MECHANICS, WAVES & OSCILLATIONS
(DSPHY11)
(BSC, PHYSICS - I)

ACHARYA NAGARJUNA UNIVERSITY

CENTRE FOR DISTANCE EDUCATION

NAGARJUNA NAGAR,

GUNTUR

ANDHRA PRADESH

యూనిట్ - I

పాఠం - 1

సదిశల విశ్లేషణ

ఉద్దేశ్యము :

అదిశ, సదిశ క్షేత్రముల ప్రాముఖ్యతను అర్థం చేసికొనుట, అదిశ క్షేత్ర ప్రవణత సమీకరణము రాబట్టుట మరియు దాని ప్రాముఖ్యత, సదిశ అపసరణ మరియు కర్ల్ సదిశల సమాకలనములు, రేఖీయ ఉపరితల, ఘనపరిమాణం సమాకాలనిలు, స్టోక్, గౌస్, గ్రీన్ సిద్ధాంతముల ప్రాముఖ్యతను తెలుసుకొనుట.

విషయసూచిక :

1.1 ఉపోద్ఘాతము

* భౌతికశాస్త్రములోని ప్రతి భావనను భౌతికశాస్త్ర సూత్రముల ద్వారా సంక్షిప్తముగాను మరియు స్పష్టముగాను వ్యక్తము చేయుటకు వీలగును.

* భౌతికశాస్త్రములో రెండు విధములైన రాశుల ప్రస్తావన జరుగును.

  అ) కేవలము పరిమాణము మాత్రమే కలిగిన రాశులు - ద్రవ్యరాశి, ఉష్ణోగ్రత మొదలగునవి.

  ఆ) పరిమాణము మాత్రమే గాక దిశను కూడా కలిగియుండు రాశులు - వేగము, బలము మొదలగునవి.

* పరిమాణమును మాత్రమే కలిగియుండిన రాశులను తగిన ప్రమాణములతో కూడిన కేవలము సంఖ్య(అదిశ)లతోనే వ్యక్తపరచవచ్చును. ఈ విధమైన రాశులతో కూడిన ఏ విధమైన సంబంధమునైననూ సంఖ్యలకు సంబంధించిన అవకలనము మరియు వ్యవకలనము వంటి గణితశాస్త్ర ప్రక్రియల ద్వారా రాబట్టవచ్చును.

* పరిమాణము, దిశను కల్గి కొన్ని నియమాలను పాటించు రాశులను సదిశ అను గణితశాస్త్ర పదము ద్వారా సూచించెదరు. ఈ విధములైన రాశుల మధ్య సంబంధములను సదిశలకు సంబంధించిన గణితశాస్త్రము ద్వారా సాధ్యపడును.

1.2. అదిశ మరియు సదిశ క్షేత్రములు :

ఏ భౌతిక రాశిని అయినా మనము అంతరాళములో బిందుస్థానపు అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయముగా వ్రాయవచ్చును. దీనిని 'బిందుప్రమేయము' అందురు. ఈ విధముగా బిందు ప్రమేయము ఒక భౌతిక రాశిని నిర్దేశించు మండలమును 'క్షేత్రము' అందురు. భౌతికరాశి స్వభావమును అనుసరించి ఈ క్షేత్రము అదిశ క్షేత్రము లేక సదిశ క్షేత్రము కావచ్చును.

అదిశ క్షేత్రము : అంతరాళములో ప్రతిబిందువు వద్ద భౌతికరాశి విలువను తెలియజేయు అవిచ్ఛిన్న అదిశ ప్రమేయమును 'అదిశ క్షేత్రము' అందురు.

ఉష్ణోగ్రత, సాంద్రత, విద్యుత్‌శక్మము మొదలగు అదిశరాశుల వితరణలను 'అదిశక్షేత్రములు'గా భావింపవచ్చును. ఒక బిందువు నుండి దగ్గరలో వున్న బిందువుకు మారుటలో ఈ అదిశ ప్రమేయము పరిమాణము హఠాత్తుగా మారదు. క్రమ పద్ధతిలో మార్పు వుండవచ్చు. ఈ క్షేత్రములు ఒకేరాశి పరిమాణము గల బిందువులను కలిగి ఉండునట్లు తలములు ఉల్లేఖింపవచ్చును. ఉష్ణోగ్రతకు సంబంధించి గీచిన ఈ తలములను సమోష్ణక తలములు అనియు, విద్యుత్ శక్మమునకు సంబంధించిన ఈ తలములను సమశక్మ తలములు అని అంటారు. సాధారణముగా ఈ తలములను 'సమతలములు' అందురు. ఒక సమతలము నుంచి వేరొక సమతలమునకు ప్రయాణించినపుడు, అదిశ రాశుల మధ్య భేదము స్థిరముగా వుంటుంది. అందువలన ఈ సమతలములు ఒకదానికి తోడు ఒకటి వుంటాయి. కావున అదిశ క్షేత్రములు సమతలములు ఖండించుకొనుట జరగదు. అదిశ బిందు ప్రమేయములకు, ప్రతి బిందువు వద్ద ఒకే ఒక విలువ ఉంటుంది.

సదిశ క్షేత్రము : అంతరాళంలో ప్రతిబిందువు వద్ద భౌతికరాశి విలువను, దిశను తెలియజేయు అవిచ్ఛిన్న సదిశప్రమేయమును 'సదిశక్షేత్రము' అంటారు. ఏ బిందువు వద్దనయినా ఈ సదిశ ప్రమేయమును ఒక సదిశ రాశితో సూచింపవచ్చును.

సదిశరాశి యొక్క దిశలో ఒక బిందువు నుంచి అత్యంత సమీపములో ఉన్న మరియొక బిందువుకు ప్రయాణించినపుడు మనము వేరొకస్థానమును చేరుదుము. ఈ స్థానములను కలుపుకొంటే అది ఒక వక్రరేఖనిచ్చును. ఈ వక్రరేఖను సదిశరేఖ లేక ప్రవాహపు రేఖ లేక అభివాహ రేఖ అందురు. ఈ అభివాహ రేఖ మీద ఏ బిందువు వద్దనైనా గీచిన స్పర్శరేఖ ఆ బిందువు వద్ద గల సదిశరాశి యొక్క దిశను సూచించును. అభివాహ రేఖ మీద ఏ బిందువు వద్దనైనా, అభివాహరేఖకు లంబముగా ఊహించిన ఏకాంక వైశాల్యము గుండా పోవు అభివాహరేఖల సంఖ్యను అభివాహరేఖాసాంద్రత అంటారు. సదిశక్షేత్రముకు ఈ విధమైన అభివాహ రేఖలతో విభజింపవచ్చును. సదిశబిందు ప్రమేయమునకు ప్రతిబిందువు వద్ద ఒకే ఒక నిశ్చితమైన విలువ వుంటుంది. అందుచేత

అభివాహరేఖలు ఒకదానిని మరియొకటి ఎక్కడా ఖండించుకొనవు. అభివాహరేఖలు ఒకదానితోనొకటి సమాంతరముగా ఉన్నచో సదిశక్షేత్రమును 'స్థావర సదిశక్షేత్రము' అందురు.

1.3 అదిశక్షేత్ర ప్రవణత

ఒక అదిశ ప్రమేయము ϕ మీద ప్రయోగించిన డెల్ ఆపరేటరు. $\vec{\nabla}\phi$ అగును. దీనినే అదిశ క్షేత్రము (ϕ) యొక్క ప్రవణత అందురు. దీనిని గ్రేడ్ ϕ (grad ϕ) అని చదువుదుము. గ్రేడ్ ϕ అనునది ఒక సదిశరాశి.

$\therefore$ గ్రేడ్ $\phi\ (\mathrm{grad}\ \phi) = \vec{\nabla}\phi = \left[\vec{i}\,\frac{\partial\phi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\phi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial\phi}{\partial z}\right]$ అని వ్రాయుదురు. విద్యుత్ క్షేత్ర తీవ్రత $(\vec{E})$, విద్యుత్ పొటెన్షియల్ (V) అనుకొన్నచో

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,V$$ అని వ్రాయవచ్చును.

ఇచ్చట ఋణాత్మక గుర్తు అనునది విద్యుత్ క్షేత్ర తీవ్రత దిశ అనునది పొటెన్షియల్‌లో పెరుగుదల దిశను వ్యతిరేకించును అని అర్థం. $S(x,y,z)$ అనునది అదిశ బిందు ప్రమేయము అనుకొనుము. $\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial S}{\partial z}$ అనునవి మూడు పరస్పర లంబదిశలలో పాక్షిక అవకలనులు అనుకొన్నచో అదిశ బిందు ప్రమేయము (S) యొక్క గ్రేడ్‌ను ఈ క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును.

$$\mathrm{grad}\,S = \left[\vec{i}\,\frac{\partial S}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial S}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial S}{\partial z}\right]$$

అదిశక్షేత్రపు ప్రవణతకు ఫార్ములా : అదిశక్షేత్రపు ప్రవణతకు ఫార్ములా ఈ క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును.

$$\mathrm{grad}\ S = \frac{\partial S}{\partial r}\cdot\widehat{n}$$

ఇందులో $\widehat{n}$ అదిశ క్షేత్రములో సమతలమునకు ఏ బిందువు వద్దనైనా గీచినా ప్రమాణ సదిశ లంబము. అనగా $\mathrm{grad}\,S$ అనునది ఒక సదిశరాశి. దీని పరిమాణము S యొక్క వృద్ధిరేటు గరిష్టమునకు సమానముగా వుంటుంది. దీనియొక్క దిశ ఆ బిందువు వద్ద సమతలమునకు లంబంగా ఉంటుంది.

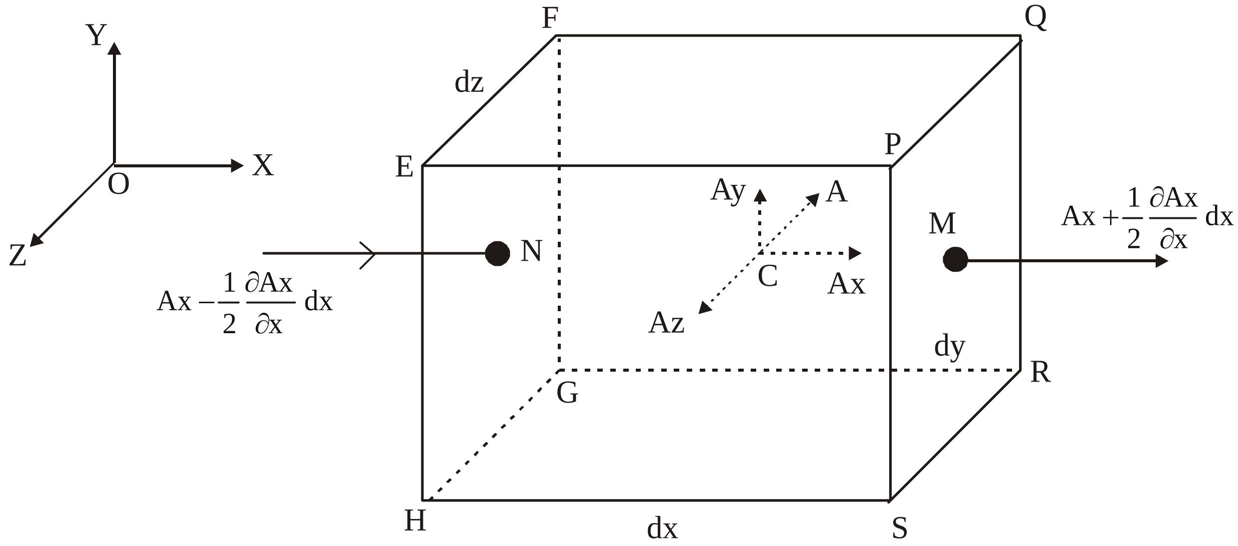
సదిశక్షేత్రపు అపసరణ : $\vec{A}$ ను ఒక సదిశ, $\vec{\nabla}$ ను ఆపరేటరు అనుకొన్నచో $(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$ను "సదిశక్షేత్రపు అపసరణ" అందురు. ఏకాంక ఘనపరిమాణమునకు ఏదైనా బిందువు నుండి అపసరణ నొందు అభివాహమును ఆ బిందువు వద్ద "సదిశక్షేత్రపు అపసరణ" అందురు. సదిశక్షేత్రపు అపసరణ ఒక అదిశరాశి. $\vec{A}$ అనునది ఒక సదిశ ప్రమేయము అనుకొన్నచో $\vec{A}$ సదిశక్షేత్రపు అపసరణ. ఈ క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును.

$$\vec{\nabla}\ \vec{A} = \left[\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right]\left[\vec{i}\ A_x + \vec{j}\,A_y + \vec{k}\,A_z\right]$$

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A}=\left[\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right]$$

1.4 సదిశక్షేత్ర అపసరణకు సమాసమును రాబట్టుట

ఒక సదిశ క్షేత్రములో చిన్న దీర్ఘ చతురస్రాకార ఫలకమును పరిగణింపుము. (చిత్రము 1.1) ఆ ఫలకమునకు dx, dy, dz లు భుజముల పొడవులు అనుకొనుము. ఇవి x, y, z అక్షయ నిరూపకములకు సమాంతరంగా ఉన్నవి అనుకొనుము. $\overrightarrow{A}$ అనే ఒక సదిశను పరిగణింపుము. A_x, A_y, A_z లు ఆయా అక్షములకు అనుగుణముగా అంశములు అనుకొనుము.



చిత్రము - 1.1

OX దిశలో Ax మార్పు రేటు $\frac{\partial Ax}{\partial x}$ అనియు, OY దిశలో Ay మార్పురేటు $\frac{\partial Ay}{\partial y}$ అనియు, OZ దిశలో Az మార్పురేటు $\frac{\partial Az}{\partial z}$ అనియు అనుకొనుము.

PQRS తలము యొక్క కేంద్రము వద్ద Ax విలువ = [C కేంద్రం వద్ద A_x విలువ + C నుండి M కు గల పరిమాణంలో పెరుగుదల]

= C కేంద్రం వద్ద A_x విలువ + మార్పురేటు × దూరము

$$=A_x+\frac{\partial A_x}{\partial x}\times\frac{dx}{2}$$

$$= \left[A_x + \frac{1}{2}\frac{\partial A_x}{\partial x}\cdot dx\right]$$

EFGH తలము యొక్క కేంద్రము వద్ద A_x విలువ = $\left[Ax - \frac{1}{2}\frac{\partial A_x}{\partial x}\,dx\right]$

ఇచ్చుట (-) గుర్తు అనునది N, C కు ఎడమవైపున ఉన్నదని సూచించును.

$\therefore$ తలముగుండా ఏకాంక కాలములో ప్రవహించుచున్న ప్రవాహి = తలముగుండా ప్రవహించు అభివాహము

= సదిశ లంబ అంశము × తల వైశాల్యము

$$= \left[A_x - \frac{1}{2}\frac{\partial A_x}{\partial x}\cdot dx\right]dydz$$

ఇందు dy dz అనునది EFGH తలము వైశాల్యము.

PQRS తలము నుంచి బయటికి పోవు అభివాహము $= \left[A_x + \frac{1}{2}\frac{\partial A_x}{\partial x}\cdot dx\right]dy\,dz$

$\therefore$ X దిశలో ఫలకము నుండి బయటికి పోవు అధిక అభివాహము

$$= \left[\left(\cancel{A_x} + \frac{1}{2}\frac{\partial A_x}{\partial x}\cdot dx\right)dy\,dz - \left(\cancel{A_x} - \frac{1}{2}\frac{\partial A_x}{\partial x}\cdot dx\right)dydz + \right]$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial y}\cdot dxdydz$$

Y దిశలో ఫలకము నుండి బయటకి పోవు అధిక అభివాహము = $\frac{\partial A_y}{\partial y}\cdot dx\,dydz$

Z దిశలో ఫలకము నుండి బయటికి పోవు అధిక అభివాహము = $\frac{\partial A_z}{\partial z}\cdot dx\,dydz$

ఫలకము నుండి బయటికి పోవు అపసరణ చెందు మొత్తము అభివాహము = $\left[\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{dz}\right]dxdydz$

$\therefore$ ఏకాంక ఘనపరిమాణకమునకు అపసరణ చెందు అభివాహము = $\left[\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right]$

కాని ఏకాంక ఘనపరిమాణమునకు అపరసరణ చెందు అభివాహమును $\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A}\right)$ అందురు.

