిగ్ధ విలువ పట్టికలో **1.71** అయింది.

నిర్ణయం - గణించిన |t| విలువ సందిగ్ధ విలువ కన్నా తక్కువగా వుంది. కాబట్టి శూన్య పరికల్పన H_0 తిరస్కరించబడదు. అనగా, బ్రాండ్ 'A' విద్యుత్ దీపాల జీవిత కాలం సగటు బ్రాండ్ 'B' విద్యుత్ దీపాల జీవిత కాలం సగటు కన్నా సార్ధకంగా ఎక్కువ కాదు అన్నమాట.

16.7.3 రెండు అంకమధ్యమాల మధ్య భేదానికి జంట-పరీక్ష (*Paired 't' - test for difference of Means*)

పైన వివరించిన సార్ధకతా పరీక్షలో ప్రతి రూపాలు స్వతంత్ర సామాన్య విభాజనాల నుండి సేకరించబడినాయి అని చెప్పుకున్నాం. అలాకా, ఒక దాని మీద ఒకటి ఆధారపడి ఉన్న ప్రతిరూపాల అంకమధ్యమాల మధ్య భేదం పరీక్షించటం కూడా సాధ్యపడుతుంది. ఉదాహరణకు *RTC* డిపో మేనేజరు, ఒక ప్రత్యేకమైన శిక్షణ సంస్థలోని డ్రైవర్ల సామర్థ్యాన్ని పెంచుతుందో లేదో తెలుసుకోవాలనుకుంటాడు అనుకోండి. అది ఈ విధంగా చేయవచ్చు. మొదట శిక్షణ యివ్వక ముందు ఒక ప్రతిరూపం తీసుకుని, అందులోని డ్రైవర్ల సామర్థ్యం కొలుస్తారు. ఆ తరువాత ప్రతిరూపంలో డ్రైవర్లందరికి శిక్షణనిస్తారు. శిక్షణ పూర్తయిన తరువాత మరలా డ్రైవర్ల సామర్థ్యం కొలుస్తారు. ఈ విధంగా ఈ సమస్యలో రెండు వేర్వేరు ప్రతిరూపాలుంటాయి. ఒకటి శిక్షణ యివ్వక ముందు ఇంకొకటి శిక్షణ ఇచ్చిన తరువాత . ఇక్కడ ప్రతిరూపాలు స్వతంత్రాలు కావు. ఈ సమస్యలో డ్రైవర్ల సామర్థ్యంలో భేదం సార్థకం అవునా? కాదా? అనే ప్రతిపాదికను పరీక్షించటానికి ఈ జంట-పరీక్షను ఉపయోగిస్తారు.

ఈ పరీక్షలో ఉపయోగించే సంకేతాలు

x_1 , x_2 .... x_n మొదటి ప్రతిరూపంలో విలువలు

$y_1, y_2, ...y_n$ రెండవ ప్రతిరూపంలో విలువలు

$d = (x_1 - y_1), (x_2 - y_2), (x_3 - y_3), ... (x_n - y_n)$ అవుతుంది.

$\bar{d} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)}{n}$ ($n =$ ప్రతిరూప పరిమాణం)

శూన్య పరికల్పన $H_0 : \bar{d} = 0$ ($\bar{d}$ మరియు '0' కి మధ్య భేదం సార్ధకం కాదు)

$H_1 : \bar{d} \neq 0$

శూన్య పరికల్పన H_0 ను పరీక్షించుటకు అనువైన సాంఖ్యకం $t = \dfrac{\bar{d}}{\sqrt{\hat{S}^2 / n}} = \dfrac{\bar{d}}{\sqrt{s^2 / n-1}} \sim t(n-1)$

ఇందులో $\hat{S}^2 = \dfrac{\sum\left(d-\bar{d}\right)^2}{n-1}$ $s^2 = \dfrac{\sum\left(d-\bar{d}\right)^2}{n}$ అవుతాయి.

ఉదా - పది మంది సేల్స్ రిప్రజెంటివ్‌ల అమ్మక సామర్థ్యం శిక్షణ యివ్వక ముందు, యిచ్చిన తరువాత కొలచి ఈ క్రింద పట్టికలో ఇవ్వబడినాయి. t - జంట పరీక్షనుపయోగించి, సిక్షణ అమ్మక సామర్థ్యాన్ని పెంచిదని చూపండి.

సేల్స్ రిప్రజెంటెటివ్‌ల సంఖ్య	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
అమ్మిన వస్తువుల శిక్షణ ముందు	20	22	17	23	21	18	20	22	24	23
సంఖ్య శిక్షణ తరువాత	25	24	23	27	25	24	26	28	29	29

సాధన - ముందుగా ఈ క్రింది పట్టిక తయారు చేసి $d, \bar{d}$ విలువలు కనుక్కుందాము.

సేల్స్ రి॥	శిక్షణ ముందు సంఖ్య అమ్మిన వస్తువుల సంఖ్య (x)	శిక్షణ తరువాత అమ్మిన వస్తువుల సంఖ్య (y)	d $y-x$	d^2
1	20	25	5	25
2	22	24	2	4
3	17	23	6	36
4	23	27	4	16
5	21	25	4	16
6	18	24	6	36
7	20	26	6	36
8	22	28	6	36
9	24	29	5	25
10	23	29	6	36
			$\sum d = 50$	$\sum d^2 = 266$

$$\bar{d} = \frac{50}{10} = 5$$

$$s^2 = \frac{\sum\left(d-\bar{d}\right)^2}{n} = \frac{1}{n}\sum d^2 - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{10}266 - \left(\frac{50}{10}\right)^2 = 26.6 - 25 = 1.6$$

శూన్య పరికల్పన H_0 - శిక్షణకు ముందు, శిక్షణకు తరువాత అమ్మక సామర్థ్యంలో తేడా ఏమి లేదు.

H_1 - శిక్షణ తరువాత అమ్మక సామర్థ్యం శిక్షణ ముందు అమ్మక సామర్థ్యం కన్నా ఎక్కువ.

శూన్య పరికల్పనను పరీక్షించటానికి సాంఖ్యకం $t = \frac{\bar{d}}{\sqrt{S^2 / n-1}} = \frac{5}{\sqrt{1.6/9}} = 11.86$

అయిదు శాతం సార్ధకతా స్థాయి వద్ద ఏక-పార్శ్య పరీక్ష కాబట్టి 9 స్వతంత్ర్యాకాల వద్ద t- యొక్క సందిగ్ధ విలువ పట్టిక నుండి **1.83** అయింది.

నిర్ణయం -గణించిన $|t|$ విలువ సందిగ్ధ విలువ కన్నా ఎక్కువగా వుంది కాబట్టి సూన్య పరికల్పనను తిరస్కరిస్తూ ప్రత్యామ్నాయ పరికల్పనను అంగీకరించటం జరుగుతుంది. అంటే శిక్షణ వలన సేల్స్ రిప్రెజెంట్‌టివ్‌లలో అమ్మక సామర్థ్యం పెరిగిందన్న మాట.

16.7.4 ప్రతిరూప సహసంబంధ గుణకము యొక్క సార్ధకతా పరీక్ష (*Significance Test for Sample Correlation Coefficient*)

ఒక ద్వి-చల (*Bivaritate*) సామాన్య విభాజనం నుండి తీసిన '*n*' పరిమాణం గల ప్రతిరూపం యొక్క సహసంబంధ గుణకం '*r*' అనుకుంటే, ఈ ప్రతిరూప సహసంబంధ గుణకానికి, సున్నాకి మధ్య తేడా సార్దకం కాదు అనే శూన్య పరికల్పనను పరీక్షించటానికి ఈ పరీక్షా సాంఖ్యకాన్ని వుపయోగిస్తారు. ఈ సమస్యలో

శూన్య పరికల్పన $H_0 : r = 0$ ('r'కి సున్నాకి మధ్య తేడా సార్థకం కాదు)

$H_1 : r \neq 0$ ('r'కి సున్నాకి మధ్య తేడా సార్దకమౌతుంది.)

శూన్య పరికల్పన H_0 కొరకు పరీక్షా సాంఖ్యకం $t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \sim t(n-2)$

ఉదా -ఒక ద్వి-చల సామాన్య విభాజనం నుండి తీసుకున్న 18 జంట విలువల పరిమాణం కలిగిన ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రతిరూప సహసంబంధ గుణకం 0.8 అయితే దాని సార్దకతను పరీక్షించండి.

సాధన

$H_0 : P = 0$ (ρ సమిష్టి యొక్క సహసంబంద గుణకము)

$H_1 : P \neq 0$

శూన్య పరికల్పనను పరీక్షించటానికి సాంఖ్యకం $t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-(0.8)^2}}$

$$= \frac{0.8\sqrt{18-2}}{\sqrt{1-(0.8)^2}} = \frac{0.8 \times 4}{\sqrt{1-0.64}} = \frac{3.2}{\sqrt{0.36}} = \frac{3.2}{0.6} = 5.33$$

సార్థకతా స్థాయి 5 శాతం వద్ద 16 స్వాతంత్ర్యాకాల వద్ద సందిగ్దతా విలువ **2.12** అవుతుంది.

నిర్ణయం - గణించిన t విలువ సందిగ్దతా విలువ కన్నా ఎక్కువగా వుంది. కావున H_0 ను తిరస్కరించటమైనది. అనగా 'r'కి సున్నాకి మధ్య భేదం సార్దకమౌతుంది.

ఉదా - ఒక ప్రతిరూపంలోని ద్వి-చల రాశుల మధ్య సహసంబంధ గుణకము 0.65, ప్రతిరూప యొక్క పరిమాణం 10 అయితే చలరాసుల సహసంబంధ గుణకము శూన్యమౌతుందనే పరికల్పనను పరీక్షించండి.

సాధన

శూన్య పరికల్పన $H_0 : p = 0$

ప్రత్యామ్నాయ పరికల్పన $H_1 : p \neq 0$

ఈ శూన్య పరికల్పనను పరీక్షించటానికి సాంఖ్యకం $t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$

$$= \frac{0.65\sqrt{10-2}}{\sqrt{1-(0.65)^2}}$$
$$= \frac{0.65\sqrt{8}}{\sqrt{1-0.423}}$$
$$= \frac{(0.65)(2.83)}{\sqrt{0.577}}$$
$$= \frac{(0.65)(2.83)}{0.759}$$
$$= \frac{1.84}{0.759} = 2.42$$

(కై-స్క్వేర్)

ఒక శాతం సార్థకతా స్థాయి వద్ద 8 స్వాతంత్ర్యాకాల వద్ద సందిగ్ధ విలువ 3.36 అవుతుంది.

నిర్ణయం - గణించిన 't' విలువ 2.42 సందిగ్ధ విలువ 3.36 కన్నా తక్కువ కాబట్టి శూన్య పరికల్పన తిరస్కరించబడదు.

16.8 కై - స్క్వేర్ పరీక్ష (*Chi- Square Test*)

ఇప్పటి వరకూ విశదీకరించిన పరీక్షలలో సగటు, అనుపాతం మొదలగు వాటి సార్థకతా పరీక్షలను గురించి తెలుసుకున్నాము. ఈ పరీక్షలలో సమిష్టి పరామితులు కానీ, ప్రతిరూప సాంఖ్యకాలు కానీ వుపయోగించబడినాయి అందువలన ఆ పరీక్షలను "పరామిత పరీక్షలు" (*Parametric Tests*) అని కూడా అంటాము. ఇలా కాకుండా పరామితుల గురించి గాని, దానికి చెందిన విభాజనం గురించి కాని సంబందించిన విషయాలనువయోగించకుండా శూన్య పరికల్పనను పరీక్షించటానికి వేరొక రకమైన పరీక్షలు కలవు. ఆ పరీక్షలను 'అపరామిత పరీక్షలు' (*Non-Parametric Tests*) లేక "డిస్ట్రిబ్యూషన్ ఫ్రీ" (*Distribution-Free Tests*) పరీక్షలని కూడా అంటారు.

కై-స్క్వేర్ పరీక్ష చాలా ముఖ్యమైన పరీక్ష. దీనిని అన్ని సాంఘిక శాస్త్రలలో, జీవ శాస్త్రం, వృక్షశాస్త్రం మొ॥ అన్ని శాస్త్రాలలోనూ దత్తాంశమును విశ్లేషించటానికి చాలా ఎక్కువగా ఉపయోగిస్తారు. దీని ఉపయోగాలు అనేకం. ఇంతకు ముందు నేర్చుకున్న సార్థకతా పరీక్షలలో ఒకటి లేక రెండు సమిష్టులను మాత్రమే పరిగణనలోకి తీసుకున్నాం. సమిష్టుల సంఖ్య రెండు కన్నా ఎక్కువగా ఉండే సందర్భాలు కూడా వుంటాయి. ఉదాహరణకు ఒక టి.వి. కంపెనీ మేనేజరు వివిధ రాష్ట్రాలలో ఎంత అనుపాతం ప్రజలు వారు తయారు చేసిన టి.వి.ని వాడుతున్నారో

తెలుసుకోవాలనుకుంటాడు అనుకోండి. ఇప్పటి వరకు మనం నేర్చుకున్న పరీక్షలు ఇక్కడ వుపయోగపడవు. కై-స్క్వేర్ పరీక్షనుపయోగించి ఇటువంటి సమస్యలకు సమాధానం రాబట్టవచ్చు. అలాగే ఒక దత్తాంశం రెండు లేక మూడు చలరాశులు లేక గుణాల (*Attributes*) ఆధారంగా వివిధ తరగతులుగా విభజించబడి వున్న యెడల, ఆ చలరాశులు (లేక) గుణాలు స్వతంత్రములు అవునో, కాదో తెలుసుకోటానికి కూడా ఈ పరీక్ష వుపయోగపడుతుంది. అంతేకాకా ప్రతిరూపం అందిచింన రుజువుల ఆధారంగా ఒక విభాజనం, మనకు తెలిసిన విభాజనం అవునో కాదో కూడా పరీక్షించవచ్చు. కై-స్క్వేర్ పరీక్షను తరచుగా ఈ క్రింది వి,యాలు పరీక్షించటానికి ఉపయోగిస్తాము.

1. సమిష్టి విస్తృతిని పరీక్షించటానికి
2. సంధాన యోగ్యతను నిర్ణయించటానికి
3. స్వాతంత్ర్యతాన్ని పరీక్షించుటకు మరియు
4. ఒకే సమానత్వాన్ని (*Homogenity*)ని పరీక్షగా ఉపయోగిస్తారు.

16.7.1 సమిష్టి విస్తృతి యొక్క పరీక్ష (*Testing of Population Varience*)

ఈ పరీక్షనుపయోగించి ఒక సామాన్య విభాజనం నుండి తీసుకున్న '*n*' పరిమాణం గల ప్రతిరూప విలువలనుపయోగించి, సమిష్టి విస్తృతి 'σ^2' ముందుగా అనుకున్న విలువ 'σ_0^2'కు మధ్య తేడా ఉందో, లేదో కనుక్కోవచ్చు. ఈ పరీక్షలో సామాన్యంగా శూన్య పరికల్పన $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ మరియు ప్రత్యామ్నాయ పరికల్పన $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ అవుతాయి.

శూన్య పరికల్పన H_0ని పరీక్షించటానికి అనువైన పరీక్షా సాంఖ్యకం $\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$

's^2' ప్రతిరూపం యొక్క విస్తృతి ముందుగా అనుకున్న సామాన్య విభాజనం యొక్క విస్తృతి విలువ 'σ_0^2' మరియు స్థాయి విలువ 'α' అయితే, y^2 పట్టికనుపయోగించి, $n-1$ స్వాతంత్ర్యాకాల వద్ద χ^2 విలువ తెలుసుకోవాలి. పై సూత్రం ఉపయోగించి గణించిన χ^2 విలువ సందిగ్ధ విలువ కన్నా ఎక్కువగా వుంటే శూన్య పరికల్పనను తిరస్కరించటం లేదా అంగీకరించటం జరుగుతుంది.

ఉదా - బజాజ్ స్కూటర్ కంపెనీ, స్కూటర్‌లలో వుపయోగించే పిష్టన్ రాడ్డులను '*xyz*' ్నఏ కంపెనీ నుండి కొనటానికి పిష్టన్ రాడ్డుల పొడవులోని విస్తృతి 0.2 *m.m* కన్నా ఎక్కువగా వుండకూడదనే నియమం పెట్టింది. తాము నిర్దేశించిన పరిమాణాలున్నాయా లేదో తెలుసుకోవటానికి '*xyz*' కంపెనీ పంపిన ఒక లాటు నుండి యాదృచ్ఛికంగా 10 రాడ్డులు కలిగిన ఒక ప్రతిరూపం గ్రహించి వాటి పొడవులు కొలిచి ఈ క్రింద పొందుపరిచారు.

15.10, 15.61, 15.32, 15.46, 15.12, 15.34, 15.87, 15.22, 15.63, 15.43

ఈ దత్తాశమునుపయోగించి లాటులోని పిష్టన్ రాడ్డుల విస్తృతి నిర్దేశించిన పరిమాణాలకు అనువుగా వుందా? లేదా మరియు ఈ లాటును కొనవచ్చా? లేదా? తెలియజేయండి.

సాధన

శూన్య పరికల్పన $H_0 : \sigma^2 = 0.2$

$H_1 : \sigma^2 > 0.2$

శూన్య పరికల్పనను పరీక్షించటానికి పరీక్షా సాంఖ్యకం $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^{\ 2}}$

ముందుగా $s^2 = \frac{1}{n}\sum x^2 - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2$

$\sum x = 154.1 \qquad \sum x^2 = 2375.21$

కాబట్టి $S^2 = \frac{2375.21}{10} - \left(\frac{154.1}{10}\right)^2$

$= 0.0529$

$y^2 = \frac{(10-1)(0.0529)}{0.2} = \frac{0.4761}{0.2} = 2.3805$

5 శాతం సార్ధకత స్థాయి విలువ వద్ద మరియు 9 స్వాతంత్ర్యాకాలు వద్ద సందిగ్ధ విలువ పట్టిక నుండి 16.919 అయినది.