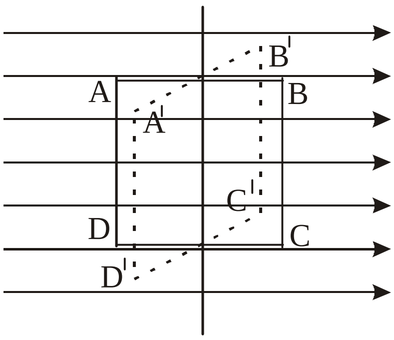
$$\therefore \text{div}\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A} = \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right]$$

సదిశక్షేత్రపు అపసరణ భౌతిక ప్రాముఖ్యము :

$\overrightarrow{A}$ అనునది ప్రవాహి యొక్క వేగమును సూచించిన, $\text{div}\overrightarrow{A}$ అనునది ఆ బిందువు వద్ద, ఏకాంక ఘనపరిమాణమునకు ద్రవ ప్రవాహపు రేటును సూచించును. $\text{div}\overrightarrow{A}$ అనునది ధనాత్మకమయిన ప్రవాహి వ్యాకోచము చెందుచున్నది అని అర్థము. అనగా సాంద్రత క్రమేపి తగ్గుతున్నదని అర్థము. $\text{div}\overrightarrow{A}$ అనునది ఋణాత్మకము అయిన ప్రవాహి సంకోచము చెందుచున్నది అనుకొనుము. అనగా సాంద్రత క్రమేపి పెరుగుతున్నది అని అర్థము. $\text{div}\overrightarrow{A} = 0$ అయిన ద్రవ సాంద్రతలో మార్పు లేదు అని అర్థము.

1.5 సదిశక్షేత్రపు కర్ల్

ఏకాంక వైశాల్యమునకు సదిశ యొక్క గరిష్ట రేఖా సమాకాలనిని “సదిశక్షేత్రపు కర్ల్” అందురు. ఇది ఒక సదిశరాశి. దీని దిశ వైశాల్యమునకు లంబముగా వుంటుంది (చిత్రము 1.2).



చిత్రము 1.2

$\overrightarrow{A}$ అనునది ఒక సదిశ ప్రమేయము అనుకొన్నచో $\left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}\right)$ను సదిశ క్షేత్రపు కర్ల్ అందురు.

$$\therefore \text{curl}\ \overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

సదిశక్షేత్రపు కర్ల్‌కు సమాసమును రాబట్టుట : డెల్ ఆపరేటరు $\left(\overrightarrow{\nabla}\right)$ను పరిగణింపుము.

$\overrightarrow{\nabla}$ ను ఈ క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును.

$$\overrightarrow{\nabla} = \left[\overrightarrow{i}\frac{\partial}{\partial x} + \overrightarrow{j}\frac{\partial}{\partial y} + \overrightarrow{k}\frac{\partial}{\partial z}\right]$$

$\overrightarrow{A}$ అనునది ఒక సదిశ అనుకొనుము. $\overrightarrow{A}$ సదిశను ఈ క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును.

$$\overrightarrow{A} = \left[\overrightarrow{i}A_x + \overrightarrow{j}A_y + \overrightarrow{k}A_z\right]$$

$$\operatorname{curl}\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}$$

$$\operatorname{curl}\overrightarrow{A} = \left[\overrightarrow{i}\frac{\partial}{\partial x} + \overrightarrow{j}\frac{\partial}{\partial y} + \overrightarrow{k}\frac{\partial}{\partial z}\right] \times \left[\overrightarrow{i}A_x + \overrightarrow{j}A_y + \overrightarrow{k}A_z\right]$$

$$\operatorname{curl}\overrightarrow{A} = \overrightarrow{i}\left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right] + \overrightarrow{j}\left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right] + \overrightarrow{k}\left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]$$

$$\therefore \operatorname{curl}\overrightarrow{A} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

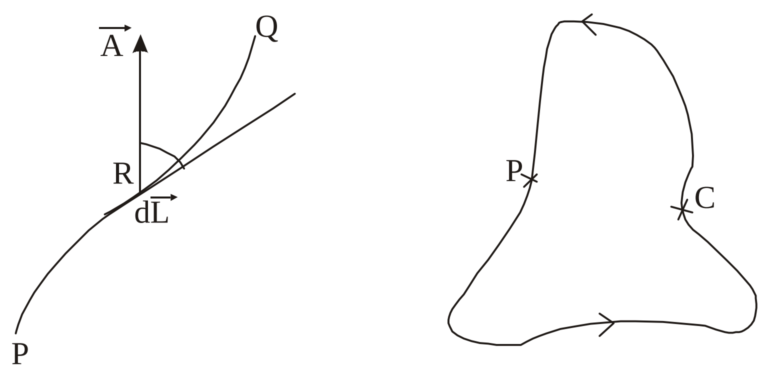
$$\operatorname{curl}\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}$$

సదిశ క్షేత్రపు కర్ల్ యొక్క భౌతిక ప్రాముఖ్యము : కర్ల్ అనగా భ్రమణము అని అర్థము. $\operatorname{curl}\overrightarrow{A}$ = శూన్యము అనగా $\overrightarrow{A}$ సదిశకు సంబంధించిన భ్రమణము లేదు అని అర్థము.

1.6 సదిశల సమాకలనము

1.6.1 రేఖీయ సమాకలని : ఒక వక్రరేఖ వెంట ఒక సదిశరాశి యొక్క సమాకలనిని ఆ రాశి యొక్క రేఖీయ సమాకలని అంటారు.

XH‹ k%ŠbÊ€ò ..Õ=°$` Î= =ãH=ò "Ê@P నుండి Qకు జరిగే స్థానభ్రంశమును తీసుకుందాము. (చిత్రము 1.3ను చూడండి).



చిత్రము 1.3

మృదువక్రము పథము మొత్తాన్ని ఒక్కొక్కటి 'dL' పొడవు గల 'n' చిన్న మూలకములుగా విభజిద్దాము. ప్రతిచిన్న

మూలకము చుట్టూ వ్యాపించి వున్న సదిశాక్షేత్రములు వరుసగా $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \cdots, \overrightarrow{F_n}$ అని వ్రాద్దాము. వక్రము మీద గల ప్రతి బిందువు వద్ద సదిశరాశి యొక్క పరిమాణము మరియు దిశ నిరంతరముగా మారుతూ వుండవచ్చు. P నుండి Q వరకు అన్ని మూలకముల యొక్క బిందు లబ్ధములు $\overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{dL}, \overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{dL}, \cdots, \overrightarrow{F_n} \cdot \overrightarrow{dL}$ ల యొక్క మొత్తమును ఈ క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చు.

$$\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dL} = \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{dL} + \overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{dL}, \cdots + \overrightarrow{F_n} \cdot \overrightarrow{dL}$$

$$= \sum_{1}^{n} \overrightarrow{F_n} \cdot \overrightarrow{dL}$$

$n \to \infty$ అయితే $\overrightarrow{dL} \to 0$ ఇప్పుడు పై కూడిక గుర్తు (Σను) సమాకలనితో తొలగించవచ్చు.

$$\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{L} = \int_P^Q \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dL} = \int_P^Q F \cos\theta \, dL \quad \text{--------------} \quad (1)$$

θ అనేది $\overrightarrow{F}$ మరియు $d\overrightarrow{L}$ ల మధ్య కోణము. సమీకరణము (1) PQ రేఖ వెంట $\overrightarrow{F}$ యొక్క రేఖీయ సమాకలనిని నిర్వచిస్తుంది. $\overrightarrow{F}$ యొక్క అంశముల దృష్ట్యా రేఖీయ సమాకలనిని క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చు.

$$\int_P^Q \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dL} = \int_P^Q \left[F_x dx + F_y dy + F_z dz \right] \quad \text{-----------} \quad (2)$$

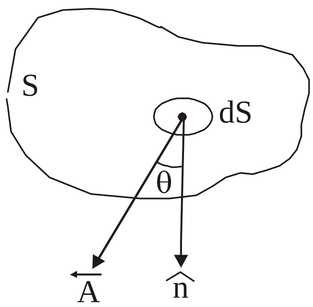
దీనిని క్రింది రూపంలో కూడా వ్రాయవచ్చు.

$$\oint_P \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dL} = \oint_P \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz \right) \quad \text{---------} \quad (3)$$

‹ ÐÉ$ Ç¶~¾ò "Ô@ P నుండి Pకు C గుండా గొనిపోబడిన సమాకలనమును సూచిస్తుంది. $\oint_P$ గుర్తు PCP సంవృత పథము వెంట వలయ సమాకలనిని సూచిస్తుంది. PCP అను సంవృత తలము నుండి ఎడమవైపుకు బహిర్గతమయ్యే రేఖ ఆ తలమును సూచిస్తుంది. పటంలో చూపినట్లు అపసవ్య దిశలో గీచినట్లు చూపబడిన సంవృత వలయము ఒక సంవృత తలమును సూచిస్తుంది. రేఖీయ సమాకలని లేదా సంవృత సమాకలని ఒక అదిశరాశిని సూచిస్తుంది.

ఉదాహరణలు : (1) మృదు వక్రము PQ వెంట కదిలే ఒక కణముపై పనిచేయు బలమును $\overrightarrow{F}$ సూచిస్తుంది. సమీకరణము (1) P నుండి Q వరకు కణముపై పనిచేయు $\overrightarrow{F}$ అను బలము చేసిన పని పరిమాణమును తెలుపుతుంది. ఇందులో $\overrightarrow{F}$ మరియు సూక్ష్మస్థానభ్రంశములు $\overrightarrow{dL}$ లు సదిశలు. కాని పని $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dL}$ మాత్రము అదిశరాశి. (2) ఒక విద్యుత్ క్షేత్రములోని ఏదైనా బిందువు వద్ద విద్యుత్క్షేత్ర తీవ్రత $\overrightarrow{E}$. P మరియు Q బిందువుల మధ్య $\overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dL}$ యొక్క సమాకలనిని P, Qల మధ్య పొటెన్షియల్ బేధము తెలుపుతుంది.

1.6.2 ఉపరితల సమాకలని :



చిత్రము 1.4

చిత్రము 1.4లో చూపిన విధంగా మృదు వక్రముతో హద్దు ఏర్పరచబడిన సదిశాక్షేత్రములో S అను సాధారణ తలమును ఊహిద్దాం. S అను తలముపై గల బిందువు చుట్టూ P బిందువు చుట్టూ చిన్న ఉపరితల మూలకము dS. దీనిని ఆ తలమునకు లంబదిశలో వుంది. dS పరిమాణము గల $\overrightarrow{dS}$ సదిశాతలము ద్వారా వ్యక్తీకరించవచ్చు. $\overrightarrow{dS}$ దిశలో ధనాత్మక ప్రమాణ సదిశ $\widehat{n}$ అయితే

$$d\overrightarrow{S} = \widehat{n} \cdot dS \text{---------} \quad (1)$$

P బిందువు వద్ద $\overrightarrow{A}$ దిశతో θ కోణంలో $\widehat{n}$ ను తీసుకుందాము. P బిందువు ఒక సదిశాక్షేత్రములో వున్నది. అదిశా లబ్ధము

$$\overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{S} = \overrightarrow{A} \cdot \widehat{n}\ dS = A\ dS\cos\theta \text{ --------} \quad (2)$$

dS ఉపరితల మూలకము ద్వారా పోయే $\overrightarrow{A}$ సదిశాక్షేత్రము యొక్క అభివాహమును సమీకరణము (2) సూచిస్తుంది. సదిశాక్షేత్రము వలన సంపూర్ణ తలము S ద్వారా పోయే అభివాహమును ఈ క్రింది సమాకలని ద్వారా వ్యక్తపరచవచ్చు.

$$\iint_S \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_S \overrightarrow{A} \cdot \widehat{n}\ dS = \iint_S A\cos dS \text{ ----------} \quad (3) \quad \text{లేదా}$$

$$\iint_S \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_S \left(A_x dS_x + A_y dS_y + A_z dS_z\right) \text{ --------} \quad (4)$$

ఉదా : విద్యుత్తు లేదా అయస్కాంత క్షేత్రములో ఉపరితలము ద్వారా పోయే మొత్తం అభివాహము

$\iint_S \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dS}$తో చూపవచ్చు.

ఏదైనా ఒక బిందువు వద్ద క్షేత్రములో $\overrightarrow{A}$ అనేది విద్యుత్ లేదా అయస్కాంత ప్రేరణ.

ఘనపరిమాణ సమాకలని : అంతరాళములో V ఘనపరిమాణము కప్పుతున్న సంవృత తలమును తీసుకుందాము. $d\overline{V}$ అనే చిన్న ఘనపరిమాణ మూలకములో ఒక బిందువు వద్ద సదిశా బిందు ప్రమేయము $\overrightarrow{A}$. దీని సమాకలని

$$\iiint_V \overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{V}$$

దీనిని మొత్తం ఘనపరిమాణము V పై సదిశాబిందు ప్రమేయము $\overrightarrow{A}$ యొక్క ఘనపరిమాణ సమాకలని అంటారు. కార్టీషియన్ నిరూపకాంశాల దృష్ట్యా $\overrightarrow{A}$ యొక్క ఘనపరిమాణ సమాకలని

$$\iiint_V \overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{V} = \overline{i}\iiint \widehat{V} A_x dxdydz + \overline{j}\iiint \widehat{V} A_y dxdydz + \overline{k}\iiint \widehat{V} A_z dxdydz$$

ఇందులో $\widehat{V}$ ప్రమాణ ఘనపరిమాణ సదిశను సూచిస్తుంది.

1.7 గాస్, స్టోక్స్, మరియు గ్రీన్ సిద్ధాంతములు

1.7.1 గాస్ అపసరణ సిద్ధాంతము :

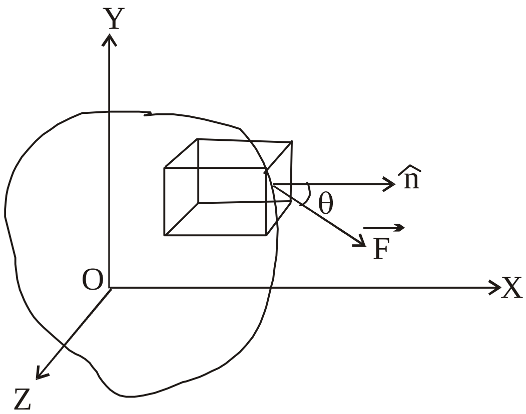
ప్రవచనము : ఘనపరిమాణము V పై సదిశాక్షేత్రము $\overrightarrow{F}$ అపసరణము యొక్క ఘన సమాకలని, ఆ మూసిన ఘనపరిమాణము (V) యొక్క ఉపరితలము S పై సదిశాక్షేత్రము $\overrightarrow{F}$ యొక్క ఉపరితల సమాకలనికి సమానము.

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_V \left(\operatorname{div} \overrightarrow{F}\right) dV$$

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_V \left(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{F}\right) dV \quad \text{---------} \quad (1)$$

ఈ సిద్ధాంతము ద్వారా ఘనపరిమాణ సమాకలనికి ఉపరితల సమాకలనికి గల సంబందము విదితమవుతుంది.