నిర్ణయం - గణించిన y^2 విలువ సందిగ్ధ విలువ కన్నా తక్కువ కాబట్టి శూన్య పరికల్పన అంగీకరించబడుతుంది. అనగా లాటులోని పిష్టన్ రాడ్డుల పొడవు నిర్దిష్ట పరిమాణాలకు లోబడే వుంది. కావున ఈ లాటును కొనవచ్చు.

16.7.2 సంధాన యోగ్యతా పరీక్ష (*Test for Goodness of Fit*)

కై-స్క్వేర్ పరీక్షనుపయోగించి, ఇచ్చిన ఒక ప్రేక్షిత (*Observed*) దత్తాంశానికి ద్విపద (*Binomial*), పాయిజాన్ (*Poisson*) మరియు సామాన్య (*Normal*) విభాజనాలలో దేనినైనా సందాన పరచి ఆ సందానం ఎంత యోగ్యత కలిగివుందో తెలుసుకోవచ్చు.

ఈ పరీక్షనుపయోగించేటప్పుడు పాటించవలసిన *steps.*

1. మొదటిగా శూన్య పరికల్పనను, ప్రత్యామ్నాయ పరికల్పనను, సార్ధకతా స్థాయిని కూడా నిర్దేశిస్తాము.
2. ఇచ్చిన పౌనఃపున్యాలను '0' తో గుర్తిస్తాము. వీటి నుండి అంచనా విలువలు (*Estimated Values*) లెక్కిస్తాము. వీటిని అంచనా పౌనఃపున్యాలంటూ '*E*' తో గుర్తిస్తాము.
3. ప్రతి తరగతి లేక వర్గానికి చెందిన ప్రేక్షిత పౌనఃపున్యం మరియు అంచనా పౌనఃపున్యం యొక్క తేడాను లెక్కించి $(O_1 - E_1)$ మరియు ఈ తేడాల వర్గాన్ని కనుక్కొంటాం $((O_1 - E_1)^2)$.
4. పైన లెక్కించిన వర్గాన్ని సంబందిత అంచనా పౌనఃపున్యంచే భాగించాలి. $\sum \frac{(Oi - Ei)}{Ei}$
5. పై Step లో వచ్చిన విలువల మొత్తం కనుక్కోవాలి $\sum \frac{(Oi - Ei)^2}{Ei}$ దీనినే y^2 తో సూచిస్తాము.

6. సార్ధకతా స్థాయి, స్వాతంత్ర్యాకాలను బట్టి పట్టిక నుండి y^2 విలువ తెలుసుకోవాలి.

7. గణించిన y^2 విలువ సందిగ్ధ విలువ కన్నా ఎక్కువ వుంటే శూన్య పరికల్పనను తిరస్కరించటం లేనిచో అంగీకరించటం జరుగుతుంది.

ఉదా - నాలుగు వందల పేజీలు కల ఒక పుస్తకంలో, ఒక్కొ పేజీలో తప్పుల సంఖ్య విభాజనం ఈ దిగువ పట్టికలో ఇవ్వబడినాయి. ఈ పుస్తకంలోని పేజీలలోని తప్పుల సంఖ్యలు పాయిజాన్ విభజనాన్ని అనుసరిస్తున్నాయో, లేదో తెలుసుకొనండి.

ఒక పేజీలో తప్పుల సంఖ్య (*x*)	-	0	1	2	3	4	5
పేజీల సంఖ్య (*f*)	-	228	116	47	6	3	0

సాధన

H_0 - తప్పుల సంఖ్య విభాజనం పాయిజాన్ న్యాయాన్ని అనుసరిస్తున్నాయి.

H_1 - తప్పుల సంఖ్య విభాజనం పాయిజాన్ న్యాయాన్ని అనుసరించుట లేదు.

తప్పుల సంఖ్య అనే చలరాశిని '*x*' తో సూచిస్తే *x* వేర్వేరు విలువలను తీసుకోవటానికి సంభావ్యతను $P(X=x)=\frac{e^{-m}.m^x}{x^1}$ సూత్రాన్ని ఉపయోగించి కనుక్కుందాం. ఇక్కడ 'm' పాయిజాన్ విభాజనం యొక్క అంకమధ్యమం. దీని విలువను ఈ క్రింది విధంగా కనుక్కోవచ్చు.

అంకమధ్యమం $: m=\frac{\sum fx}{\sum f}$

$$=\frac{(0\times 228)+(1\times 116)+(2\times 47)+(3\times 6)+(4\times 3)+(5\times 0)}{400}$$

$$=\frac{240}{400}=0.6$$

పైన వివరించినట్లుగా పాయిజాన్ సంభావ్యతలు కనుక్కోవటానికి $P(X=x)=\frac{e^{-m}m^x}{x!}$ నుపయోగిస్తాం.

ఇందులో $m=0.6 \qquad x=0,1,2,3,4,5$ అవుతాయి.

$e^{-m}=e^{-0.6}$ విలువ పట్టిక ఆధారంగా కనుక్కుంటాం.

$e^{-0.6}=0.5488\cong 0.55$

x = 0 అయినపుడు $P(0)=\frac{e^{-0.6}(0.6)^0}{0!}=e^{-0.6}=0.55$

x = 1 అయినపుడు $P(1)=P(0)\times\frac{m}{1}=\frac{0.55\times 0.6}{1}=0.33$

$x = 2$ అయినపుడు $P(2) = P(1) \times \frac{m}{2} = \frac{0.33 \times 0.6}{2} = 0.099$

$x = 3$ అయినపుడు $P(3) = P(2) \times \frac{m}{3} = \frac{0.099 \times 0.6}{3} = 0.0198$

$x = 4$ అయినప్పుడు $P(4) = P(3) \times \frac{m}{4} = \frac{0.0198 \times 0.6}{4} = 0.00297$

$x = 5$ అయినపుడు $P(5) = P(4) \times \frac{m}{5} = \frac{0.0297 \times 0.6}{5} = 0.0003564$

పైన గణించిన సంభావ్యతలను మొత్తం పేజీల సంఖ్య 400చే గుణించగా అంచనా పౌనఃపున్యాలు వస్తాయి. ఈ కింది విధంగా

$x = 0$ అయితే అంచనా పౌనఃపున్యం - $400 \times 0.55 = 220$

$x = 1$ అయితే అంచనా పౌనఃపున్యం - $400 \times 0.33 = 132$

$x = 2$ అయితే అంచనా పౌనఃపున్యం - $400 \times 0.099 = 39.6 = 40$

$x = 3$ అయితే అంచనా పౌనఃపున్యం - $400 \times 0.0198 = 7.92 = 8$

$x = 4$ అయితే అంచనా పౌనఃపున్యం - $400 \times 0.00297 = 1.18 = 1$

$x = 5$ అయితే అంచనా పౌనఃపున్యం - $400 \times 0.0003564 = 0.14 = 0$

ఇపుడు y^2 పరీక్ష నిర్వహించటానికి ఈ క్రింది పట్టికను తయారు చేయాలి.

తప్పుల సంఖ్య(x)	ప్రేక్షిత పౌనఃపున్యం(O)	అంచనా పౌనఃపున్యం(E)	$O-E$	$(O-E)^2$	$\frac{(O-E)^2}{E}$
0	228	220	8	64	$\frac{64}{220} = 0.29$
1	116	132	-16	252	$\frac{256}{132} = 1.93$
2	47	40	7	49	$\frac{49}{40} = 1.23$
3	6	8			
4	3	1	0	0	$\frac{0}{9} = 0$
5	0	0			

మొత్తం $y^2 = 3.45$

స్వాతంత్ర్యాకములు $= 6 - 1 - 3 = 2$

5 శాతం సార్థకతా స్థాయి వద్ద, మరియు '2' స్వాతంత్ర్యాకలు వద్ద y^2 పట్టిక విలువ **5.997.** లెక్కించిన y^2 విలువ **3.45** సందిగ్ధ విలువ కన్నా తక్కువగా ఉంది కావున శూన్య పరికల్పన అంగీకరించబడింది.

ఉదా - నలుగురు పిల్లలు కలిగిన 400 కుటుంబాలలో ఎంత మంది మగపిల్లలున్నారో సర్వే చేయగా ఈ క్రింది విధంగా వున్నాయి.

మగపిల్లల సంఖ్య	0	1	2	3	4
పౌనఃపున్యం	20	115	130	123	22

పట్టికలో ఇవ్వబడిన దత్తాంశము ద్విపద న్యాయాన్ని పాటిస్తుందని y^2 పరీక్షనుపయోగించి నిరూపించండి.

సాధన

శూన్య పరికల్పన H_0 :యిచ్చిన ప్రేక్షిక దత్తాంశము ద్విపద న్యాయాన్ని పాటిస్తుంది.