గాస్ సిద్ధాంత నిరూపణ :



చిత్రము 1.5

ఒక సదిశాక్షేత్రము $\overrightarrow{F}$ లో V అనే ఘనపరిమాణము ఏదైనా ఆకృతిలో గల ఉపరితలము S చే ఆవరించబడి ఉన్నదనుకుందాము. మొత్తము ఘనపరిమాణమును అనేక స్వల్ప ఘనపరిమాణాల సమూహముగా ఊహిద్దాము. చిత్రం 1.5లో చూపిన విధముగా సంవృత తలమునకు సమీపంలో చిన్న ఘనపరిమాణ మూలకము dV ని తీసుకుందాము. div $\overrightarrow{F}$ పదము మొత్తము ఘనపరిమాణము V ద్వారా పోయే అభివాహమును తెలిపితే, స్వల్ప ఘనపరిమాణము dV ద్వారా అపసరణము చెందే అభివాహమును div $\overrightarrow{F}$dV తెలుపుతుంది. సంపూర్ణ ఘనపరిమాణము ద్వారా అపసరణము చెందే అభివాహము

$$\iiint_V \overrightarrow{F}\, dV$$

పటంలో చూపిన స్వల్ప ఘనపరిమాణపు ఉపరితల వైశాల్యము dS మొత్తము వైశాల్యము S అనుకుందాము. dS మొత్తము వైశాల్యము S అనుకుందాము. dS వైశాల్యమునకు గీచిన లంబ ప్రమాణ సదిశ $\widehat{n}$. ఇది తలము నుండి బాహ్యదిశలో ఉన్నపుడు ధనాత్మకమని భావించబడినది. సదిశాక్షేత్రము $\overrightarrow{F}$ మరియు $\widehat{n}$ లు ఒకదానికొకటి ‘ θ’ కోణములో వున్నట్లయితే

$$\overrightarrow{F}\cdot \widehat{n} = F\cos\theta$$

అపుడు $\left(\overrightarrow{F}\cdot\widehat{n}\right)dS = \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dS}$

ఇది dS అను విస్తీర్ణ మూలకము ద్వారా పోయే అభివాహమును నిర్వచిస్తుంది. మొత్తము వైశాల్యము S ద్వారా పోయే అభివాహము

$$\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dS}$$

ఈ అభివాహము S చేత ఆవరించబడిన ఘనపరిమాణం V ద్వారా అపసరణము చెందే మొత్తం అభివాహమునకు సమానము.

$$\iint_S \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dS} = \iiint_V \mathrm{div}\cdot\overrightarrow{F}\cdot dV$$

$$= \iiint_V \left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{F}\right)dV$$

కార్టీజియన్ అంశరాశుల ద్వారా గౌస్ సిద్ధాంతమును క్రింది విధముగా వర్గీకరింపవచ్చు.

గాస్ సిద్ధాంతము యొక్క భౌతిక భావన

ప్రవాహి గమనమునకు అనువర్తించినపుడు $\iint_S \overrightarrow{u}\cdot\widehat{n}\,dS$ మూసిన తలము S లోపలి నుండి ఏకాంక కాలములో బహిర్గతమయ్యే ద్రవ ఘనపరిమాణమును తెలుపుతుంది. S తలము చేత ఆవరించబడిన ఘనపరిమాణము నుండి ఏకాంక కాలములో బహిర్గతమయ్యే ద్రవఘనపరిమాణమును $\iiint_V \mathrm{div}\,\overrightarrow{u}\,dV$ తెలుపుతుంది. ఇచ్చట ప్రమాణ సాంద్రత గల అసంపీడ్య ద్రవము యొక్క వేగ సదిశ $\overrightarrow{u}$. ద్రవములో S అనేది ఏదైనా సంవృత తలము.

1.7.2 స్టోక్ సిద్ధాంతము :

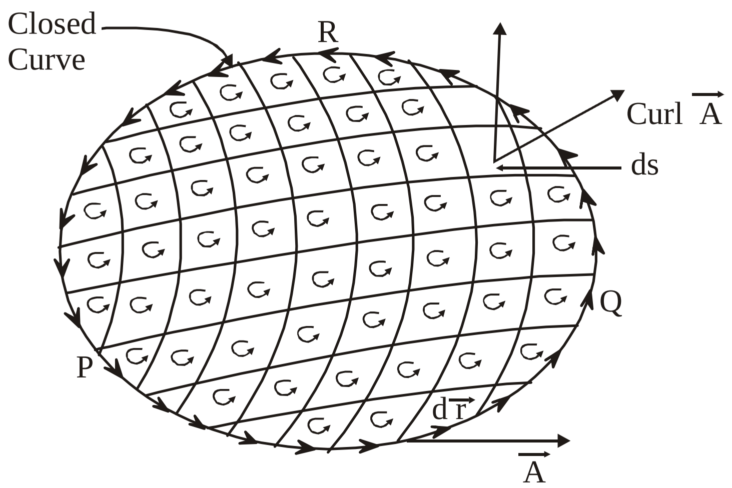
ప్రవచనము : ఏదైనా మూసిన వక్రము C వెంబడి తీసుకున్న సదిశా క్షేత్రము యొక్క రేఖీయ సమాకలని ఆ వక్రములో ఇమిడిన తలము S పై తీసుకున్న curl $\overrightarrow{F}$ యొక్క ఉపరితల సమాకలనికి సమానము.

గణితరీత్యా :

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dL} = \iint_S \text{curl}\, \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dS}$$

$$= \iint_S \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F}\right) \cdot \overrightarrow{dS}$$

స్టోక్ సిద్ధాంతము నిరూపణ : ఒక సదిశాక్షేత్రము $\overrightarrow{F}$ లో ఇమిడి వున్న S అను తలమును తీసుకుందాము. చిత్రము **1.6**లో చూపినట్లు S యొక్క సరిహద్దు PQR అను మూసిన వక్రము



చిత్రము **1.6**

అపసవ్య దిశలో గీయబడిన PQR వక్రము వెంట $\overrightarrow{F}$ యొక్క రేఖీయ సమాకలని

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dL} \quad \text{----------} \quad (1)$$

మొత్తము తలము అధిక సంఖ్యలో గల చతురస్రాకార మూలకములుగా విభజింపబడినదనుకుందాము.

ఒక్కొక్క సూక్ష్మచతురస్ర వైశాల్యము dS అని భావిద్దాము. తలము వక్రతలముగా ఉన్నప్పటి సూక్ష్మరూపములో గల dS వైశాల్యము గల మూలకములు విడి విడిగా సమతలములుగా ఉన్నా భావించవచ్చు. ఒక్కొక్క వైశాల్యమును సదిశావిస్తీర్ణము $\overrightarrow{dS}$ గా సూచించవచ్చు.

నిర్వచనము నుండి ఏదైనా బిందువు వద్ద సదిశరాశి యొక్క అలక (Curl) అనగా ఆ బిందువు వద్ద సరిహద్దు రేఖ వెంట గ్రహించిన వైశాల్యములోని ప్రమాణ వైశాల్యమునకు తీసుకున్న సదిశరాశి $\overrightarrow{F}$ యొక్క గరిష్ట రేఖీయ సమాకలనికి సమానము. అందువలన S యొక్క సరిహద్దు రేఖ వెంట $\overrightarrow{F}$ యొక్క సమాకలని

$$\text{curl}\,\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dS}$$

'అలక'(Curl) యొక్క dS తలమునకు లంబదిశలో ఉంటుంది. అన్ని విస్తీర్ణ మూలకముల యొక్క సరిహద్దుల వెంట $\overrightarrow{F}$ యొక్క రేఖీయ సమాకలనుల మొత్తము

$$\int\int \text{curl}\,\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dS} \text{ ------------- } (2)$$

ఇది $\text{curl}\,\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dS}$ యొక్క ఉపరితల సమాకలని. సరిహద్దు వెంట గ్రహించిన సమాకలనులు తప్ప మిగిలిన సమాకలనులు ఒకదానికొకటి రద్దు పరచుకుంటాయని పటం నుండి మనకు తెలుస్తుంది. మిగిలిన సమాకలనులలో ఒక దానికొకటి వ్యతిరేక దిశలో గలవి జంటలుగా వుంటాయి. సరిహద్దు వెంట మాత్రమే వున్న రేఖీయ సమాకలనుల మొత్తమును సమీకరణము (1) సూచిస్తుంది. అందువలన

$$\oint \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dL} = \iint_S \text{curl}\,\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dS}$$

$$= \iint_S \left(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{F}\right)\cdot d\overrightarrow{S}$$

$$= \iint_S \left(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{F}\right)\cdot\widehat{n}\,dS \text{ ----------- } (3)$$

ఇక్కడ $d\overrightarrow{S} = \widehat{n}\,dS$

స్టోక్స్ సిద్ధాంతము ఉపరితల సమాకలనిని రేఖీయ సమాకలనిగాను, అదే విధంగా రేఖీయ సమాకలనిని ఉపరితల సమాకలనిగాను మార్చే పద్ధతిని తెలుపుతుంది. $\text{curl}\,\overrightarrow{F}=0$ అయితే మూసిన మార్గము వెంట $\oint \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dL}=0$ అవుతుందని గుర్తించాలి. సదిశక్షేత్రము $\overrightarrow{F}$ నిత్యత్వము. దీని అర్థమేమంటే ఒక తలములో గల రెండు బిందువుల మధ్య కణము ప్రయాణించిన మార్గముపై పని పరిమాణము ఆధారపడదని తెలుస్తుంది. తొలి బిందువు నుండి తుది బిందువుకు పొందిన స్థానభ్రంశముపై మాత్రమే పని పరిమాణము ఆధారపడుతుంది.

1.7.3 'గ్రీన్' సిద్ధాంతము

ప్రవచనము : మూసి వున్న తలము S యొక్క ప్రాంతములో ఇమిడి వున్న అదిశా బిందు ప్రమేయములు. ϕ మరియు ψ మొదటి మరియు రెండవ శ్రేణి అవిచ్ఛిన్న వ్యుత్పన్నాలను కలిగి ఉన్నట్లయితే

$$\int\int\int_V \left(\phi\nabla^2\psi + \nabla\phi\cdot\nabla\psi\right)dV = \int\int_S \left(\phi\nabla\psi\right)\cdot\overrightarrow{dS} \text{ ------- } (1)$$

దీనిని గ్రీన్ యొక్క 'తొలి గుర్తింపు' (First Identity) అంటారు. మరియు

$$\iiint_V \left(\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi\right) dV = \iint_S (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi).\overrightarrow{dS} \text{ ------- } (2)$$

దీనిని గ్రీన్ యొక్క 'ద్వితీయ గుర్తింపు' అంటారు. ఈ రెండు గ్రీన్ సిద్ధాంతము యొక్క మొదటి మరియు రెండవ రూపములు.

గ్రీన్ సిద్ధాంతము యొక్క నిరూపణ : గౌస్ అపసరణ సిద్ధాంతము యొక్క గణిత రూపాన్ని ఈ క్రింది విధముగా తీసుకుందాము.

$$\iiint_V \operatorname{div}\overrightarrow{F}\, dV = \iint_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dS} \text{ ---------- } (3)$$

$F=\phi\nabla\psi$ అని వ్రాస్తే పై సమీకరణాన్ని క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చు.

$$F_x\,\hat{i} + F_y\,\hat{j} + F_z\,\hat{k} = \phi\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{k}\right)$$

పై సమీకరణము ప్రకారము

$$F_x = \phi\frac{\partial\psi}{\partial x};\ F_y = \phi\frac{\partial\psi}{\partial y};\ F_z = \phi\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

కార్టీషియన్ అంశాల ద్వారా వ్యక్తీకరిస్తే

$$\operatorname{div}\overrightarrow{F} = \frac{\partial}{\partial x}F_x + \frac{\partial}{\partial y}F_y + \frac{\partial}{\partial z}F_z$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$

$$= \phi\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \phi\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \phi\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

$$= \phi\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right] + \frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

$$= \phi\nabla^2\psi + \nabla\phi\cdot\nabla\psi$$

$\operatorname{div} F$ విలువను సమీకరణము (3)లో ప్రతిక్షేపిస్తే

$$\iiint_V \left(\phi\nabla^2\psi + \nabla\phi\cdot\nabla\psi\right) dV = \iint_S (\psi\nabla\phi)\cdot\overrightarrow{dS} \text{ --------- } (4)$$

'గ్రీన్' ప్రథమ గుర్తింపు : గ్రీన్ సిద్ధాంతము బిందు ప్రమేయములను పరస్పర మార్పిడి చేసినట్లయితే, ఈ క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చు.

$$\iiint_V \left(\psi\nabla^2\phi + \nabla\psi\cdot\nabla\phi\right)dV = \iint_S (\psi\nabla\phi)\cdot\overrightarrow{dS} \text{ ------- } (5)$$

సమీకరణము **(4)** నుండి **(5)**ను తీసివేసినట్లయితే దీనినే గ్రీన్ సిద్ధాంతము యొక్క 'ద్వితీయ గుర్తింపు' లేదా సిద్ధాంతము యొక్క 'ద్వితీయ గుర్తింపు' లేదా సిద్ధాంతము యొక్క రెండవ రూపము.

$$\nabla\psi\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{\partial\psi}{\partial n}dS \text{ మరియు } \nabla\phi.\overrightarrow{dS} = \frac{\partial\phi}{\partial n}dS$$

సమీకరణములోని కుడివైపున గల పదాలు అదిరాశులు మరియు వాటిని ψ మరియు ϕ యొక్క దిశావ్యుత్పన్నములని పిలుస్తారు. dS ఉపరితల మూలకమునకు లంబము వెంట బయట వైపుకు వుంటాయి.

గ్రీన్ సిద్ధాంతము యొక్క 'రెండవ రూపాన్ని' దిశా వ్యుత్పన్నాల సహాయంతో క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చు.

$$\iiint_V \left(\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi\right)dV = \iint_S \left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)dS \text{ ---------- } (7)$$

కుడివైపున గల పదము (RHS) ఒక అదిశరాశి.

ఒక తలముతో గ్రీన్ సిద్ధాంతము : R అను ప్రాంతము $x-y$ తలములో ఉండి C అను మూసి వున్న వక్రములో ఇమిడి వున్నది. R ప్రాంతములో వ్యుత్పన్నములను కలిగిన x మరియు y యొక్క రెండు అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయములు M మరియు N. ఈ తలములో గ్రీన్ సిద్ధాంతము

$$\oint_C M\,dx + N dy = \iint_S \left(\frac{\partial N}{dx} - \frac{\partial M}{dy}\right)dx\,dy \text{ ------------- } (8)$$

ఇచ్చట మూసి వున్న పథము ధన దిశలో వ్యక్తపరచబడినది. ఒక తలములో గ్రీన్ సిద్ధాంతము 'స్టోక్స్ సిద్ధాంతము' యొక్క ప్రత్యేక సందర్భము.

1.8 సాధించిన సమస్యలు

1. curl grad $\widehat{\phi} = 0$ అని చూపండి.

సాధన : curl grad $\widehat{\phi} = \nabla\times\nabla\phi$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\right]+\hat{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\right]+\hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\right]$$

$$= 0$$

నిత్యత్వ క్షేత్రముయొక్క curl శూన్యమునకు సమానమని రుజువయినది.

2. $\overrightarrow{A} = zx^3\,\hat{i} - 2x^2yz\,\hat{j} + 2yz^4\,\hat{k}$ అయితే, $(1,-1,1)$ వద్ద curl $\overrightarrow{A}$ విలువను కనుక్కోండి.

$$\text{curl}\,\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ zx^3 & -2x^2yz & 2yz^4 \end{vmatrix}$$

$$= \left(2z^4 + 2x^2y\right)\hat{i} + x^3\,\hat{j} - 4xyz\,\hat{k}$$

బిందువు వద్ద $\text{curl}\,\overrightarrow{A} = \hat{j} + 4\hat{k}$.

3. $\text{grad}(U+V) = \text{grad}U + \text{grad}V$ అని చూపండి.

సాధన : $\text{grad}(U+V) = \overrightarrow{\nabla}(U+V)$

$$= \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(U+V)$$

$$= \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}(U+V) + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}(U+V) + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(U+V)$$

$$= \hat{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \hat{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \hat{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial U}{\partial z} + \hat{k}\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$= \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)U + \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)V$$

$$= \text{grad}\,U + \text{grad}V$$

4. $\text{grad}\left(\overrightarrow{A}\cdot\vec{r}\right) = \overrightarrow{A}$ అని చూపండి.

సాధన : $\overrightarrow{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z$

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = \left(\hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z\right) \cdot \left(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z\right)$$

$$= x \cdot A_x + y \cdot A_y + z \cdot A_z$$

$$\text{grad}\left(\vec{A} \cdot \vec{r}\right) = \hat{i}A_x \frac{\partial x}{\partial x} + \hat{j}A_y \frac{\partial y}{\partial y} + \hat{k}A_z \frac{\partial z}{\partial z}$$

$$= \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z$$

$$= \vec{A}$$

5. $\phi(x, y, z) = 3x^2y - y^3z^2$ అయితే $(1, -2, -1)$ బిందువు వద్ద $\text{grad}\phi$ విలువను కనుక్కోండి.