ప్రత్యామ్నాయ పరికల్పన $H_1 : H_0$ నిజం కాదు.

ప్రతిపాదించిన శూన్య పరికల్పన పై ఒక కుటుంబంలో మగ పిల్లవాడు వుండటానికి సంభావ్యత $P = \frac{1}{2}$, వుండకపోవటానికి సంభావ్యత $\frac{1}{2}$. ద్విపద సూత్రంలో $N = 400,\ n : 4$ ద్విపద విభాజనం సంభావ్యతా సూత్రం ప్రకారం, ఒక కుటుంబంలో 'r'గురు మగపిల్లలుండటానికి సంభావ్యత $n_{C_r}(P)^r(q)^{r-2}$ అలాగే 400 కుటుంబాలలో 'r'గురు మగపిల్లలు కలిగివుండే కుటుంబాలు ఈ క్రింది విధంగా కనుక్కోవచ్చు. ఇదే అంచనా పౌనఃపున్యలావుతాయి. పట్టికను తయారు చేయగా

మగపిల్లల సంఖ్య	ప్రేక్షిత పౌనఃపున్యం(O)	అంచనా పౌనఃపున్యం E	$O-E$	$(O-E)^2$	$\left(\frac{O-E}{E}\right)^2$
0	20	$400\times 4_{C_0}\left(\frac{1}{2}\right)^{4-0}\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 400\times 1\times\frac{1}{16} = 25$	-5	25	1
1	115	$400\times 4_{C_1}\left(\frac{1}{2}\right)^{4-1}\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 400\times 4\times\frac{1}{16} = 100$	15	225	2.25
2	130	$400\times 4_{C2}\left(\frac{1}{2}\right)^{4-2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 400\times 6\times\frac{1}{16} = 150$	-20	400	267
3	123	$400\times 4_{C_3}\left(\frac{1}{2}\right)^{4-3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 400\times 4\times\frac{1}{16} = 100$	23	529	5.29
4	22	$400\times 4_{C_4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4-4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 400\times 1\times\frac{1}{16} = 25$	-3	9	0.36

400	400	11.57

$y^2 = 11.57$, 5 శాతం సార్థకతా స్థాయి వద్ద (5-1) స్వాతంత్ర్యాకాల వద్ద y^2 పట్టిక విలువ 9.488.

నిర్ణయం - గణించిన y^2 విలువ పట్టిక విలువ కన్నా ఎక్కువగా వుంది. కాబట్టి శూన్య పరికల్పనను తిరస్కరించటం అయింది.

16.7.3 ఏకమార్గ వర్గీకరణ దత్తాంశము (*One-Way Classification Data*)

ఒక దత్తాంశమును ఒక గుణం (*Attribute*) కరణంగా వివిధ వరస్పర వివర్జితత (*Mutually Exclusive*) తరగతులుగా విభజించబడినప్పుడు ఆ దత్తాంశములోని ఒక విలువ ఒక తరగతికి చేదటానికి సంభావ్యతను (లేక) ఈ తరగతిలోని విలువలు యిచ్చిన నిష్పత్తిలో ఉన్నాయో లేదో తెలుసుకోటానికి ఈ పరీక్షను ఉపయోగిస్తాం. ఈ విధమైన సమస్యలు సాధించేటప్పుడు ఈ క్రింది పద్ధతిననుసరిస్తాము.

1. శూన్య పరికల్పన H_0 : నిష్పత్తులు (లేక) సంభావ్యత సమానం

ఉదా - $r_1 = r_2 = r_3, \ldots\ldots\ldots r_n$

$$P_1 = P_2 = P_3 \ldots\ldots\ldots P_n$$

$H_1 : H_0$ నిజం కాదు.

2. ప్రేక్షిత పౌనఃపున్యాల మొత్తము అనగా

$O_1 + O_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 'n'$

$r_1 + r_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = r$ అయితే

ఈ క్రింది ఊసత్రాలననుసరించి అంచనా పౌనఃపున్యాలు కనుక్కుంటాం.

i వతరగతికి అంచనా పౌనఃపున్యం $(E_i) = \frac{n}{r} \times r_i$

అలాగే j వ తరగతికి అంచనా పౌనఃపున్యం $(E_j) = \frac{n}{r} \times r_j$

----

3. ఆ తరువాత $y^2 = \frac{\sum (O-E)^2}{E}$ విలువ కనుక్కొని పట్టిక విలువలో పోల్చి H_0 ని అంగీకరించటమో (లేక) తిరస్కరించటమో చేస్తారు.

ఉదా - ఒక గని నుంచి వెలికితీసిన పాలరాతి పలకలు వాటి నాణ్యతను బట్టి నాలుగు రకాలుగా విభజించబడినాయి. అవి $8:4:2:1$ నిష్పత్తిలో ఉంటాయి. ఈ నిష్పత్తిని పరీక్షించే ప్రక్రియలో భాగంగా 600 పలకలను పరీక్షించగా, 340

పలకలు మొ॥ రకానికి, 130 పలకలు రెండవ రకానికి, 100 పలకలు మూడవ రకానికి, 30 పలకలు నాల్గవ రకానికి చెందినవిగా గుర్తించటమైనది. ప్రతి రూపం విలువల ఆధారంగా పలకల రకాల నిష్పత్తిలో తేడా వుందా? పరీక్షించండి.

సాధన

H_0 : నిష్పత్తిలో తేడా లేదు.

$H_1 : H_0$ నిజం కాదు.

ఇచ్చిన ప్రేక్షిక విలువల మొత్తం $= 340 + 130 + 100 + 30 = 600$

నిష్పత్తి మొత్తం $= 8 + 4 + 2 + 1 = 15$

అంచనా విలువలు కనుక్కోవటం

1వ రకం పలకల అంచనా విలువలు $E_1 = 600 \times \frac{8}{15} = 320$

2వ రకం పలకల అంచనా విలువలు $E_2 = 600 \times \frac{4}{15} = 160$

3వ రకం పలకల అంచనా విలువలు $E_3 = 600 \times \frac{2}{15} = 80$

4వ రకం పలకల అంచనా విలువలు $E_4 = 600 \times \frac{1}{15} = 40$

పలకల రకం	ప్రేక్షితవిలువలు O	అంచనా విలువలు E	$O - E$	$(O - E)^2$	$\left(\frac{O-E}{E}\right)^2$
1	340	320	20	400	1.25
2	130	160	-30	900	5.63
3	100	80	20	400	5.00
4	30	40	-10	100	2.50
					$y^2 = 14.38$

స్వాతంత్ర్యాకములు - $4 - 1 = 3$.

5 శాతం సార్థకతా స్థాయి వద్ద, 3 స్వాతంత్ర్యాకములు దగ్గర y^2 పట్టిక విలువ 7.815. గణించిన y^2 విలువ (14.30) పట్టిక విలువ కన్నా ఎక్కువ కాబట్టి శూన్య పరికల్పన తిరస్కరించటమైనది. అనగా ప్రతిరూపం పలకలలోని వివిధ రకాల నిష్పత్తిని ధృవీకరించటం లేదు.

16.7.4 ద్వి మార్గ వర్గీకరణ (*Two-Way classification Data*)

ఒక దత్తాంశమును రెండు గుణాల ఆధారంగా వర్గీకరిస్తే దానిని ద్వి-మార్గ వర్గీకరణ అంటాము. y^2 పరీక్షనుపయోగించి ఇటువంటి రెండు గుణాల మధ్య సహచర్యం ఉన్నదో లేదో తెలుసుకోవచ్చు. దీనినే స్వాతంత్ర్యాత పరీక్ష (*Test for Independence*) అంటారు.

స్వాతంత్ర్యాత పరీక్ష నిర్వహించే పద్ధతి

ఈ పద్ధతిలో H_0 : గుణాల మద్య సహచర్యం లేదు అంటే అవి స్వతంత్ర్యాలు

H_1 : H_0 నిజం కాదు.

రెండు వేర్వేరు గుణాల ఆధారంగా ఒక దత్తాంశమును ఈ కింది పట్టికలో చూపిన విధంగా వివిధ పరస్పర వివర్జిత తరగతులుగా విభజించవచ్చు.

పొగతాగే గుణాన్ని 'A'తో, అక్షరాన్యతను 'B'తో సూచిస్తే

	అక్షరాన్యత	నిరక్షరాన్యత	మొత్తం
పొగతాగటం	x	y	R_1
పొగతాగకపోవటం	p	q	R_2
మొత్తం	K_1	K_2	N

$N = R_1+R_2 = K_1 +K_2 = x + y + p + q$ అవుతుంది.