సాధన : $\vec{\nabla}\phi = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(3x^2y - y^3z^2\right)$

$$= \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}\left[3x^2y - y^3z^2\right] + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}\left[3x^2y - y^3z^2\right] + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\left[3x^2y - y^3z^2\right]$$

$$= \hat{i}\,(6xy - 0) + \hat{j}\left(3x^2 - 3y^2z^2\right) + \hat{k}\left(-2y^3z\right)$$

$$= 6xy\,\hat{i} + \left(3x^2 - 3y^2z^2\right)\hat{j} + \hat{k}\left(-2y^3z\right)$$

$$= 6 \times 1 \times (-2)\,\hat{i} + \left(3 \times (1)^2 - 3 \times 4 \times 1\right)\hat{j} - (2)(-8)(-1)\,\hat{k}$$

$$= -12\,\hat{i} - 9\,\hat{j} - 16\,\hat{k}$$

1.9 సారాంశము

అదిశ, సదిశ క్షేత్రములను నిర్వచించడమైనది. అదిశక్షేత్రపు ప్రవణత మరియు దాని భౌతిక ప్రాముఖ్యమును వివరించడమైనది. సదిశక్షేత్రపు అపసరణ మరియు కర్ల్ మరియు దాని భౌతిక ప్రాముఖ్యమును విశదీకరించడమైనది. రేఖీయ, ఉపరితల, ఘనపరిమాణ సమాకలనులను నిర్వచించడమైనది. స్టోక్స్, గౌస్, గ్రీన్ సిద్ధాంతములను ప్రతిపాదించి నిరూపించడమైనది.

1.10 కీలక పదములు

స్థావర అదిశక్షేత్రము, అభివాహరేఖలు, $\vec{\nabla}$ (డెల్ ఆపరేటరు), దైర్ఘ్య సదిశల యొక్క స్వల్ప మూలకము $(\vec{dL})$, విస్తీర్ణ సదిశ యొక్క స్వల్ప మూలకము $(\vec{dS})$, ఘనపరిమాణ సదిశ యొక్క స్వల్ప మూలకము $(d\vec{V})$.

1.11 స్వయం సమీక్షా ప్రశ్నలు

1. అదిశ, సదిశ క్షేత్రములను నిర్వచింపుము ?
2. సదిశక్షేత్రపు కర్ల్‌ను నిర్వచింపుము? దాని డిటర్మినెంట్ రూపమును వ్రాయుము?
3. సదిశయొక్క కేంద్రీకృత, అపసరణ (కేంద్రాపగమన) మరియు కర్ల్‌ను వివరింపుము?
4. అదిశక్షేత్రపు ప్రవణత ఒక సదిశ అని చూపుము? మరియు ప్రవణ భౌతిక ప్రాముఖ్యతను వివరింపుము.
5. అదిశక్షేత్రపు అపసరణ భౌతిక ప్రాముఖ్యతను వివరింపుము? సదిశక్షేత్రపు కర్ల్‌ను వివరింపుము?
6. $\vec{A}$ సదిశ అపసరణకు కార్టీజియన్ నిరూపకములతో సమాసమును రాబట్టుము
7. సదిశక్షేత్రపు కర్ల్‌ను వివరించి, దాని భౌతిక ప్రాముఖ్యతను వివరింపుము?
8. 'రేఖీయ సమాకలని' వివరించి, దాని భౌతిక ప్రాముఖ్యతను వివరింపుము?
9. స్టోక్ సిద్ధాంతమును ప్రతిపాదించి, నిరూపింపుము?
10. గౌస్ సిద్ధాంతమును ప్రతిపాదించి, నిరూపింపుము ?
11. గ్రీన్ సిద్ధాంతమును ప్రతిపాదించి, ఋజువు చేయండి?

అభ్యాసము (Exercises)

1. $\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = A\frac{dA}{dt}$ అని చూపండి.
2. భ్రమణ చలనముకు ఈ క్రింది సంబంధాలను రుజువు చేయండి.

   (ఎ) $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ (బి) $\vec{\omega} = \frac{\vec{r} \times \vec{r}}{r^2}$

3. అదిశాక్షేత్రము యొక్క ప్రవణత అనగానేమి? $\vec{r}$ అనేది ఏదైనా కణము యొక్క స్థాన సదిశ అయితే $\text{grad}\left(\frac{1}{r}\right)$ యొక్క విలువ కనుక్కోండి.
4. ఏదైనా సదిశ $\vec{A}$ కు ఈ క్రింది సంబంధాలను రుజువు చేయండి.

   $\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$ మరియు $\vec{A} \times \vec{A} = 0$

5. $\text{div}\,\vec{r} = 3$ అని చూపండి.

6. $\mathrm{div}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)=0$ అని చూపండి.

7. $\mathrm{div}\left(r^n \cdot \vec{r}\right)=r^n\,(n+3)$ అని చూపండి.

8. $\mathrm{curl}\,\vec{r}=0$ అని చూపండి. $\vec{r}$ స్థాన సదిశ $\vec{r}=\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z$

9. $\mathrm{curl}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)=0$ అని చూపండి.

10. $\mathrm{curl}\left(\frac{\vec{k}}{r}\right)=\frac{-\hat{i}y+\hat{j}x}{r^3}$ అని చూపండి.

1.12 చదువదగిన గ్రంథాలు

1. యాంత్రిక శాస్త్రము - తరంగములు, కంపనములు - సి. మురళీ మోహన శాస్త్రి, కె శంకర్ మరియు పి భాస్కరరావు
2. యాంత్రిక శాస్త్రము - తరంగములు, కంపనములు - డాక్టర్ ఎస్‌యల్ గుప్తా మరియు సంజీవ్ గుప్తా
3. యాంత్రిక శాస్త్రము - భార్గవ మరియు శర్మ
4. భౌతిక శాస్త్రము - రెసినిక్ హాలిడే

ప్రయోగం సంఖ్య - 1

గురులోలకము

ఉద్దేశము : గురులోలకం ఉపయోగించి ఇచ్చిన ప్రదేశములో గురుత్వత్వరణం కనుగొనుట.

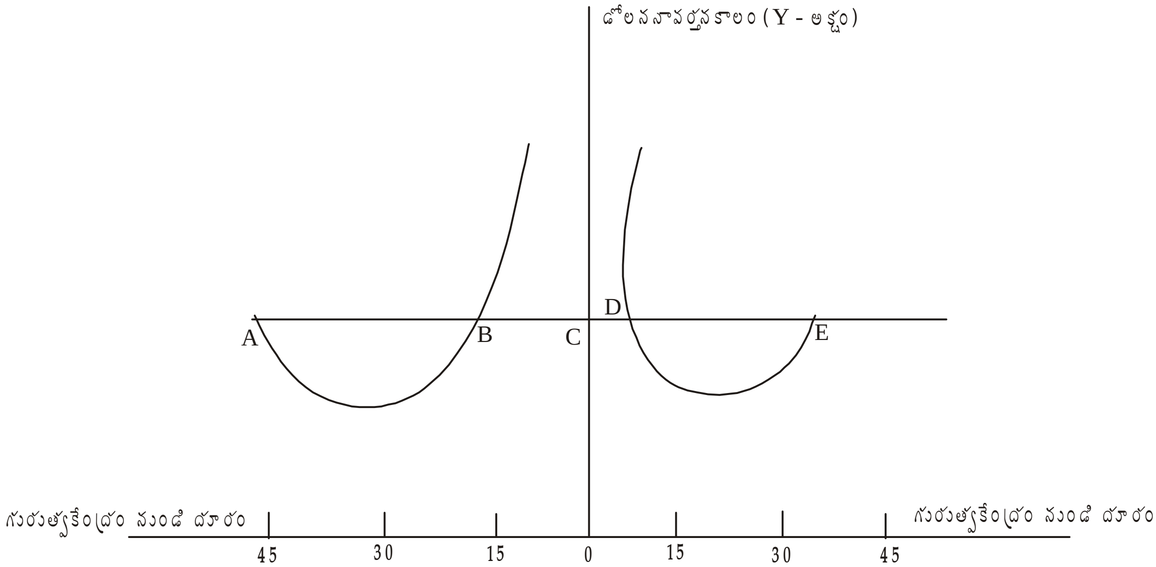
పరికరములు : గురులోలకం, కత్తిమొన, పాదరస మట్టం, దూరదర్శిని, ఆపు గడియారం

పద్ధతి : ఒక ధృడతలము నుండి లోలకం వ్రేలాడదీసి దాని క్రింది అంచున ఒక గుండుసూదిని అతికించి ఎదురుగా కొంత దూరంలో దూరదర్శిని ఉంచి గుండు సూది ప్రతిబింబము, దీనిలో చూడవలెను. ఇప్పుడు లోలకంను డోలనాలు చేయించి, 20 డోలనాలకు పట్టు కాలమును x గా కనుగొని డోలనావర్తనకాలము T ని లెక్కించవలెను. ఈ పద్ధతి గురులోలకంను మొదటి రంధ్రం నుండి చివరి రంధ్రం వరకు వ్రేలాడదీయుచూ ప్రతిసారి డోలనావర్తనకాలం కనుగొనవలెను. రంధ్రము యొక్క దూరములను గురుత్వ కేంద్రం నుండి కొలవవలెను.

గ్రాఫ్ : గురుత్వ కేంద్రం నుండి దూరమును X - అక్షము పైన డోలానావర్తన కాలం Y - అక్షముపైన తీసుకొని గ్రాఫ్ గీయవలెను. గ్రాఫ్ పటములో చూపిన విధముగా ఉండును. ఇప్పుడు X - అక్షమునకు సమాంతరంగా వక్రమును 4 బిందువుల వద్ద ఖండించునట్లు సరళరేఖను గీచి తుల్యమిశ్రమ లోలకము యొక్క సగటు పొడవు ℓ ను $\frac{AD+BE}{2}$ గా గుర్తించవలెను. దానికి సంబంధించిన ఆవర్తనకాలం Tని గుర్తించి ℓ/T^2 ని లెక్కించవలెను.

పరిశీలనలు

	Side A					Side B				
వరుస సంఖ్య	20 డోలనాలకు పట్టు కాలం			డోలనావర్తన కాలం	గురుత్వ కేంద్రం నుంచి దూరం	20 డోలనాలకు పట్టు కాలం			డోలనావర్తన కాలం	గురుత్వ కేంద్రం నుంచి దూరం
	1	2	సరాసరి			1	2	సరాసరి		



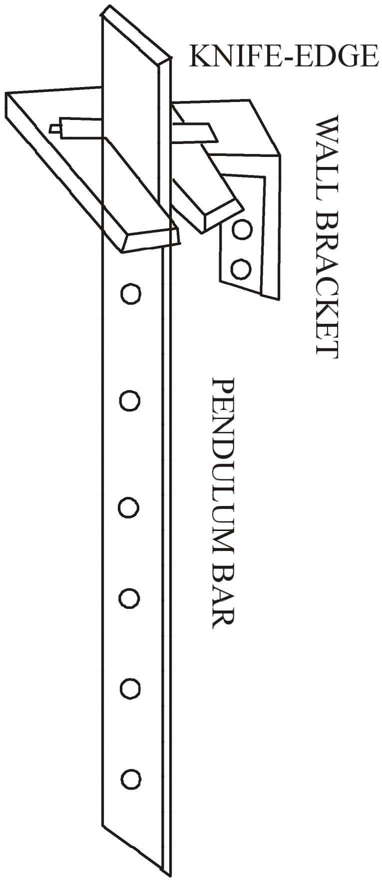
గురుత్వ త్వరణం : $g = 4\pi^2 \frac{\ell}{T^2}$ cm/sec^2 లెక్కించాలి.

ఫలితము : ఇచ్చిన ప్రదేశంలో గురుత్వ త్వరణం కనుగొనాలి $g =$ cm/sec^2

జాగ్రత్తలు : (1) కంపన పరిమితి చాలా తక్కువగా ఉండాలి.

(2) కత్తిమొన క్షితిజ సమాంతరంగా అమర్చాలి.

(3) రెండు కత్తిమొనలు గురుత్వ కేంద్రం నుంచి సమానదూరంలో ఉండాలి.


KNIFE-EDGE
WALL BRACKET
PENDULUM BAR

యూనిట్ - I

పాఠం - 2

కణముల యాంత్రిక శాస్త్రము

ఉద్దేశ్యం :-

1. గమన నియమములను నిర్వచించుట,
2. చర ద్రవ్యరాశి వ్యవస్థ యొక్క చలనము విశ్లేషించుట, రాకెట్ చలన వేగ సమీకరణమును ఉత్పాదించుట, బహుళ దశ రాకెట్, శక్తి మరియు ద్రవ్యవేగ నిత్యత్వ నియమము
3. ద్విమితీయ, త్రిమితీయ అభిఘాతములలో పరిశీలించుట, అభిఘాత పరామితి భావన, పరిక్షేపణ మధ్యచ్ఛేదముల అధ్యయనం.
4. రూథర్‌ఫర్డ్ పరిక్షేపణములో కణముల పరిక్షేపణ కోణీములో సమీకరణమును రాబట్టుట.

విషయసూచిక

2.1 ఉపోద్ఘాతం

యాంత్రికశాస్త్రములో సామాన్యంగా బల ప్రభావమునకు లోనైన వస్తువుల చలనాన్ని గురించి అధ్యయనం చేస్తాము. నిర్లక్ష్యము చేయతగిన ద్రవ్యరాశి కలిగిన వస్తువును 'కణము' అంటాము. ఈ పాఠ్యాంశంలో కణముల చలనమును చర్చిస్తున్నాము.

2.2 న్యూటన్ గమన నియమములు - జడత్వ ద్రవ్యరాశి

1. మొదటి గమన నియమము : "ఒక వస్తువు పై ఏదైనా బాహ్య బలము పనిచేయనంత వరకు ఆ వస్తువు తన నిశ్చల స్థితిని గాని లేదా ఏకరీతి గమనమును గాని కొనసాగిస్తుంది." (త్వరణము శూన్యము)

త్వరణము $\vec{a} = 0$ అయితే బలము $\vec{F} = 0$. ఈ సూత్రమునే జడత్వ సూత్రము అంటారు. దీనిని మొదట గెలీలియో ప్రవచించినాడు.

2. రెండవ నియమము : "ఒక వస్తువు యొక్క రేఖీయ ద్రవ్య వేగం లోని మార్పు రేటు దానిపై పని చేయు బాహ్య బల పరిమాణమునకు సమానము." వస్తువు ద్రవ్యవేగము $\vec{P}$ దానిపై పని చేసిన బలము $\vec{F}$ అయితే

$$\vec{F} = \frac{d\left(\vec{P}\right)}{dt} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt}$$

లేదా $\vec{F} = m\vec{a}$

ఇక్కడ $\vec{a}$ త్వరణము. పై సమీకరణము న్యూటన్ రెండవ నియమము యొక్క గణిత రూపము. ఇదే సాంప్రదాయ యాంత్రిక శాస్త్రము (Classical Mechanics) లోని ఆధార సమీకరణము.

న్యూటన్ మొదటి గమన నియమము, రెండవ గమన నియమము యొక్క ప్రత్యేక సందర్భము.

ద్రవ్యవేగమును మార్చవలసిన బలము $\vec{F} = 0$ అయితే వస్తువు స్థిర వేగముతో ప్రయాణిస్తుంది లేదా నిశ్చల స్థితిలో ఉంటుంది.

ఉదాహరణ :- బాహ్య బలము ప్రభావానికిలోనై చలించే m ద్రవ్యరాశి కణము యొక్క స్థాన సదిశ.

$$\vec{r} = A \sin \omega t \ \hat{i} + B \cos \omega t \ \hat{j}$$

ద్రవ్యవేగమునకు మరియు బలమునకు సమీకరణములను కనుగొందాము.

ఇచ్చిన సమీకరణం $\vec{r} = A \sin \omega t \ \hat{i} + B \cos \omega t \ \hat{j}$

t అను సమయం వద్ద కణము యొక్క వేగము $\vec{V}$ క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చు.

$$\vec{v} = \frac{d\left(\vec{r}\right)}{dt} = A\omega \cos\omega t \ \hat{i} - B\omega \sin\omega t \ \hat{j}.$$

ఇదే విధంగా కణము యొక్క ద్రవ్యవేగము $\vec{P}$

$$\vec{P} = m\,\vec{v} = mA\omega\cos\omega t\,\hat{i} - mB\omega\sin\omega t\,\hat{j}$$

$$= m\,\omega\left[A\cos\omega t\,\hat{i} - B\sin\omega t\,\hat{j}\right]$$

ఇపుడు $\vec{F} = \dfrac{d\vec{P}}{dt} = m\omega\left[-A\omega\sin\omega t\,\hat{i} - B\omega\cos\omega t\,\hat{j}\right]$

$$= -m\omega^2\left(A\sin\omega t\,\hat{i} + B\cos\omega t\,\hat{j}\right)$$

$$= -m\,\omega^2\,\vec{r}$$

అనగా బలము $\vec{F}$, స్థాన సదిశ $\vec{r}$ కు అనులోమానుపాతంలో ఉంటుంది.

3. **మూడవ నియమము :-** "ప్రతి చర్యకు'' వ్యతిరేక దిశలో "ప్రతి చర్య'' ఉంటుంది.

రెండు వస్తువులు ఒకదానితో ఒకటి పరస్పరం చర్య జరుపుకొన్నపుడు, ఒకటవ వస్తువు రెండవ వస్తువు పై కొంత బలమును ప్రయోగించినపుడు, రెండవ వస్తువు కూడా మొదటి వస్తువు పై అంత పరిమాణం గల బలాన్ని వ్యతిరేక దిశలో ఎల్లప్పుడూ ప్రయోగిస్తుంది. రెండు బలములు ఒకే రేఖ వెంట పని చేస్తాయి. ఈ రెండు బలములు ఒకటి "చర్య'' అయితే రెండవది "ప్రతిచర్య''. రెండు బలములలో ఏదైనా "చర్య'' కావచ్చు ఏదైనా "ప్రతిచర్య'' కావచ్చు.

రెండవ వస్తువు వలన మొదటి వస్తువు పై పనిచేయు బలము $\vec{F}_{12}$ అయితే రెండవ వస్తువు పై మొదటి వస్తువు వలన పనిచేయు బలము $\vec{F}_{21}$ అయితే,

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

ఈ రెండు బలములు వేర్వేరు వస్తువుల పై పని చేస్తాయి. రెండు బలములు ఒకే వస్తువు పై పనిచేస్తే అవి ఒకదానికొకటి రద్దు చేసుకుని ఫలిత బలము శూన్యం అవుతుంది.

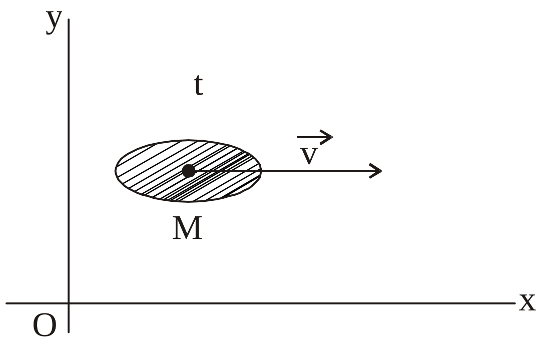
జడత్వ ద్రవ్యరాశి : ఒక వస్తువు పై పనిచేయు బలము F కు, దాని త్వరణము a కి ఉన్న నిష్పత్తిని జడత్వ ద్రవ్యరాశి అంటారు.

జడత్వ ద్రవ్యరాశి $m = \dfrac{F}{a}$

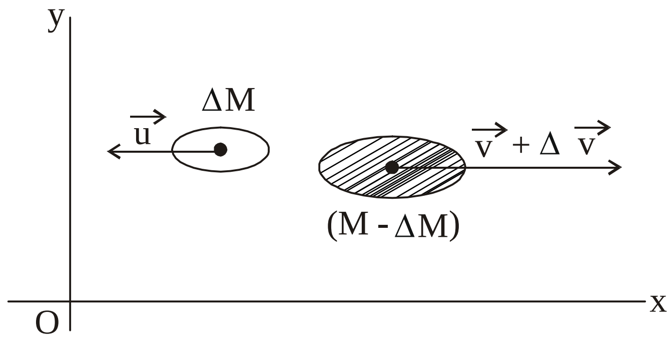
రెండు వేర్వేరు వస్తువుల పై సమాన పరిమాణం గల బలములు పనిచేసి త్వరణాలను కలిగిస్తే వాటి జడత్వ ద్రవ్యరాశుల నిష్పత్తి

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

2.3 చర ద్రవ్యరాశి వ్యవస్థ యొక్క చలనము



చిత్రము 2.1



చిత్రము 2.2

చిత్రము 2.1లో చూపిన విధముగా ఒక ప్రత్యేక నిర్దేశ చట్రము దృష్ట్యా పరిశీలించినపుడు M ద్రవ్యరాశి గల వ్యవస్థ యొక్క ద్రవ్యరాశి కేంద్రము $\vec{V}$ వేగము ప్రయాణిస్తున్నది. t సమయము వద్ద ఈ పరిశీలన జరిగినదనుకొందాము. $t+\Delta t$ సమయం వద్ద వ్యవస్థ నుండి ΔM అను స్వల్ప ద్రవ్యరాశి విడిపోయి దాని ద్రవ్యరాశి కేంద్రము పటములో చూపినట్లు $\vec{u}$ వేగముతో ప్రయాణిస్తున్నదనుకుందాము. తొలి ద్రవ్యరాశి వ్యవస్థ యొక్క ద్రవ్యరాశి M నుండి $M-\Delta M$ కు తగ్గుతుంది. $(M-\Delta M)$ యొక్క ద్రవ్యరాశి కేంద్ర వేగము $\vec{V}$ నుండి $\vec{V}+\vec{\Delta V}$ కు పెరుగుతుంది. ఈ వ్యవస్థ గమనము రాకెట్ గమనము వంటిది అని గ్రహించవచ్చు.

M మరియు $M-\Delta M$ అను ద్రవ్యరాశులు రెండు భాగములను ఒకే ద్రవ్యరాశి వ్యవస్థగా భావిస్తే మనము క్రింది విధముగా వ్రాయగలము.

$$F_{ext} = \frac{\overrightarrow{\rho_f} - \overrightarrow{\rho_i}}{\Delta t} = \frac{\left[(M-\Delta M)\left(\vec{v}+\overrightarrow{\Delta v}\right)+\Delta M\,\vec{u}\right]-\left[M\,\vec{v}\right]}{\Delta t} \text{ ------------ (1)}$$

P_f మరియు P_i లు తుది మరియు తొలి ద్రవ్య వేగాలు.

$$\overrightarrow{F_{ext}} = M\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} - \vec{v}\frac{\Delta M}{\Delta t} - \Delta\vec{v}\,\frac{\Delta M}{\Delta t} + \vec{u}\,\frac{\Delta M}{\Delta t} \text{ -------------- (2)}$$

Δt శూన్య విలువను సమీపిస్తున్నపుడు పటంలో కుడివైపున గల స్థితి ఎడమ వైపున స్థితిని చేరుతుంది. $\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$ రూపము $\frac{d\vec{V}}{dt}$ గా మారుతుంది. ఇది వ్యవస్థ యొక్క త్వరణము. వ్యవస్థ ద్రవ్యరాశి కాలముతోబాటు తగ్గుతుంది. అందువలన Δt విలువ శూన్యమును సమీపిస్తున్నపుడు $\frac{\Delta M}{\Delta t}$ ని $\frac{-dM}{dt}$ గా వ్రాయవచ్చు.

$$\overrightarrow{F_{ext}} = M\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dM}{dt} - \vec{u}\frac{dM}{dt} \text{ -------------- } (3)$$

సమీకరణము (3) చర ద్రవ్యరాశి వ్యవస్థకు అనువర్తించిన న్యూటన్ రెండవ గమన నియమాన్ని తెలుపుతుంది. $d\left(M\vec{V}\right)$ వ్యవస్థ పై పనిచేయు బాహ్య బలమునకు సమానము కాదని దీని నుండి తెలుస్తుంది. విడిపోయిన ద్రవ్యరాశి ΔM యొక్క వేగము శూన్యమైనప్పుడు మాత్రమే $d\left(M\vec{V}\right)$కు సమానమవుతుంది. సమీకరణము (3)ను క్రింది విధముగా వ్యక్తపరచవచ్చు.

$$\overrightarrow{F_{ext}} = M\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dM}{dt} - \vec{u}\frac{dM}{dt}$$

లేదా $$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \overline{Fext} - \vec{v}\frac{dM}{dt} + \vec{u}\frac{dM}{dt}$$

లేదా $$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{ext} + \left(\vec{u} - \vec{v}\right)\frac{dM}{dt} \text{ ----------------- } (4)$$

సమీకరణము (4)లోని చివరి పదము వ్యవస్థ నుండి విడిపోయిన ద్రవ్యరాశి యొక్క ద్రవ్యవేగం లోని మార్పు రేటును సూచిస్తుంది. వ్యవస్థ నుండి విడిపోయిన ద్రవ్యరాశి వలన వ్యవస్థ పై పనిచేయు ప్రతిచర్యా బలముగా గ్రహించవచ్చు. రాకెట్ గమనమునకు సంబంధించి ఈ పదమును ఊర్ధ్వ బలము (thrust) అంటారు. రాకెట్‌ను నిర్మించేవారు ఈ రాశి విలువ వీలైనంత అధికముగా ఉండేటట్లు చూస్తారు. ఇప్పుడు మనము $M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{reaction}$ --------------- (5) అని వ్రాయవచ్చు.

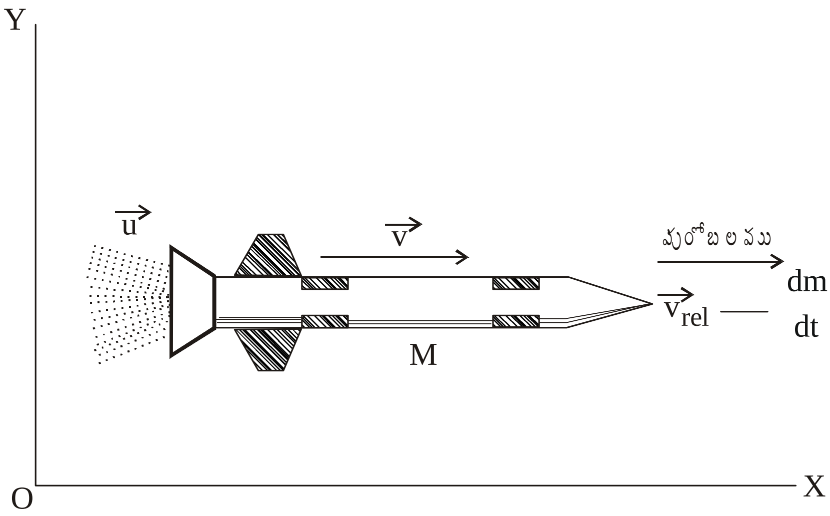
$\vec{F}_{ext}$ = బాహ్య బలము

$\vec{F}_{reaction}$ = ప్రతిచర్యా బలము

2.4 రాకెట్ గమనము

చర ద్రవ్యరాశి వ్యవస్థకు రాకెట్ చక్కని ఉదాహరణ. ద్రవ లేదా ఘన రూపములో ఉండే ఇంధనము కలిగిన దహనపేటిక రాకెట్‌లోని ప్రధాన భాగము. మొదటి సందర్భంలో ఇంధనము (ద్రవ హైడ్రోజన్ లేదా ద్రవ పారఫిన్) మరియు తగిన ఆక్సిడైజర్ (ఆక్సిజన్, నత్రికామ్లము) వేర్వేరు పేటికలలో నిల్వ చేయబడి తర్వాత దహన పేటికలోనికి ప్రవేశ పెట్టబడతాయి. తరువాత సందర్భములో ఇంధనముగా గన్‌పౌడర్ దానితోపాటే ఆక్సిడైజర్ దహన పేటికలోనికి ప్రవేశపెట్టబడతాయి. ఇంధనము దహించబడినపుడు పేటికలోపలి పీడనము అత్యధిక విలువకు పెరుగుతుంది. దహన పేటికలోని అధిక పీడనము వలన రాకెట్‌తోక భాగము నుండి వేడి వాయువులు బహిర్గతమవుతాయి. జెట్ రూపంలో అత్యధిక నిర్గమ వేగముతో ఈ వాయువులు విసర్జితమవుతాయి. దీని ఫలితముగా రాకెట్ అధిక వేగముతో ఊర్ధ్వ దిశలో ప్రయాణిస్తుంది. ద్రవ్యవేగ నిత్యత్వ సూత్రము నుండి లేదా న్యూటన్ మూడవ గమన నియమం నుండి రాకెట్ గమనాన్ని వివరించవచ్చు.

ఏదైన క్షణంలో ప్రయోగశాలలో నిర్దేశ చట్రములో చిత్రము 2.2లో చూపిన విధంగా ఇంధనము సహా రాకెట్ ద్రవ్యరాశి M (చర ద్రవ్యరాశి), రాకెట్ వేగము $\vec{v}$.



చిత్రము 2.2

జెట్ రూపంలో dM ద్రవ్యరాశి గల వాయువు dt కాలంలో రాకెట్ నుండి బహిర్గతమైనదనుకుందాము. రాకెట్‌తో సాపేక్షముగా వాయు - జెట్ వేగము $-\vec{u}$. ప్రయోగశాలా చట్రములో వాయు - జెట్ యొక్క వేగము $\vec{v}-\vec{u} = \vec{v}_{rel}$ అనుకుందాము.

రాకెట్ నుండి బహిస్రావమయ్యే వాయు - జెట్ యొక్క ద్రవ్య వేగంలోని మార్పు రేటు అనగా రాకెట్ పై వాయు - జెట్ వలన పనిచేయు బలము

= వేడి వాయువుల బహిస్రావము వలన రాకెట్ ద్రవ్యరాశిలో కలుగు మార్పు రేటు × సాపేక్ష వేగము

$$= \frac{dM}{dt}\left(\vec{v} - \vec{u}\right)$$

ఈ బలము న్యూటన్ మూడవ గమన నియమము ప్రకారము రాకెట్‌ను ముందు వైపుకు పురోగమించుటకు కావలసిన బలమునకు సమానము.

పురోదిశలో రాకెట్ పై పనిచేయు బలము

$$= \frac{dM}{dt}\left(\vec{v} - \vec{u}\right)$$

రాకెట్ పై పనిచేయు బాహ్య బలము F_{ext} అనుకందాం. ఇచ్చుట $F_{ext} = M\vec{g} \cdot M\vec{g}$ రాకెట్ యొక్క భారము పురో దిశలో రాకెట్ పై పనిచేయు బలము

$$= \frac{dM}{dt}\left(\vec{v} - \vec{u}\right) - M\vec{g} \quad \text{---------------} \ (1)$$

న్యూటన్ మూడవ గమన నియమం నుండి రాకెట్ పై బలము

$$= \frac{d}{dt}\left(M\vec{v}\right) \text{ ----------------------- } (2)$$

సమీకరణములు (1) మరియు (2)ల నుండి

$$\frac{d}{dt}\left(M\vec{v}\right) = \frac{dM}{dt}\left(\vec{v} - \vec{u}\right) - M\vec{g} \text{ ------------ } (3)$$

$$M\,\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{u}\,\frac{dM}{dt} - M\vec{g}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{u}\,\frac{1}{M}\,\frac{dM}{dt} - \vec{g}$$

$\vec{u}$ మరియు $\vec{v}$ ల యొక్క పరిమాణాలను మాత్రమే తీసుకుంటే

$$dv = -u\frac{dM}{M} - g\,dt \text{ ----------------- } (4)$$

సమీకరణము (4)లో గమనము యొక్క తొలి క్షణంలో $t=0$, వేగము v_0 రాకెట్ మొత్తం ద్రవ్యరాశి M_0. ఏదైనా క్షణము t వద్ద వేగము v, ద్రవ్యరాశి M అయితే

$$\int_{v_0}^{v} dv = -u\int_{M_0}^{M}\frac{dM}{M} - g\int_{t=0}^{t} dt$$

లేదా $$\left[v\right]_{v_0}^{v} = -u\left[\log_e M\right]_{M_0}^{M} - g\left[t\right]_0^t$$

లేదా $$\vec{v} - \overrightarrow{v_0} = -\vec{u}\,\log_e\frac{M}{M_0} - \vec{g}\,t$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}\log_e\frac{M_0}{M} - \vec{g}t \text{ .... } (5)$$

సమీకరణము (5) ఏదైనా క్షణములో $\vec{v}$ యొక్క విలువను తెలుపుతుంది.