$x + y = R_1$

$P + q = R_2$

అలాగే $x + p = k_1$, $y + q = k_2$ అవుతాయి.

x, y, p, q లు ప్రేక్షిత విలువలు అవుతాయి. వీటి ఆధారంగా అంచనా విలువలు క్రింది సూత్రాల ప్రకారం లెక్కిస్తాము.

x యొక్క అంచనా విలువ $\frac{R_1 \times K_1}{N}$

p యొక్క అంచనా విలువ $\frac{R_2 \times K_1}{N}$

y యొక్క అంచనా విలువ $\frac{R_1 \times K_2}{N}$

q యొక్క అంచనా విలువ $\frac{R_2 \times K_2}{N}$

y^2 విలువను పై పద్ధతులలో వివరించినట్లుగానే కనుక్కుంటాము. పట్టిక విలువతో పోల్చి సంబంధిత శూన్య పరికల్పనను తిరస్కరించటమో, ఆమోదించటమో చేస్తాం.

ఉదా - వంద దుకాణదారుల నుండి సేకరించిన వివరాలు ఈ క్రింది విధంగా తరగతులుగా విభజించారు.

దుకాణం ఉన్న ప్రాంతం

	పట్టణము	పల్లె	మొత్తం
పురుషులచే నిర్వహించబడేవి	34	36	70
స్త్రీల చే నిర్వహించబడేవి	6	24	30
	40	60	100

దీనిని బట్టి పల్లెలలో స్త్రీలు ఎక్కువగా దుకాణాలు నిర్వహిస్తున్నారని చెప్పవచ్చా?

సాధన

H_0 :పట్టణాలు, పల్లెలలో నిర్వహించబడే సంఖ్యకు, నిర్వాహకులు స్త్రీలా, పురుషులా అనే దానికి సంబంధం లేదు. అంటే దుకాణాల నిర్వాహణలో ప్రాంతం మరియు లింగము స్వాతంత్యాలు.

$H_1 : H_0$ నిజం కాదు

ఈ క్రింది పట్టిక తయారు చేయగా

ప్రేక్షితవిలువలు O	అంచనా విలువలు E	$O-E$	$(O-E)^2$	$\left(\frac{O-E}{E}\right)^2$
34	$\frac{70\times 40}{100}=28$	6	36	1.29
36	$\frac{70\times 60}{100}=42$	-6	36	0.86
6	$\frac{30\times 40}{100}=12$	-6	36	3.00
24	$\frac{30\times 60}{100}=18$	6	36	2.00

మొత్తం y^2 - 7.15

స్వాతంత్ర్యాకములు $= (K-1)(R-1)$

$$= (2-1)(2-1) = 1$$

5 శాతం సార్ధకతా స్థాయి వద్ద y^2 పట్టిక విలువ **3.841** గణించిన y^2 విలువ **7.15.** పట్టిక విలువ కన్నా ఎక్కువ కాబట్టి శూన్య పరికల్పన H_0 ను తిరస్కరిస్తాము.

16.9 సమిష్టి విస్తృతి సమానత్వానికి - *F* - పరీక్ష (*F - Test for Equality of population Variance*)

రెండు యాదృచ్ఛిక ప్రతిరూపాలు ఒకే విస్తృతి విలువ కలిగిన రేడు సామాన్య విభాజనాలు నుండి తీసుకున్నావా లేదా తెలుసుకోవటానికి ఈ పరీక్షనుపయోగిస్తారు.

ఈ సమస్యలో శూన్య పరికల్పన $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ మరియు ప్రత్యామ్నాయ పరికల్పన $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ అవుతుంది. ఈ శూన్య పరికల్పనను పరీక్షించటానికి ఉపయోగించే F పరీక్ష సూత్రం $F_{K_1, K_2} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$

ఇందులో $S_1^2 = \frac{\sum\left(x_1 - \bar{X}_1\right)^2}{n_1 - 1}$ ('n_1' పరిమాణం కలిగిన ప్రతిరూపం యొక్క విస్తృతి)

$s_2^2 = \frac{\sum\left(x_2 - \bar{X}_2\right)^2}{n_2 - 1}$ ('n_2' పరిమాణం గల ప్రతిరూపం యొక్క విస్తృతి)

$K_1 = n_1 - 1 \quad , \quad k_2 = n_2 - 1$ అవుతాయి.

గమనిక - ఎక్కువ విస్తృతిని లవము గాను, దాని పరిమాణము 'n_1' గాను గ్రహించాలి.

కనుగొన్న F_{k_1, K_2} విలువ 'α' సార్ధకతా స్థాయి వద్ద పట్టిక నుండి తెలుసుకొన్న విలువ కన్నా ఎక్కువైతే H_0 ని తిరస్కరిస్తాం. లేకపోతే ఆమోదిస్తాం.

ప్రత్యామ్నాయ పరికల్పన $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ అయితే లెక్కించిన 'F' విలువ పట్టిక 'F' విలువ కన్నా ఎక్కువైతే H_0 ని తిరస్కరిస్తారు.

ప్రత్యామ్నాయ పరికల్పన $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ అయితే లెక్కించిన 'F' విలువ పట్టిక 'F' విలువ కన్నా తక్కువ వుంటే H_0 ను తిరస్కరిస్తారు.

ఉదాహరణ ఒక మోటారు సైకిలు తయారీ కంపెనీ, తమ మోటారు సైకిలుకు ఉపయోగించేందుకు టైర్ల కొరకై రెండు టైర్ల కంపెనీల నుండి వేర్వేరు ప్రతిరూపాలు తీసుకకుని, టైర్ల నాణ్యతను కొలచి ఈ క్రింది విధంగా పొందుపరిచారు.

	కంపెనీ '*A*'	కంపెనీ '*B*'	
ప్రతిరూపం	16	10	
అంకమధ్యమం	85	70	
విస్తృతి		2.5	1.5

F పరీక్షనుపయోగించి సమిష్టి విస్తృతి బేధం సార్ధకమౌతుందని చూపండి.

సాధన

$H_0 : \sigma_1^2, \sigma_2^2$

$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

H_0 ను పరీక్షించుటకు పరీక్షా సాంఖ్యకం

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F_{(K_1, K_2)}$$

ముందుగా s_1^2 మరియు s_2^2 విలువలు లెక్కించగా ఇచ్చిన ప్రతిరూపాల విస్తృతుల s_1^2, s_2^2 ల నుండి ఈ క్రింది సంబందానుపయోగించి s_1^2 మరియు s_2^2 కనుక్కోవాలి.

$$s_1^2 = \frac{\sum\left(x_1 - \bar{X}_1\right)^2}{n} \qquad \therefore S_1^2 = \frac{n_1 s_1^2}{n_1 - 1}$$

$$s_1^2 = \frac{16 \times 2.5}{16 - 1} = 2.67$$

$$s_2^2 = \frac{\sum\left(x_2 - \bar{X}_2\right)^2}{n} \qquad \therefore s_2^2 = \frac{n_2 s_2^2}{n_2 - 1}$$

$$s_2^2 = \frac{10 \times 1.5}{9} = 1.67$$

సార్ధకతా స్థాయి **5** శాతంగా పరిగణిస్తే **(15, 9)** స్వాతంత్ర్యాకాల వద్ద F పట్టిక విలువ **3.01** అవుతుంది.

F విలువ గణిస్తే $F = \frac{2.67}{1.67} = 1.598$ అవుతుంది.

గణించిన 'F' విలువ **1.897** పట్టిక విలువ కన్నా తక్కువ కాబట్టి నూన్య పరికల్పన తిరస్కరించబడదు.

16.10 సాంఖ్యక అంచనా పద్ధతులు (*Statistial Estimation Methods*)

సార్ధకతా పరీక్షలలో మనం ఒక ప్రతిరూపం యొక్క విలువలు ఆధారంగా అది పరామితి విలువ కలిగిన జనాభా నుంచి గ్రహించింది అని లేక ఆ జనాభా పరామితి ఒక ఇచ్చిన విలువలకు సమానమౌతుందని అటులనే రెండు జనాభాల పరామితుల మధ్య విభేదం సార్ధకమౌతుందో లేదో తెలుసుకోవటానికి వుపయోగించాము. ఈ భాగంలో ప్రతిరూపాల విలువలను ఉపయోగించి వీలయినంత (*Reasonable Accurancy*) జనాభా యొక్క పరామితిని ఎలా అంచనా వేస్తామో తెలుసుకుందాం. అంచనాలు రెండు రకాలు. అవి (1) బిందు అంచనా (2) అంచనా అంతరం. ఒకే ఒక్క సంఖ్యను తెలియని జనాభా పరామితి విలువ అంచనా వేయటానికి ఉపయోగిస్తే ఆ సంఖ్యను బిందు అంచనా అని పిలుస్తాము. అలాకాక రెండు విలువల మధ్య వ్యాప్తిని జనాభా పరామితి విలువ అంచనా వేయటానికి ఉపయోగిస్తే దానిని అంతరాల అంచనా అంటాం.

అంచనాధారము (*Estimation*) - జనాభా పరామితిని అంచనా వేయటానికి ఉపయోగించే ప్రతిరూప సాంఖ్యకాని (*Sample statistic*) అంచనాధారము అని అంటాము.

అంచనా (*Estimate*) - సాంఖ్యకం యొక్క ఒక ప్రేక్షిత విలువను అంచనా అంటాము.