ప్రత్యేక సందర్భములు : గురుత్వ బలమును

(ఎ) ఉపేక్షించినట్లయితే

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_0} + \vec{u} \log_e \left(\frac{M_0}{M} \right) \text{ ---------- } (6)$$

(బి) రాకెట్ తొలి వేగము $\vec{v}_0$ శూన్యమయితే

$$\vec{v} = \vec{u} \log_e \left(\frac{M_0}{M} \right) \text{ ------------- } (7)$$

అంచెల రాకెట్ : జెట్ ప్రొపల్షన్ (Jet Propulsion) సూత్రము పై రాకెట్ పని చేస్తుంది. జెట్ ప్రొపల్షన్ సూత్రము ద్రవ్య వేగ నిత్యత్వ నియమము పై ఆధారపడుతుంది. ద్రవ్యవేగ నిత్యత్వ సూత్రము ప్రకారము సన్నని నాళము (జెట్) ద్వారా వెనుక నుండి బహిర్గతమయ్యే వాయువులు రాకెట్‌ను పురోదిశలో నడుపుతాయి. రాకెట్ పొందే వేగము 4 కి॥మీ॥/సెకను ఉంటుంది. రాకెట్‌కు అధిక వేగాన్ని చేకూర్చడానికి అంచెల రాకెట్ ఉపయోగించబడినది. ఉదాహరణకు మూడు అంచెల రాకెట్ అయినట్లయితే మొదటి అంచె అధిక పరిమాణం కలిగి భారయుతముగా ఉంటుంది. మొదటి దానితో సాపేక్షముగా రెండవ అంచె తక్కువ పరిమాణాన్ని కలిగి ఉంటుంది. మూడవ అంచె రాకెట్‌కు త్వరణాన్ని చేకూర్చుతుంది.

మొదటి అంచెలోని ఇంధనము అయిపోగానే అది రాకెట్ నుండి విడిపోయి పడిపోతుంది. ఇప్పుడున్న తుది వేగము రెండవ అంచె పని చేయుటకు తొలి వేగము అవుతుంది. ఇప్పుడు రెండవ అంచె అంటించబడి రాకెట్ త్వరణాన్ని పొందుట వలన వేగము పెరుగుతూ పోతుంది. రెండవ అంచెలోని ఇంధనము అయిపోగానే అది కూడా విడిపోయి పడిపోతుంది. ఇప్పటి వరకు పొందిన వేగము పలాయన వేగము కంటే తక్కువగా మాత్రమే ఉంటుంది. ఇప్పుడు మూడవ అంచె అనగా ఆఖరి అంచె అంటించబడి రాకెట్ మరింత త్వరణీకృతమయి వేగం అవసరమైనంత పెరుగుతుంది. రాకెట్ పలాయన వేగమును పొందుతుంది.

2.5 శక్తి, ద్రవ్యవేగ నిత్యత్వము

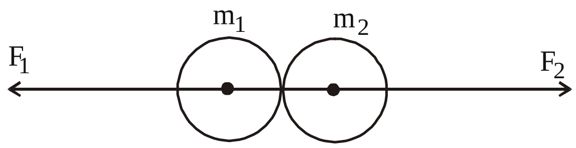
అభిఘాతములలో కణములతో తొలి ద్రవ్యవేగము, కణముల తుది ద్రవ్యవేగమునకు సమానముగా ఉండి, అభిఘాతమునకు పూర్వము మొత్తము గతిజ శక్తి, అభిఘాతమునకు తరువాత మొత్తము గతిజ శక్తినకు సమానము అయిన అటువంటి అభిఘాతమును "స్థితిస్థాపకత అభిఘాతము" అంటారు.

పరమాణుల మధ్య జరుగు అభిఘాతములు, పరమాణు కేంద్రకముల మధ్య జరుగు అభిఘాతములు, ప్రాథమిక కణముల మధ్య జరుగు అభిఘాతములు స్థితిస్థాపక అభిఘాతములకు ఉదాహరణలు.

అభిఘాతములలో కణముల తొలి ద్రవ్యవేగము తుది ద్రవ్యవేగమునకు సమానంగా ఉండి మొత్తము తుది గతిజ శక్తి తగ్గుట గాని, పెరుగుట గాని జరిగిన అటువంటి అభిఘాతమును "అస్థితిస్థాపకత అభిఘాతములు" అందురు. అస్థితిస్థాపక అభిఘాతములు కణముల స్థితిజ శక్తిలో మార్పు గలిగి, శక్తి రుణక రూపములోకి మారును.

ప్రాక్షేపిక లోలకము, రామన్ పరిక్షేపణ అస్థితిస్థాపకత అభిఘాతములకు ఉదాహరణ.

అభిఘాతములో ద్రవ్యవేగ నిత్యత్వము :- m_1 , m_2 ద్రవ్యరాశులు గల రెండు కణముల మధ్య చిత్రము 2.3లో చూపిన విధముగా అభిఘాతము జరుగుచున్నది అనుకొనుము. రెండవ కణము వలన మొదటి కాలము పై పనిచేయు బలము F_1 అనుకొనుము. రెండవ కణము పై పని చేయుబలము F_2 అనుకొనుము.



చిత్రము 2.3

ఈ బలము పరిమాణములో సమానముగా ఉండి, దిశలో వ్యతిరేకముగా ఉండును.

$\therefore$ న్యూటన్ మూడవ నియమము ప్రకారము

$$F_1 = -F_2$$

$\therefore$ మొదటి కణము యొక్క ద్రవ్యవేగములో మార్పు

$$\Delta P_1 = \int_{t_1}^{t_2} F_1 \, dt$$

$$\therefore \Delta P_1 = F_1 \int_{t_1}^{t_2} dt$$

$$\Delta P_1 = F_1 [t_2 - t_1]$$

$$\Delta P_1 = F_1 \cdot \Delta t$$

$$\Rightarrow F_1 = \frac{\Delta P_1}{\Delta t}$$

అదే విధముగా రెండవ కణము యొక్క ద్రవ్య వేగములో మార్పు

$$\Delta P_2 = F_2 \cdot \Delta t$$

$$\Rightarrow F_2 = \frac{\Delta P_2}{\Delta t}$$

$$\therefore F_1 = -F_2$$ (F_1, F_2 లు వ్యతిరేకదిశలో చర్య జరుపును)

$$\frac{\Delta P_1}{\Delta \cancel{t}} = -\frac{\Delta P_2}{\Delta \cancel{t}}$$

$$\Delta P_1 + \Delta P_2 = 0$$

$$\Rightarrow P = \text{స్థిరాంకము}$$

అనగా వ్యవస్థ పై బాహ్య బలము పని చేయునపుడు, ఆ వ్యవస్థ యొక్క ద్రవ్య వేగము స్థిరముగా ఉంటుందని అని అర్థము.

ప్రచోదనము మరియు ద్రవ్యవేగము :- అభిఘాతము t_1 వద్ద ప్రారంభమై t_2తో అంతము అగును అనుకొందాము. అభిఘాతమునకు పూర్వము వస్తువు పై పని చేయు బలము $F(t)$ శూన్యము. మరియు అభిఘాతము తరువాత వస్తువు పై పనిచేయు బలము కూడ శూన్యము.

$\therefore$ dt స్వల్ప కాలములో వస్తువు పై పనిచేయు బలము

$$F(t) = \frac{dp}{dt}$$

$\Rightarrow dp = F(t)\cdot dt$ అగును.

$\therefore$ అభిఘాత కాలములో ద్రవ్యవేగములో

మార్పు $= \Delta P = P_f - P_i$

$$\Delta P = \int_{t_2}^{t_1} dp$$

$$\Delta P = \int_{t_2}^{t_1} F(t)\cdot dt$$

పై విధముగా రేఖీయ ద్రవ్య వేగములో మొత్తము మార్పును "ప్రచోదనము'' అందురు.

2.6 ద్విమితీయ, త్రిమితీయ అభిఘాతములు :

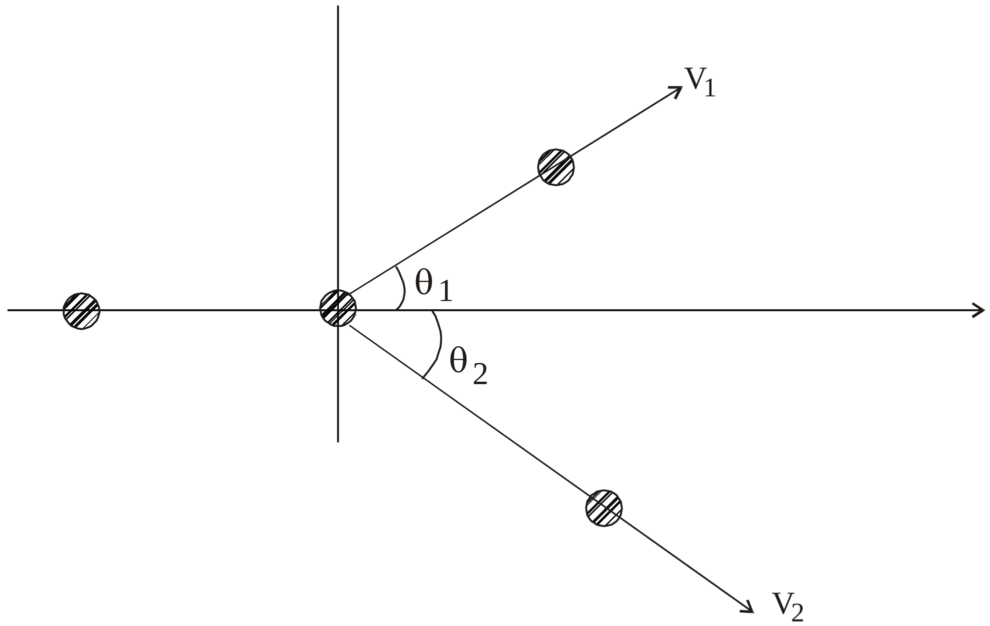
1. **ద్విమితీయ అభిఘాతము :** అభిఘాతమునకు పూర్వము, అభిఘాతమునకు తరువాత కణముల చలనములు ఒకే తలమునకు చెందిన అటువంటి అభిఘాతమును "ద్విమితీయ అభిఘాతము'' అందురు.

2. **త్రిమితీయ అభిఘాతము :** అభిఘాతములో కణముల చలన ఒకే తలమునకు చెందనటువంటి అభిఘాతమును "త్రిమితీయ అభిఘాతము'' అందురు.

ఈ రెండు అభిఘాతములను "ఏటవాలు అభిఘాతములు'' (oblique collisions) అందురు.

ద్విమితీయ అభిఘాతములు, శక్తి మరియు ద్రవ్యవేగ నిత్యత్వ నియమములను ఉపయోగించి, అభిఘాతము తరువాత కణముల చలనములను పూర్తిగా నిర్ధారింపలేము. ద్విమితీయ అభిఘాత సమస్యలో, మనము నాలుగు తెలియని రాశులను నిర్ధారింప వలయును. త్రిమితీయ అభిఘాత సమస్యలో మనము ఆరు తెలియని రాసులను నిర్ధారింపవలయును.

ద్విమితీయ స్థితిస్థాపక అభిఘాతములు : m_1 ద్రవ్యరాశి గల కణమును పరిగణింపుము. అది U_1 తొలి వేగముతో ప్రయాణించుచున్నది అనుకొనుము. m_2 ద్రవ్యరాశి గల నిశ్చల స్థితిలో ఉన్న మరొక కణము $(U_2 = 0)$తో అభిఘాతము నొందుచున్నది అనుకొనుము (చిత్రము **2.4**). అభిఘాతము తరువాత మొదటి కణము, θ_1 కోణములో పరిక్షేపణ చెందినది అనుకొనుము. రెండవ కణము θ_2 కోణముతో పరిక్షేపణ చెందినది అనుకొనుము. V_1 , V_2 లు అభిఘాతము తరువాత తుది వేగములు అనుకొనుము.



చిత్రము **2.4**

X – దిశలో ద్రవ్యవేగ నిత్యత్వ నియమమును ప్రయోగించగా,

$$m_1u_1 + 0 = m_1\ v_1\ \cos\theta_1 + m_2\,v_2\ \cos\theta_2$$

$$m_1\,u_1 = m_1\ v_1\ \cos\theta_1 + m_2\,v_2\ \cos\theta_2 \quad \text{-------------} \ (1)$$

Y – దిశలో ద్రవ్యవేగ నిత్యత్వ నియమమును ప్రయోగింపగా

$$0 + 0 = m_1\,v_1\ \sin\theta_1 - m_2v_2\ \sin\theta_2$$

$$m_1v_1\ \sin\theta_1 = m_2v_2\sin\theta_2 \quad \text{--------------------------} \ (2)$$

శక్తి నిత్యత్వ నియమమును ప్రయోగింపగా

$$\cancel{\frac{1}{2}}\ m_1\,u_1^2 + 0 = \cancel{\frac{1}{2}}\,m_1\,v_1^2 + \cancel{\frac{1}{2}}\,m_2v_2^2$$

$$m_1 u_1^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 \text{ ------------------- (3)}$$

ఇచ్చట v_1 , v_2 మరియు θ విలువలను $m_1 = m_2$ అను ప్రత్యేక సందర్భాలను ఉపయోగించి కనుగొనవచ్చును.

$\therefore$ (1) నుండి

$$\cancel{m} u_1 = \cancel{m} v_1 \cos\theta_1 + \cancel{m} v_2 \cos\theta_2$$

$$u_1 = v_1 \cos\theta_1 + v_2 \cos\theta_2 \text{ ----------- (4)}$$

(2) నుండి

$$\cancel{m} v_1 \sin\theta_2 = \cancel{m} v_2 \sin\theta_2$$

$v_1 \sin\theta_1 = v_2 \sin\theta_2$ ---------------- (5) ఇరువైపులా వర్గము చేయగా

$$v_1^2 \sin\theta_1 = v_2^2 \sin^2\theta_2 \text{ ------------- (6)}$$

(4) నుండి

$$(u_1 - v_1 \cos\theta_1) = v_2 \cos\theta_2$$

$$(u_1 - v_1 \cos\theta_1)^2 = v_2^2 \cos^2\theta_2 \text{ ----------- (7)}$$

$$u_1^2 + v_1^2 \cos^2\theta_1 - 2u_1 v_1 \cos\theta_1 = v_2^2 \cos^2\theta_2$$

(3) నుండి $u_1^2 = v_1^2 + v_2^2 \Rightarrow u_1^2 + v_1^2 - 2u_1 v_1 \cos\theta = v_2^2$ ....(8)

$$u_1^2 - v_1^2 = v_2^2 \text{..........(9)}$$

(8) - (9) $\Rightarrow 2v_1^2 - 2u_1 v_1 \cos\theta_1 = 0$

$$v_1^2 - u_1 v_1 \cos\theta_1 = 0$$

$$v_1 - u_1 \cos\theta_1 = 0$$

$$v_1 = u_1 \cos\theta_1 \text{ -------------- (10)}$$

(10)ని (8) నందు ఆదేశింపగా

$$v_2^2 = u_1^2 + u_1^2 \cos^2\theta_1 - 2u_1^2 \cos^2\theta_1$$

$$v_2^2 = u_1^2 - u_1^2 \cos^2\theta_1$$

$$v_2{}^2 = u_1{}^2\left[1-\cos^2\theta_1\right]$$

$$v_2{}^2 = u_1{}^2 \times \sin^2\theta_1$$

$$v_2 = u_1 \sin\theta_1$$

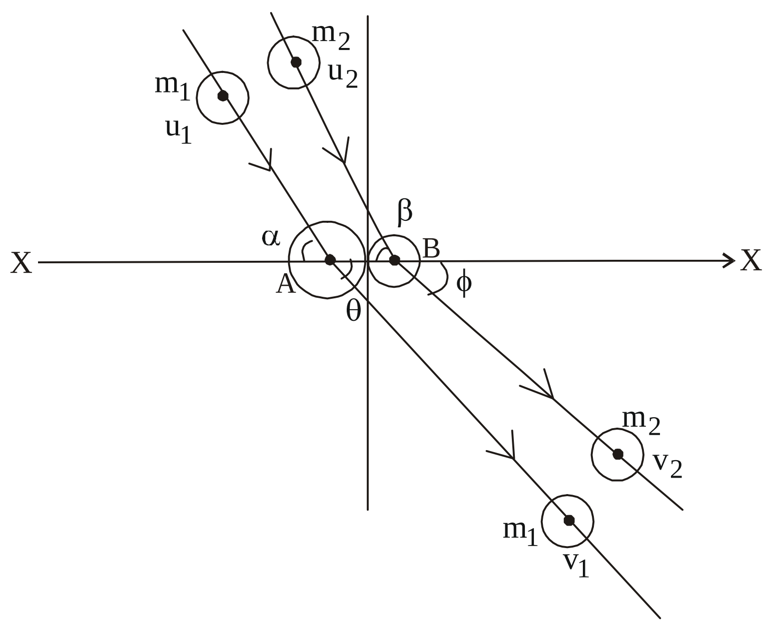
ద్విమితీయ ఏటవాలు అభిఘాతములు (Elastic Oblique Collisions) :

అభిఘాతము నొందు రెండు వస్తువుల ద్రవ్యరాశి కేంద్రములు అభిఘాత రేఖ వెంబడే చలించకుండా ఉన్నట్లయితే అటువంటి అభిఘాతమును "ద్విమితీయ అభిఘాతము" అందురు. m_1, m_2 ద్రవ్యరాశులు గల రెండు, పరిపూర్ణ, సన్నని గోళములను పరిగణింపుము. ఈ గోళములు u_1 , u_2 తొలి వేగములతో కదలుచున్నవి అనుకొనుము. అభిఘాతము తరువాత అవి v_1 , v_2 తుది వేగములతో కదలుచున్నవి అనుకొనుము. అభిఘాతము జరుగు సమతలములో గోళ కేంద్రములను కలుపు రేఖ $X-$ దిశలో తీసికొనబడినది అనుకొనుము మరియు గోళముల ఉమ్మడి స్పర్శ రేఖ $Y-$ దిశలో తీసుకొనబడినది అనుకొనుము. అభిఘాతము ముందు మొదటి గోళములో α కోణము, రెండవ కోళముతో β కోణాన్ని చేయుచున్నది అనుకొనుము. ఆ గోళములు అభిఘాతము తరువాత $X-$ దిశలో θ , ϕ కోణములు చేయుచున్నవి అనుకొనుము(చిత్రము 2.5).