16.10.1 మంచి అంచనా లక్షణాలు

ఒక అంచనానికి క్రింది లక్షణాలున్న దానిని మంచి అంచనాగా పరిగణిస్తారు.

1. నిష్పాక్షికత (*Unbiasedness*)
2. సమర్ధత (*Efficiancy*)
3. నిలకడ (*Consestancy*)
4. పర్యాప్తత (*Sufficiency*)

క్లుప్తంగా వీటి గురించి తెలుసుకుందాం.

'*t*' అనేది 'θ' పరామితిగా కలిగిన ఒక సమిష్టి (*Population*) నుండి తీసుకున్న ప్రతిరూపం యొక్క సాంఖ్యకం అనుకుంటే

$E(t)=\theta$ అయినప్పుడు '*t*' ని 'θ' యొక్క నిష్పాక్షిక ఎస్టిమేటర్ అంటారు.

సమిష్టి అంకమధ్యమానికి, ప్రతిరూప అంకమధ్యమం నిష్పాక్షిక అంచనాధారమౌతుంది.

సమర్ధత - ఒక సమిష్టి పరామితి 'θ'కి t_1, t_2లు నిష్పాక్షిక అంచనాధారములు అయితే $\dfrac{\sigma^2(t_1)}{\sigma^2(t_2)}$ ని t_1దృష్ట్యా t_2యొక్క సమర్ధత అంటారు. అంటే t_1 సాంఖ్యకం యొక్క విస్తృతి t_2 సాంఖ్యకం యొక్క విస్తృతి కన్నా తక్కువ అయినచో ($\sigma^2(t_1)<\sigma^2(t_2)$) '$t_1$' ని '$t_2$' దృష్ట్యా ఎక్కువ సమర్ధత కలిగివుంది అని చెబుతాము.

నిలకడ - 'n' పరిమాణం కలిగిన ప్రతిరూపము యొక్క సాంఖ్యకం 't' అనుకుని 'θ' సమిఇష్ట పరామితి అయితే ప్రతిరూపం యొక్క పరిమాణం పెరుగుచున్నప్పుడు t యొక్క అవధి 'θ' అయితే 't' ని నిలకడ ఎస్టిమేట్ (అంచనాధారము) అంటాము.

ఉదాహరణకు సామాన్య విభాజనం నుంచి గ్రహించిన ప్రతిరూప అంకమధ్యమం, సమిష్టి అంకమధ్యమానికి నిలకడ అంచనాధారవౌతుంది.

పర్యాప్తత - ఒక అంచనాధారము పరామితి గురించి సాధ్యమైనంత ఎక్కువ సమాచారము ఇచ్చినపుడు దానిని పర్యాప్తతా అంచనాధారము అంటాము.

16.10.2 బిందు అంచనా

ఒక అంకెను (విలువను) సమిష్టి పరమితిని అంచనా వేయటానికి ఉపయోగించే ప్రక్రియను బిందు అంచనా పద్ధతి అంటారు. ఈ ప్రక్రియ ద్వారా వచ్చిన అంచనాధారమును బిందు అంచనాధారము (*Point Estimation*) అంటాము.

16.10.3 అంచనాంతరాలు (*Interval Estimation*)

పైన వివరించినట్లు కాకుండా సమిష్టి యొక్క అంచనాధారము వుండగలిగిన రెండు విలువలను (*Range of Values*) కనుక్కుంటాం. అనగా పరామితి యొక్క అంచనాధారము కలిగియుండే ఒక యాదృచ్ఛిక అంతరం కనుకుంటామన్నమాట.

L తక్కువ విలువ *u* ఎక్కువ విలువ కలిగి *L<U* అయివుండి ప్రేక్షిత యాదృచ్ఛిక చలరాశుల ప్రమేయాలు 'θ' పరామితి అంచనా '*L*' కి '*u*' క మధ్య ముందుగా నిర్ణయించిన విశ్వసనీయతా స్థయి వద్ద గల సంభావ్యతకు లోబడి వుంటే '*L*', '*U*'లను విశ్వసనీయతాంతరాలు అంటారు.

16.10.4 అంకమధ్యమం యొక్క విశ్వసనీయంతరాలు

బృహత్ ప్రతిరూపంలో μ అంకమధ్యమంగా గల, σ విస్తృతిగా గల ఒక సమిష్టి నుండి గ్రహించిన 'n' పరిమాణం గల బృహత్ ప్రతిరూప యొక్క అంకమధ్యమం $\bar{X}$ అయితే 95% విశ్వసమీయత వద్ద విశ్వసనీయతాంత్ర్యాలు ఈ విధంగా కనుక్కోవచ్చు.

కాబట్టి $z = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$ బృహచ్ ప్రతిరూపం మనకు తెలును.

అలాగే 95% విశ్వసనీయత వద్ద z (-1.96, 1.96) మధ్య వుంటుంది.

అంటే z యొక్క తక్కువ అంతరం -1.96 అన్నమాట.

$$-1.96 \le Z$$
$$-1.96 \le \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$
$$-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{X}-\mu$$
$$\mu \le \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

అదే విధంగా $\mu \ge \bar{X} - 1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ అవుతుంది.

కాబట్టి సమిష్టి అంకమధ్యమానికి 95% వద్ద విశ్వసనీయాంతరాలు $\left(\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ అవుతాయి.

అలాగే 90% విశ్వసమీయత వద్ద $\left(\bar{X} - 1.64\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{X} + 1.64\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ విశ్వసనీయంతరాలు అవుతాయి.

ప్రతిరూపం ఒక N (*Fimite*) పరిమాణం కల సమిష్టి నుండి గ్రహించినదైతే $\bar{X} + Z_d\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{(N-n)}{(N-1)}}$

ఉదా - ఒక ప్రతిరూపం 6 క్రమవిచలనంగా గల సమిష్టి విభాజనం నుండి తీసుకొనబడింది. దాని పరిమాణము 100, గాని అంకమధ్యమం 20 అయినచో 95% విశ్వసనీయత వద్ద సమిష్టి అంకమధ్యమానికి విశ్వసనీయతాంతరాలు కనుక్కోండి.

సాధన

ప్రతి రూప పరిమాణం $= n = 100$

ప్రతిరూప అంకమధ్యమం $= \bar{X} = 20$

సమిష్టి క్రమవిచలనం $= \sigma = 6$

విశ్వసనీయతా స్థాయి $= 95\%$

సమిష్టి అంకమధ్యమం $= \mu$ (యివ్వలేదు)

సూత్రం ప్రకారం μ యొక్క ఎగువ అంతరం

$$
\begin{aligned}
&= \bar{X} + 1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\
&= 20 + 1.96\frac{6}{\sqrt{100}} \\
&= 20 + 1.96\frac{6}{10} \\
&= 20 + 1.176 \\
&= 21.176
\end{aligned}
$$

μ యొక్క దిగువ అంతరం

$$
\begin{aligned}
&= \bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\
&= 20 - 1.176\ = 18.824
\end{aligned}
$$

కాబట్టి సమిష్టి అంకమధ్యమానికి 95% విశ్వసనీయతాంతరాలు (18.824, 21.176)

16.10.5 అనుపాతానికి - విశ్వసనీయతాంతరాలు

ప్రతిరూప పరిమాణం $= n$

ప్రతిరూప అనుపాతం $= p$

సమిష్టి అనుపాతం $= P$ అయితే

90% విశ్వసమీయతాంతరాలు

$$\left(p - 1.64.\sqrt{\frac{\overline{PQ}}{n}}\ ,\ p + 1.64\sqrt{\frac{\overline{PQ}}{n}}\right)$$

95% విశ్వసనీయాంతరాలు

$$\left(p - 1.96.\sqrt{\frac{\overline{PQ}}{n}}\ ,\ p + 1.96\sqrt{\frac{\overline{PQ}}{n}}\right)$$

ప్రతిరూపం, ఒక N పరిమాణం కలిగిన సమిష్టి నుండి గ్రహించిన ఎడల

90% విశ్వసమీయతాంతరాలు

$$\left(p - 1.64 \times \sqrt{\frac{pq}{n}} \times \sqrt{\frac{N-n}{n-1}}\ ,\ p + 1.64\sqrt{\frac{pq}{n}} \times \sqrt{\frac{N-n}{n-1}}\right)$$

95% విశ్వసమీయంతరాలు

$$\left(p - 1.96 \times \sqrt{\frac{pq}{n}} \times \sqrt{\frac{N-n}{n-1}}\ ,\ p + 1.96\sqrt{\frac{pq}{n}} \times \sqrt{\frac{N-n}{n-1}}\right)$$

ఉదా - ఒక మగరంలో టీ అలవాటు గురించి తెలుసుకోవటానికి నిర్వహించిన సర్వే ఆధారంగా 200 వందల మంది గల ఒక ప్రతిరూపంలో 80 మందికి టీ త్రాగే అలవాటు ఉన్నట్లు తేలింది. ఈ సమాచారాన్ని ఉపయోగించి సమిష్టి అనుపాతానికి 95% విశ్వసనీయాతాంతరాలు కనుక్కోండి.

సాధన

ప్రతిరూప పరిమాణం $= 200$

టీ త్రాగే వారి అనుపాతం $= p - \frac{80}{200} = 0.4$

కాబట్టి $q = 0.6$

$\overline{P} = 0.4 \quad \overline{Q} = 0.6$

$$\therefore \sqrt{\frac{\overline{P}\,\overline{Q}}{n}} = \sqrt{\frac{0.4 \times 0.6}{200}} = \sqrt{0.0012} = 0.035$$

కాబట్టి సమిష్టి అనుపాతానికి 95% విశ్వసనీయాంతరాలు

ఎగువ అంతరం $= p = 1.96 \times 0.035$

$$= 0.4 + 1.96 \times 0.035$$
$$= 0.4 + 0.069 = 0.469$$

దిగువ అంతరం $= 0.4 - 0.069 = 0.3314$

కాబట్టి విశ్వసనీయాంతరాలు **(0.3314, 0.469)**

16.10.6 లఘు ప్రతిరూపాలు (*Small Samples*)

ప్రతిరూపాల పరిమాణం 30 కన్నా తక్కువైతే, అంకమధ్యమం, విస్తృతి మొ॥ వాటి యొక్క విభాజనాలు (*Sampling Distribution*) '*t*' విభాజనాన్ని రమారమిగా అనుసరిస్తాయని మనకు తెలుసు. అందుచేత లఘు ప్రతిరూపాలలో సమిష్టి యొక్క పరామితులకు విశ్వసనీయాతాంత్రాలు కనుగొనేటప్పుడు *t* విభాజనాన్ని ఉపయోగిస్తాము.

సమిష్టి అంకమధ్యమానికి - విశ్వసనీయుతాంత్రాలు

ప్రతిరూప పరిమాణం $= n \quad (n < 30)$

ప్రతిరూప అంకమధ్యమం $= \overline{X}$

ప్రతిరూప క్రమవిచలనం $= s$ అయితే సమిష్టి అంకమధ్యమం μ యొక్క విశ్వసమీయుతాంత్రాలు

ఎగువ అంతరం $= \overline{X} + t_{\alpha}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n-1}}$

దిగువ అంతరం $= \overline{X} - t_{\alpha}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n-1}}$

ఉదా - ఒక ప్రతిరూపం యొక్క అంకమధ్యమం 6 దాని క్రమవిచలనం 10. ఈ ప్రతిరూపం యొక్క పరిమాణం 17 అయిన సమిష్టి అంకమధ్యమానికి 90% మరియు 95% విశ్వసనీయుతాంతరాలను కనుగొనండి.

సాధన

ప్రతిరూప పరిమాణం $= 17$

ప్రతిరూప అంకమధ్యమం $= 60$

ప్రతిరూప క్రమవిచలనం $= 10$

పట్టిక ప్రకారం 16 స్వతంత్ర్యాకాల దగ్గర 90% విశ్వసనీయతా స్థాయి వద్ద t విలువ 1.746

కాబట్టి 90% విశ్వసనీయత స్థాయి వద్ద μ కి

ఎగువ అంతరం $= 60 + 2.312 \times \frac{10}{\sqrt{17-1}} = 60 + 1.746 \times \frac{10}{4}$

$$= 60 + 4.365 = 64.365$$

దిగువ అంతరం $= 60 - 2.312 \times \frac{10}{\sqrt{17-1}} = 60 - 4.365 = 55.635$

16.11 గుర్తుంచుకోవల్సిన విషయాలు

1. పరికల్పన -ఒక సమిష్టి పరామితిని గురించి గాని, రెండు సమిష్టిల మద్య సంబంధము గురించి ప్రతిపాదించిన ప్రవచనం.

2. శూన్య పరికల్పన(H_0) - ప్రతిరూప దత్తాంశం ఆధారంగా పరీక్షించి అంగీకరించటానికి దానిని తిరస్కరించటానికి ప్రతిపాదించిన పరికల్పన.

3. ప్రత్యామ్నాయ పరికల్పన(H_1) - శూన్య పరికల్పనను వ్యతిరేకించే ప్రతిపాదన.

4. - H_0 నిజమైనప్పుడు తిరస్కరించటం ఒకటవ విభాగపు దోషం. H_0 కానపుడు అంగీకరించటం రెండవ విభాగపు దోషం.

5. సార్ధకతా స్థాయి - ఒకటవ విభాగపు దోషాన్ని చేసే సంభావ్యత

6. ప్రతిరూప విభాజనం - ఒక సమిష్టి నుండి ప్రతిపాదించబడిన పర్వేరు ప్రతిరూపాల సాంఖ్యకాల విభాజనం

7. క్రమ దోషం - ప్రతిరూప విభాజనం యొక్క క్రమవిచలనం

8. బృహత్ ప్రతిరూపాలలో

1. సమిష్టి అంకమధ్యమానికి సార్ధకతా పరీక్ష సూత్రం $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ లేక

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

2. సమిష్టి అనుపాతానికి సార్థకతా పరీక్షలు $z=\dfrac{p-P}{\sqrt{\dfrac{PQ}{n}}}$ or $\dfrac{p-P}{\sqrt{\dfrac{\bar{P}\bar{Q}}{n}}}$

3. అంకమధ్యమాల మధ్య భేదానికి పరీక్ష

$$z=\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1{}^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2{}^2}{n_2}}} \quad \text{or} \quad \frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1{}^2}{n_1}+\dfrac{s_2{}^2}{n_2}}}$$

4. అనుపాతాల మధ్య భేదానికి పరీక్ష

$$Z=\frac{p_1-p_2}{\sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}$$

$$Z=\frac{p_1-p_2}{\sqrt{\dfrac{\hat{P}\left(1-\hat{P}\right)}{n_1}+\dfrac{\hat{P}\left(1-\hat{P}\right)}{n_2}}}$$

$$\hat{P}=\frac{n_1p_1+n_2p_2}{n_1+n_2}$$

9. లఘు ప్రతిరూపాల పరీక్షలు

1. అంకమధ్యమానికి పరీక్ష $t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\dfrac{s}{\sqrt{n-1}}}\sim t(n-1)\,d.f$

2. అంకమధ్యమాల మధ్య భేదానికి పరీక్ష

$$t=\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sqrt{\hat{S}^2\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right)}}\sim t_{n_1+n_2-2}$$

$$\hat{S}^2=\frac{n_1s_1{}^2+n_2s_1{}^2}{n_1+n_2}$$

3. స్వతంత్ర ప్రతిరూపాలలో అంకమధ్యమాల మధ్య భేదానికి పరీక్ష

$$t = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\frac{s^2}{n-1}}} \sim t_{n-1}$$

4. ప్రతిరూప సహసంబధ గుణకము యొక్క సార్ధకతా పరీక్ష $t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$

10. కై-స్క్వేర్ యోగ్యతా పరీక్ష $y^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E}$

11. సమిష్టి విస్తృతి సమానత్వానికి పరీక్ష $F = \frac{s_1^{\,2}}{s_2^{\,2}}$ $s_1^{\,2} = \frac{n_1 s_1^{\,2}}{n_1 - 1}$, $s_2^{\,2} = \frac{n_2 s_2^{\,2}}{n_2 - 1}$

12. బిందు అంచనా - ఒక విలువనుపయోగించి సమిష్టి పరామితిని అంచనా వేయుటం.

13. అంతరాల అంచనా - సమిష్టి పరామితి ఇచ్చిన విశ్వసనీయతలో రెండు విలువల అంతరం కనుగొనుట.

14. సమిష్టి అంకమధ్యమానికి విశ్వసనీయతాంతరాలు

1. బృహత్ రూపంలో

90% విశ్వసనీయస్థాయి వద్ద $\left(\bar{X} - 1.645\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{X} + 1.64\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

95% విశ్వసనీయస్థాయి వద్ద $\left(\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

2. లఘు ప్రతిరూపంలో

$(1-\alpha)$ విశ్వసనీయ స్థాయి వద్ద $\left(\bar{X} - t_\alpha(n-1)\frac{s}{\sqrt{n-1}}\ ,\ \bar{X} + t_\alpha(n-1)\frac{s}{\sqrt{n-1}}\right)$

15. సమిష్టి అనుపాతానికి విశ్వసనీయతాంతరాలు

సమిష్టి పరిమాణం అనంతమైతే $(1-\alpha)$ విశ్వసనీయతా స్థాయి వద్ద

$$\left(p - z_\alpha\sqrt{\frac{PQ}{n}}\ ,\ p + z_\alpha\sqrt{\frac{PQ}{n}}\right)$$

సమిష్టి పరిమాణం పరిమితమైతే $(1-\alpha)$ విశ్వసనీయతా స్థాయి వద్ద

$$\left(p - z_{\alpha}\sqrt{\frac{PQ}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\ ,\ p + z_{\alpha}\sqrt{\frac{PQ}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)$$

16.12 మాదిరి ప్రశ్నలు

1. శూన్య పరికల్పన, ప్రత్యామ్నాయ పరికల్పనను విశదీకరించి, మొదటి రకం, రెండవ రకం దోషాలు గురించి వ్రాయండి

2. ప్రతిరూప విభాజనం, క్రమదోషం, సార్దకతా స్థాయి, సార్థకతా పరీక్ష శక్తిని మార్చి వివరింపుము.