వ్యవస్థ పై పనిచేయు అభిఘాత మొత్తము బలము గోళ కేంద్రములను కలుపు రేఖ పై పనిచేయును. అనగా $X-$ దిశలో పనిచేయును అనుకొనుము. కాని $Y-$ దిశలో అభిఘాత బలము పనిచేయదు. $Y-$ దిశలో అభిఘాత బలము పని చేయకపోవుటచే, $X-$ దిశలో వేగాంశములు అభిఘాతమునకు పూర్వము, అభిఘాతమునకు తరువాత స్థిరంగా ఉంటాయి.

$v_1 \sin\theta = u_1 \sin\alpha$ ---------- (1)

$v_2 \sin\phi = u_2 \sin\beta$ --------- (2)



చిత్రము 2.5

న్యూటన్ ప్రయోగ సూత్రము ప్రకారము

$$v_2 \cos\phi - v_1 \cos\theta = u_1 \cos\alpha - u_2 \cos\beta \text{ ----------- (3)}$$

ద్రవ్యవేగ నిత్యత్వ నియమము ప్రకారము

$$m_1 v_1 \cos\theta + m_2 v_2 \cos\phi = m_1 u_1 \cos\alpha + m_2 u_2 \cos\beta \text{ ....(4)}$$

(3)ను m_1తో గుణించి (4)వ సమీకరణమునకు కూడిన

$$\begin{array}{l} m_1 v_2 \cos\phi - m_1 v_1 \cos\theta = m_1 u_1 \cos\alpha - m_1 u_2 \cos\beta \\ \underline{m_2 v_2 \cos\phi + m_1 v_1 \cos\theta = m_1 u_1 \cos\alpha + m_2 u_2 \cos\beta} \\ (m_1 + m_2) v_2 \cos\phi = 2 m_1 u_1 \cos\alpha + (m_2 - m_1) u_2 \cos\beta \end{array}$$

$$\therefore v_2 \cos\phi = \frac{2m_1}{(m_1+m_2)} u_1 \cos\alpha + \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1+m_2)} u_2 \cos\beta \text{ ----------- (5)}$$

(2), (5)లను వర్గము చేసి కూడి, v_2ను కనుగొనవచ్చును.

(3)ను m_2తో గుణించి (4)వ సమీకరణమునకు కూడిన

$$m_2 v_2 \cos\phi - m_2 v_1 \cos\theta = m_2 u_1 \cos\alpha - m_2 u_2 \cos\beta \text{ ------------ (6)}$$

$$(6) - (4) \Rightarrow \begin{array}{l} m_2 v_2 \cos\phi - m_2 v_1 \cos\theta = m_2 u_1 \cos\alpha - m_2 u_2 \cos\beta \\ \underline{m_2 v_2 \cos\phi + m_1 v_1 \cos\theta = m_1 u_1 \cos\alpha + m_2 u_2 \cos\beta} \\ -[m_1 + m_2] v_1 \cos\theta = (m_2 - m_1) u_1 \cos\alpha - 2 m_2 u_2 \cos\beta \end{array}$$

$$\therefore [m_2 + m_1] v_1 \cos\theta = (m_1 - m_2) u_1 \cos\alpha + 2 m_2 u_2 \cos\beta$$

$$v_1 \cos\theta = \frac{2m_2}{(m_1+m_2)} u_2 \cos\beta + \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1+m_2)} u_1 \cos\alpha$$

ప్రత్యేక సందర్భములు :-

(1) రెండవ కణము విరామ స్థితిలో ఉన్నప్పుడు $[(u_2) = 0]$ (2)వ సమీకరణము నుంచి

$$v_2 \sin\phi = 0$$

i.e. $\phi = 0$ అనగా రెండవ గోళము అభిఘాతము తరువాత గోళ కేంద్రములను కలుపు రేఖ వెంబడే కదలును.

(2) $m_1 = m_2$ అయిన

$$v_1 \cos\theta = u_2 \cos\beta$$

$$\& \ v_2 \cos\phi = u_1 \cos\alpha$$

అనగా గోళముల వేగములు గోళ కేంద్రములను కలుపు రేఖ వెంబడే తారుమారగును.

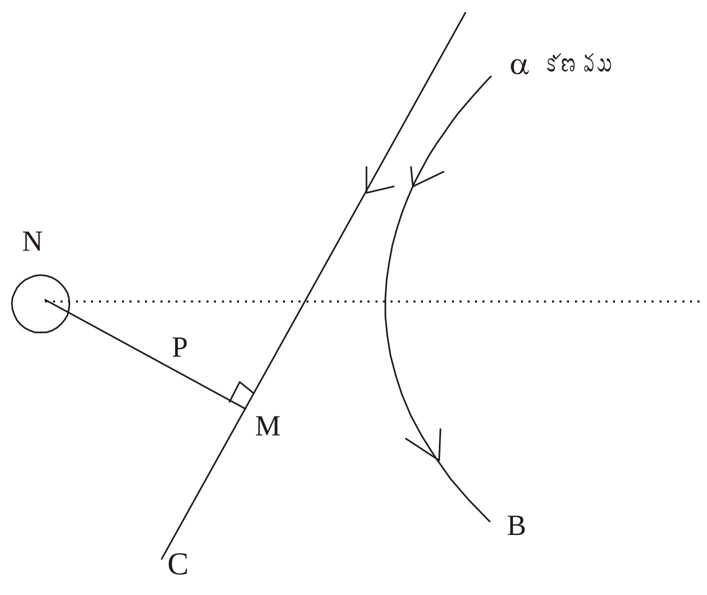
(3) $m_1 = m_2$ మరియు $U_2 = 0$

అయిన

$\left.\begin{array}{r}\phi = 0^0 \\ \& \ \theta = 90^0\end{array}\right\}$ అగును. అభిఘాతముల తరువాత రెండు గోళములు ఒకదానికొకటి లంబకోణ మార్గములో ప్రయాణించును.

2.7 అభిఘాత పరామితి భావన

పరిక్షేపణ మధ్యచ్ఛేద భావన, అభిఘాత పరామితి భావన

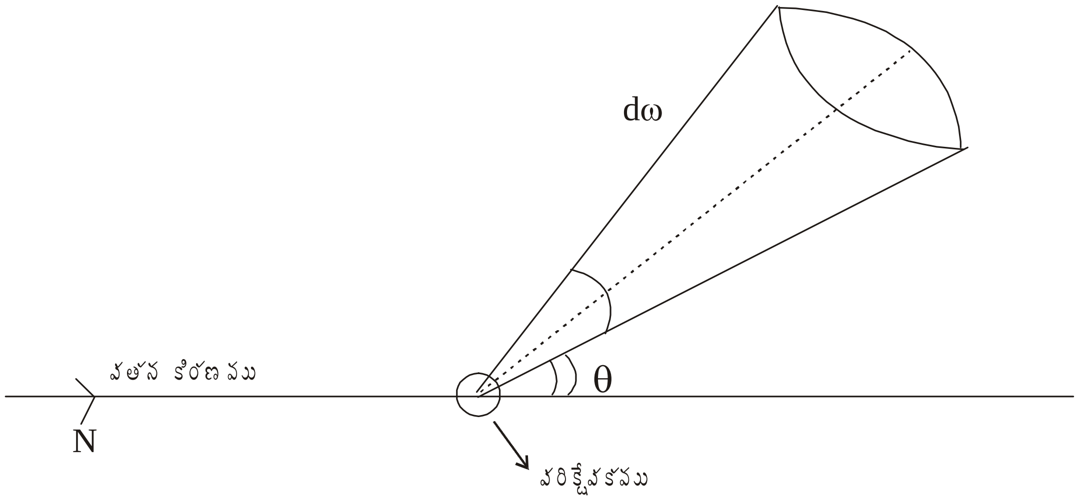


చిత్రము 2.6

పటము 2.6లో చూపిన విధముగా ధనావేశ పూరిత α - కణమును పరిగణింపుము. ఇది భారయుతమైన పరమాణు కేంద్రకము (N)ను సమీపించుచున్నది అనుకొనుము. కులూంబ్ వికర్షణ బలము AB అని అతిపరావలయ మార్గమును అనుసరించును. వికర్షణ బలము లేనపుడు, అది తిన్నగా AC మార్గమును అనుసరించును. AC దిశలో N యొక్క లంబ దూరము = P అనుకొనుము. NM = P = అభిఘాత పరామితి.

పరమాణు కేంద్రకము (N)కు, దానిని సమీపించు ధనావేశ పూరిత కణమునకు గల లంబ దూరమును "అభిఘాత పరామితి" అందురు.

పరిక్షేపణ మధ్యచ్ఛేదము



చిత్రము 2.7

చిత్రము 2.7లో చూపిన విధముగా పలుచని లోహపు రేకులో కొన్ని α కణము పరిక్షేపించుట జరిగినది అనుకొనుము. ఆ కణములు వేర్వేరు దిశలలో పరిక్షేపణ చెందును. N అనునది ఏకాంక కాలములో ఏకాంక తలము గుండా ప్రసరించు కణముల సంఖ్య అనుకొందాము. ఇవి ప్రసరణ దిశకు లంబముగా ప్రయాణించుచున్నవి అనుకొనుము. ఏకాంక కాలములో $d\omega$ ఘన కోణముతో పరిక్షేపణ చెందు కణముల సంఖ్య dN అనుకొమును.

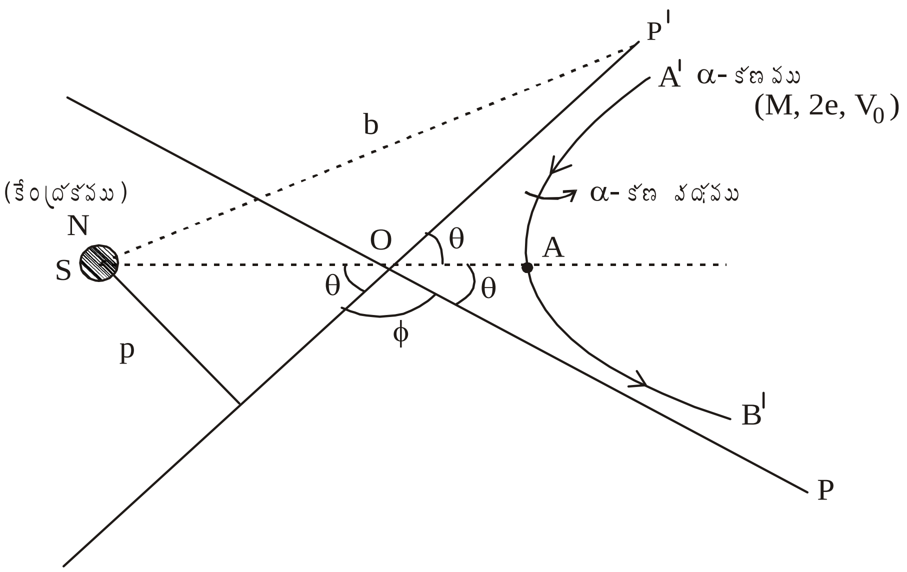
$\therefore \left(\dfrac{dN}{N}\right)$ ను "పరిక్షేపణ మధ్యచ్ఛేదము" అందురు.

అనగా ఏకాంక కాలములో ఘన కోణముతో పరిక్షేపణ చెందు కణముల సంఖ్య (dN)కు, పతన తీవ్రత (N) కు గల నిష్పత్తిని "పరిక్షేపణ మధ్యచ్ఛేదము" అందురు.

2.8 రూథర్‌ఫర్డ్ α - పరిక్షేపణము

Ze విద్యుదావేశము గల కేంద్రకమును పరిగణింపుము. ఇందు Z పరమాణు సంఖ్య. కేంద్రకము (N) నిశ్చల స్థితి యందున్నది అనుకొనుము. M ద్రవ్యరాశి, Ze విద్యుదావేశము, V_0 తొలివేగము గల α - కణమును పరిగణింపుము. α-కణము పటము 2.7లో చూపిన విధముగా $A'O$ దిశ వెంబడే ప్రయాణించుచున్నది అనుకొనుము. α - కణము, కేంద్రకము (N)ను సమీపించు కొలది, దానిపై వికర్షణ బలము పని చేయును. తత్ఫలితముగా α - కణ వేగము తగ్గును. వికర్షణ బలాలు లేనపుడు, α - కణము సరళ రేఖ మార్గము వెంబడే పయనించును. వికర్షణ బలము వలన $A'B'$ అను అతి పరావలయ

మార్గమును అనుసరించును. $P'O$, PO లు అతి పరావలయపు అనంత స్పర్శరేఖలు α కణ తొలిదిశతో కేంద్రకమునకు గల లంబ దూరము $= \phi$ అనుకొనుము. దీనినే "అభిఘాత పరామితి" అందురు.



చిత్రము 2.8

పటము నుండి ϕ పరిక్షేపణ కోణము.

పరిక్షేపణ కోణము (ϕ)కు సమీకరణమును రాబట్టుట

మొట్ట మొదట α - కణము, కేంద్రకము (N)ను సూటిగా సమీపించును అనుకొనిన $P=0$ అగును. ఈ సందర్భములో వికర్షణ బలము వలన కేంద్రము (N) నుండి b దూరములో α - కణము ఆగిపోవును మరియు అదే మార్గములో వెనుదిరుగును. i.e. $\phi=180^0$ అగును. bను అతి సమీప దూరము A అనునది అతిపరావలయమునకు శీర్షము. $\alpha-$ కణము, కేంద్రకమును గతిజ శక్తి, స్థితిజ శక్తికి సమానము అగువరకు సమీపించును.

$$\text{i.e. } \frac{1}{2}MV_0^2 = \frac{2ze^2}{b}$$

$$MV_0^2 = \frac{4ze^2}{b}$$

$$bMV_0^2 = 4ze^2 \text{ ------------- (1)}$$

అతి సమీప దూరము (b)ని నిర్ధారించుట :- A వద్ద α - కోణమునకు శక్తినిత్యత్వ నియమమును ప్రయోగింపగా,

$$\frac{1}{2}MV_0^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{2ze^2}{(SA)^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{(SA)}$$

$$\frac{1}{2}MV_0{}^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{2ze^2}{SA}.$$

$$MV_0{}^2 = MV^2 + \frac{4ze^2}{(SA)}$$

(1)వ సమీకరణము నుంచి $bMV_0{}^2 = 4ze^2$

$$\cancel{M}V_0{}^2 = \cancel{M}V^2 + \frac{b\cancel{M}V_0{}^2}{(SA)}$$

$$V_0{}^2 = V^2 + \frac{bV_0{}^2}{SA}$$

$$V_0{}^2\left[1 - \frac{b}{(SA)}\right] = V^2$$

$$\frac{V^2}{V_0{}^2} = \left[1 - \frac{b}{SA}\right] \text{ ----------- (2)}$$

ద్రవ్యవేగ నిత్యత్వ నియమమును ప్రయోగింపగా

$$\cancel{M}V_0P = \cancel{M}V(SA)$$

$$v_0^2 p^2 = v^2 (SA)^2$$

$$\frac{P^2}{(SA)^2} = \frac{v^2}{v_0^2} \text{ .... (3)}$$

$\therefore$ (2), (3)ల నుండి

$$\frac{P^2}{(SA)^2} = \left[1 - \frac{b}{(SA)}\right]$$

$$P^2 = (SA)^2\left[1 - \frac{b}{(SA)}\right]$$

$$P^2 = \left[(SA)^2 - b(SA)\right] \text{ ------- (4)}$$

కాని పటము నుండి $SA = SO + OA$

$$SA = SO\left[1 + \frac{OA}{SO}\right]$$

కాని $\frac{OA}{SO} = \frac{1}{e} = \frac{1}{\sec\theta} = \cos\theta$ ఇందు e ఉత్కేంద్రత అని తెలుసు.