3. ఒక సమిష్టి విభాజనం యొక్క అంకమధ్యమం 67, క్రమవిచలనం 2. ఈ సమిష్టి నుండి గ్రహించిన 100 పరిమాణం కలిగిన ఒక ప్రతిరూపం యొక్క సగటు విలువ 64 అయిన సార్దకతా పరీక్షనుపయోగించి 5% సార్దకతా స్థాయి వద్ద ప్రతిరూప అంకమధ్యమానికి సమిష్టి అంకమధ్యమానికి మధ్య భేదం సార్దకమౌతుందో, కాదో కనుక్కోండి.

4. రెండు వేర్వేరు కళాశాలలో చదువుచున్న విద్యార్థుల ప్రతిరూపాల నుండి మార్కుల వివరాలు ఈ విధంగా ఉన్నాయి.

	మార్కుల అంకమధ్యమం	మార్కుల క్రమవిచలనం	ప్రతిరూపం పరిమాణం
కళాశాల A	65	15	150
కళాశాల B	60	20	225

రెండు కళాశాలల సగటు మార్కుల మధ్య బేధం సార్దకమౌతుందా?

5. ఆంధ్రప్రదేశ్‌లో సేకరించిన 500 పరిమాణం కలిగిన ప్రతిరూపంలో 270 మంది కాఫీని ఇష్టపడుతున్నారు. మిగిసిన వారు టీని ఇష్టపడుచున్నారు. (ఈ దత్తాంశం ఆధారంగా) కాఫీ, టీలు ఆంధ్రప్రదేశ్ లోని ప్రజలు సమానంగా ఇష్టపడుచున్నారు. 5% సార్దకతా స్థాయి వద్ద పరీక్షించండి.

6. *xyz* కంపెనీ తాము తయారు చేసే కార్లకు వాడే టైర్ల సగటు జీవితకాలం 25,000 కి॥మీ॥ ఉండాలని నిర్ణయించింది. ఇందుకోసమై ఒక సప్లయిర్ పంపిన టైర్ల లాటు నుండి సేకరించిన 25 పరిమాణము గల యాదృచ్ఛిక ప్రతిరూప నుండి లెక్కించిన టైర్ల జీవిత కాలం యొక్క అంకమధ్యమం 25,500గాను క్రమ విచలనం 500 గాను వుంది. ఈ టైర్ల లాటు అంగీకరించవచ్చా? లేదా?

7. 10 మంది *RTC* డ్రైవర్లు ట్రైనింగ్‌కు ముందు, తరువాత బస్సును 1 లీటరు డీసిల్‌కు ఎంత దూరం నడిపారో ఇవ్వబడింది.

డ్రైవరు నెం -	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
దూరం/లీటరు -	5	4	6	4	5	5	6	3	4	6

(ట్రైనింగుకు ముందు)			
దూరం/లీటరు	-	7 6	6 8

8 7 9 6 6
9

(ట్రైనింగు తరువాత)

ట్రైనింగు డ్రైవర్ల సామర్థ్యాన్ని పెంచింది? వివరించండి.

8. రెండు యాదృచ్ఛిక ప్రతిరూపాలు ఈ క్రింది సమాచారాన్ని ఇచ్చాయి.

ప్రతిరూపం	పరిమాణం	ప్రతి రూపాల విస్తృతి	
1	10	16	
2	12	15	

సమిష్టి విస్తృతులు సమానం అనే పరికల్పనను పరీక్షించండి.

9. ఎపిటైటిస్ - బి అనే కామెర్ల వ్యాధికి వాడే ఔషదం యొక్క సామర్థ్యం కొలవటానికి నిర్వహించిన ఒక 60 పరిమాణం గల ప్రతిరూపంలో విలువలు ఈ క్రింది విధంగా వర్గీకరించబడ్డాయి.

	వ్యాధి సోకిన వారు	వ్యాధి సోకని వారు
ఔషదం తీసుకున్నప్పుడు	12	26
ఔషదం తీసుకోనప్పుడు	15	7

ఔషదం వ్యాధిని నిరోధించటానికి బాగా పనిచేస్తుంది. అనే పరికల్పనను పరీక్షించండి.

10. ఒక పెద్ద పరిశ్రమలో పనిచేసే పనివార్ల సామర్థ్యం కనుక్కోటానికి 50 పరిమాణము గల రెండు ప్రతిరూపాలు సేకరించారు. మొదటి ప్రతిరూపంలో పనివార్ల సగటు సామర్థ్యం 125 పాయింట్లుగాను, క్రమవిచలనం 9 పాయింట్లుగాను, రెండవ ప్రతిరూపంలో సగటు సామర్థ్యం 120 పాయింట్లు, క్రమవిచలనం 8 పాయింట్లు గాను కనుగొన్నారు. రెండు ప్రతిరూపాలు మధ్య సగటుల భేదం సార్థకముకాదనే పరికల్పనను పరీక్షించండి.

11. ఒక నాణాన్ని 100 సార్లు ఎగరవేస్తే 46 సార్లు బొమ్మపడింది. ఈ నాణెం నిష్పక్షపాత నాణెం అనే పరికల్పనను పరీక్షించండి.

12. 500 పేజీలు గల ఒక పుస్తకమందు తప్పుల సంఖ్య పేజీల సంఖ్య ఈ క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి. తప్పుల సంఖ్య పాయిజాన్ న్యాయాన్ని పాటిస్తున్నాయి అని నిరూపించండి.

తప్పుల సంఖ్య	0	1	2	3	4	5
పేజీల సంఖ్య	250	121	62	43	16	5

13. ఒక ప్రతిరూపంలోని ద్వి చలరాసుల మధ్య సహసంబందము 0.65. ప్రతిరూపము యొక్క పరిమాణం 10 అయిన చలరాశుల మధ్య సహసంబందము శూన్య మౌతుందనే పరికల్పనను పరీక్షించండి.

14. రెండు లఘు ప్రతిరూపాల నుండి సేకరించిన దత్తాంశము ఈ క్రింది విధంగా వుంది.

ప్రతిరూపం	పరిమాణం	అంకమధ్యమం	క్రమవిచలనం
A	15	14	4
B	20	16	9

రెండవ ప్రతిరూపం యొక్క నగటు మొదటి ప్రతిరూపం నగటు కన్నా ఎక్కువ అనే పరికల్పనను పరీక్షించండి.

15. తమ కంపెనీ కార్ల రకాల గురించి తెలుసుకోటానికి కంపెనీ నిర్వహించిన 1000 మంది కారు వాడకందార్ల ఇష్టం తెలుసుకోటానికి సర్వే ఫలితాలు ఈ విధంగా వున్నాయి.

Model 1	*Model 2*	*Model 3*	*Model 4*
220	270	260	250

అన్ని మోడల్స్‌ని సమానంగా ఇష్టపడుతున్నారు. వివరించండి.

16. ఒక మంచి అంచనాధారమునకు ఉండవల్సిన లక్షనాలు వివరించండి.

17. ఒక సమిష్టి యొక్క క్రమవిచలనం 9. ఈ సమిష్టి నుండి సేకరించిన 50 పరిమాణం గల ప్రతిరూప అంకమధ్యమం 14, 95% విశఅవసనీయుతా స్థాయి వద్ద సమిష్టి అంకమధ్యమానికి విశ్వసనీయుతాంతరాలు కనుగొనండి.

18. రెండు యాదృచ్ఛిక ప్రతిరూపాల నుండి సేకరించిన విలువలు ఈ క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినవి.

ప్రతిరూపం	పరిమాణం	అంకమధ్యమం	క్రమవిచలనం
1	15	25	5
2	14	23	6

సమిష్టి అంకమధ్యమాల బేధానికి 90% వద్ద విశ్వసనీయుతాంతరాలు కనుగొనుము.

19. ఈ క్రింద ఇచ్చిన వివరాలు ఆధారంగా, ప్రతిరూపాల విస్తృతాల మధ్య బేధం శూన్యం అనే పరికల్పనను పరీక్షించండి.

	క్రమ విచలనం	పరిమాణం	సమిష్టి క్రమ విచలనం
ప్రతిరూపం 1	5	20	5.25
ప్రతిరూపం 2	6	15	6.50

16.13 చదవవలసిన పుస్తకాలు

1. *S.P.Gupta : Statistical Methods Sultanchand & Sons, New Delhi*
2. *D.C. Samchetti & G.S. Monga : Statistics Theory and Mathematics and Statistics for Economics SultanChand & Sons ,, New Delhi*
3. *S.C. Gupta & V.K. Kapoor : Fundametals of Applied Statistics SultanChand & Sons, New Delhi*