$\therefore SA = SO[1+\cos\theta]$

$SA = SO \times 2\cos^2 \theta/2$

కాని పటము నుండి $\sin\theta = \frac{P}{SO}$

$\Rightarrow SO = P/\sin\theta$

$SO = \frac{P}{2\sin\theta/2 \ \cos\theta/2}$

$\therefore SA = \frac{P}{\cancel{2}\ \sin\theta/2 \ \cancel{\cos\theta/2}} \ \cancel{2}\cos^{\cancel{2}}\theta/2$

$SA = P \cdot \cot\theta/2$

$\therefore$ SA విలువను ప్రతిక్షేపించగా

$P^{\cancel{2}} = \left[P^{\cancel{2}}\cot^2\theta/2 - b\,\cancel{P}\cot\theta/2\right]$

$P = \left[P\cot^2\theta/2 - b\cot\theta/2\right]$

$\left[P - P\cot^2\theta/2\right] = -b\cot\theta/2$

$b\cot\theta/2 = P\left[\cot^2\theta/2 - 1\right]$

$b = P\left[\cot\theta/2 - \tan\theta/2\right]$

$b = P\left[\frac{\cos\theta/2}{\sin\theta/2} - \frac{\sin\theta/2}{\cos\theta/2}\right]$

$b = P\frac{\left[\cos^2\theta/2 - \sin^2\theta/2\right]}{\sin\theta/2\ \cos\theta/2} \times \frac{2}{2}$

$b = P \times \frac{2\cos\theta}{\sin\theta}$

$b = 2P\cot\theta$ ------------ (5)

కాని పటము నుండి $2\theta + \phi = 180^0$

$$2\theta = \left(180^0 - \phi\right)$$

$$\theta = \left(90^0 - \frac{\phi}{2}\right)$$

θ విలువను (5)లో ప్రతిక్షేపించిన

$$b = 2P\cot\left(90^0 - \frac{\phi}{2}\right)$$

$$b = 2P\ \tan\frac{\phi}{2}$$

ఇదే పరిక్షేపణ కోణమునకు గల సమాసము.

2.9 సాధించవలసిన సమస్యలు

1. 20 కి.గ్రా. ద్రవ్యరాశి గల రాకెట్ నందు 180 కేజీల ఇంధనం ఉన్నది. వేడి వాయువు నిర్గమ వడి 1.6 కి.మీ./సె. అయిన రాకెట్ భూమి నుండి పైకి ఎగురుటకు కావలసిన కనీసపు ఇంధనము ఖర్చు రేటు ఎంత?

రాకెట్ మొత్తం ద్రవ్యరాశి = (20+180) = 200 కేజి

వేడి వాయువుల నిర్గమ వడి = $1.6\,Km/sec$

$$= 1.6 \times 10^3 = 1600 m/sec$$

ఇంధనము ఖర్చుగురేటు = $\left(\frac{dM}{dt}\right)$ అనుకొనుము.

$$\left(\frac{dM}{dt}\right) \cdot U = Mg$$

$$\left(\frac{dM}{dt}\right) = \frac{Mg}{U}$$

$$= \frac{200 \times 9.8}{1600}$$

$$= 1.225 Kg/sec$$

2. 6000 కేజీల ద్రవ్యరాశి గల రాకెట్టు నిట్టనిలువుగా దగ్ధము చేయునట్లు ఉంచబడినది. వేడి వాయువుల నిర్గమ వడి 1000 మీ/సె. అయిన రాకెట్ భారమును అధిగమించి, కావలసిన అభిబలము పొందుటు బహిర్గతమగు వాయువుల ద్రవ్యరాశి రేటు ఎంత? రాకెట్‌కు 20మీ/సె^{2} తొలి త్వరణము పొందునట్లు చేయవలయునన్న బహిర్గతమగు వేడివాయువుల ద్రవ్యరాశి రేటు ఎంత?

సాధన : (ఎ) రాకెట్ ద్రవ్యరాశి $M = 6000Kg$

ఇంధనము ఖర్చు రేటు = $\left(\frac{dM}{dt}\right)$ అనుకొనుము

$U\left(\frac{dM}{dt}\right) = Mg$ అని మనకు తెలియును.

$$\left(\frac{dM}{dt}\right) = \frac{Mg}{U}$$

$$\left(\frac{dM}{dt}\right) = \frac{6000 \times 9.8}{1000} \text{ Kg/sec} = 58.8 \text{ Kg/sec}$$

(బి) రాకెట్ మీద పనిచేయు అభిబలము (thrust) అనునది రాకెట్ భారము మరియు త్వరణమునకు కావలసిన బలముల బలముల మొత్తమునకు సమానము.

రాకెట్ మీద పనిచేయు అభిబలము (thrust) = రాకెట్ భారము + కావలసిన బలము

$$U\left(\frac{dM}{dt}\right) = Mg + Ma$$

$$U\left(\frac{dM}{dt}\right) = M(g + a)$$

$$\left(\frac{dM}{dt}\right) = \frac{M(g + a)}{U}$$

$$\left(\frac{dM}{dt}\right) = \frac{6000(98 + 20)}{1000} = 178.8 \text{ Kg/sec}.$$

3. ఒక రాకెట్ ఒక సెకను కాలంలో 0.02 కేజీల ద్రవ్యరాశి గల ఇంధనమును దగ్ధము చేయును. ఇంధనమును దగ్ధము చేయగా 10^4 మీ/సె వేగముతో వేడివాయువులు బహిర్గతమగుచున్నవి. అయిన రాకెట్‌పై పనిచేయు అభిబలము ఎంత?

ఇంధనము దగ్ధమగు రేటు = $\left(\frac{dM}{dt}\right) = 0.02 \text{ Kg/sec}$

$$u = 10^4 \text{ m/sec}$$

అభిబలము = $u\left(\frac{dM}{dt}\right)$

$$= 10^4 \times 0.02 = 200N$$

4. 0.5ötr • ãÎ¼ŒE Q® =‹ ºëô0.6 m వ్యాసార్థము గల వృత్తాకార మార్గము వెంబడే ప్రయాణించుచున్నపుడు దాని వడి 0.1 మీ/సె^{2} స్థిరరేటుతో పెరుగుచున్నది. అయిన దానిపై పనిచేయు టార్క్ ఎంత?

వస్తువు ద్రవ్యరాశి = $m = 0.5Kg$

వృత్తాకారమార్గ వ్యాసార్థము = $r = 0.6m$

ప్రయోగించబడిన టార్క్ = $\vec{\tau}$ అనుకొనుము.

త్వరణము $a = 0.1\ m/sec^2$

ప్రయోగించబడిన టార్క్ = $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$

$$\vec{\tau} = \frac{d}{dt}(mvr) \qquad \left[\because \vec{L} = mvr\right]$$

$$\vec{\tau} = mr\left(\frac{dV}{dt}\right)$$

$$\vec{\tau} = 0.5 \times 0.6 \times 0.1$$

$$\vec{\tau} = 0.03N - m$$

5. ఒక మరతుపాకి 50 గ్రాముల తుపాకి గుండ్లను 1000 మీ/సె వేగముతో పేల్చును. ఒక వ్యక్తి తుపాకిని తన చేతులలో ఉంచుకొని పేల్చినపుడు, తుపాకితో 180 న్యూటన్లు (రికాయిల్) బలము పనిచేసినది. అయిన 1 నిముషములో ఆ వ్యక్తి పేల్చు తుపాకి గుండ్ల సంఖ్య ఎంత?

ఒక్కొక్క తుపాకి గుండు ద్రవ్యరాశి = $m = 50$ గ్రా

$m = 50 \times 10^{-3}$ కి.గ్రా.

$m = 5 \times 10^{-2}$ కి.గ్రా.

ఒక్కొక్క తుపాకి గుండు వేగము = $v = 1000\,m/sec$

తుపాకి మీద పనిచేయు రికాయిల్ బలం = $F = 180N$

ఒక సెకను కాలములో ఆ వ్యక్తి పేల్చు తుపాకి గుండ్ల సంఖ్య = n అనుకొనుము.

$$\therefore F = \frac{m(v-u)}{dt} \times n$$

$$180 = \frac{5 \times 10^{-2} \times 1000 \times n}{1}$$

$$\therefore n = \frac{180}{50}$$

$n = 3.6$ తుపాకి గుండ్లు/సె

$\therefore$ ఆ వ్యక్తి పేల్చు తుపాకి గండ్ల సంఖ్య 1 నిముషములో = 3.6 × 60 = 216

2.10 సారాంశము

న్యూటన్ గమన నియమములు విశదీకరింపబడినవి. చర ద్రవ్యరాశి వ్యవస్థ యొక్క చలనము, వ్యవస్థ పై పనిచేయు బాహ్య బలమునకు సమీకరణమును రాబట్టుట, రాకెట్ యొక్క వేగమునకు సమీకరణమును రాబట్టడమైనది. రాకెట్ యొక్క వివిధ దశలను వివరించడమైనది. ద్విమితీయ అభిఘాతములలో అభిఘాతము నొందు వస్తువుల తుది వేగములకు సమీకరణములు రాబట్టడమైనది. అభిఘాత పరామితి, పరిక్షేపణ మధ్యచ్ఛేదములను వివరించడమైనది. రూథర్‌ఫర్డ్ పరిక్షేపణ కోణమునకు సమీకరణమును ఉత్పాదించడమైనది.

2.11 కీలక పదాలు

వత్తిడి (Thrust) , సాపేక్ష వేగము, తొలి వేగము (v_0), ద్రవ్యవేగములో మార్పు (ΔP), పరిక్షేపణ కోణములు (θ_1, θ_2), α, β ప్రత్యావర్తన కోణములు, అభిఘాత పరామితి (P), పరమాణు కేంద్రకము (N), స్వల్ప ఘన కోణము, అభిఘాత పరామితి (b), పరిక్షేపణ కోణము (ϕ), ఉత్కేంద్రత (e), పరమాణు సంఖ్య (Z).

2.12 స్వయం సమీక్షా ప్రశ్నలు

1. న్యూటన్ గమన నియమములను ప్రతిపాదించి వివరించండి.
2. చరద్రవ్యరాశి వ్యవస్థను వివరించండి. బాహ్య బలమునకు సమీకరణాన్ని రాబట్టండి.
3. రాకెట్ పనిచేయు సూత్రమును వివరించండి. రాకెట్ తక్షణ వేగమును కనుగొను సూత్రమును రాబట్టండి.
4. రాకెట్ పనిచేయు అభిలంబ బలమునకు సూత్రమును రాబట్టండి.
5. మూడంచెల రాకెట్ మాత్రమే గురుత్వ క్షేత్రమును వదలిపోగలదని చూపండి.
6. ద్విమితీయ అభిఘాతమును నిర్వచించండి. ద్విమితీయ ఏటవాలు అభిఘాతములో పాల్గొన్న వస్తువుల తుది వేగాలకు సమీకరణాలను రాబట్టండి.
7. అభిఘాత పరామితని నిర్వచించండి. పరిక్షేపణ మధ్యచ్ఛేదమును నిర్వచించి, రూథర్‌ఫర్డ్ పరిక్షేపణతో పరిక్షేపణ కోణమునకు సమీకరణమును రాబట్టండి.

అభ్యాసము

1. 2 సె.మీ., 3 సెం.మీ. వ్యాసార్థములు గల ఉక్కు గోళములు 24మీ/సె వేగములతో వ్యతిరేక దిశలలో ముఖాముఖి అభిఘాతము నొందుచున్నవి. అభిఘాతము, స్థితిస్థాపక అభిఘాతము అయిన అభిఘాతము తరువాత గోళముల తుది వేగములను కనుగొనుము? (జవాబు : $-50.05\ \mathrm{cm/sec}$)

2. 0.03 కి.గ్రా. ద్రవ్యరాశి గల వస్తువు 0.08 మీ/సెకను వేగముతో ప్రయాణించుచు నిశ్చల స్థితిలో వున్న 0.05 కి.గ్రా ద్రవ్యరాశి గల వస్తువుతో స్థితిస్థాపక అభిఘాతము నొందినది. అభిఘాతము తరువాత వస్తువుల తుదివేగములు ఎంతెంత?

(జవాబు : $\begin{bmatrix} v_1 = -0.02\,\mathrm{m/sec} \\ v_2 = 0.06\,\mathrm{m/sec} \end{bmatrix}$)

3. 1 కి.గ్రా ద్రవ్యరాశి గల రాయిని ఒక తీగను ఒక చివర కట్టి, రెండవ చివర సెకను కాలంలో 2 భ్రమణములు చేయించినారు. తీగ పొడవు = 50 సెం.మీ. అయిన రాయి యొక్క మొత్తము కోణీయ ద్రవ్యవేగము ఎంత?

(జవాబు : $3.14\,\mathrm{Joule/sec}$)

4. 4 కేజీల ద్రవ్యరాశి గల వస్తువు 20 మీ/సెకను వేగముతో ప్రయాణించుచు, 12 కేజీల ద్రవ్యరాశి, వ్యతిరేక దిశలో 40 మీ/సె వేగముతో ప్రయాణించుచున్న మరొక వస్తువును గ్రుద్దుకొన్నది. గ్రుద్దుకొనిన పిదప అవి అతుక్కొని ప్రయాణించిన, వాని ఉమ్మడి వేగము ఎంత? (జవాబు : $2.5\,\mathrm{m/sec}$)

2.13 చదువదగిన గ్రంథాలు

1. Mechanics by D.S. Mathur
2. Mechanics by J.C. Upadhayaya
3. Mechanics by Bhargava and Sarma
4. The Feynman Lectures on Physics
5. Mechanics by S.P. Strelkov
7. Unified Physics by S.L. Gupta and Sanjeev Gupta
8. mechanics by C. murali Mohan Sastry, K. Shanker Rao and P. Babu Rao

ప్రయోగము : 2

సంవర్గమాన క్షీణత

ఉద్దేశము : గాలిలో, నీటిలో కంపించుచున్న వృత్తాకార పలక సంవర్గమాన క్షీణతను కనుగొనుట.

పరికరములు : వివోటన లోలకము, నీటి బీకరు, ఆపు గడియారము, లాంప్-స్కేలు అమరిక.

సిద్ధాంతము : అవరుద్ధ లోలకమునకు సమాసము

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+r\frac{dx}{dt}+Sx=0$$

కంపించు వస్తువు కంపెనీ పరిమితి క్షీణిస్తూ ఉంటుంది. $a_1, a_2, a_3, \cdots$ వరుస కంపన పరిమితులైనచో

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}=\frac{a_3}{a_4}=\cdots\cdots=K.$$

K ను క్షీణత అందురు.

సంవర్గమాన క్షీణత $\lambda=\log_e K$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}=\frac{a_3}{a_4}\cdots\cdots=e^{\lambda}$$

అప్పుడు

$$\frac{a_1}{a_{2n+1}}=e^{n(2\lambda)}$$

a_{2n+1} అనగా n కంపనాల తర్వాత కంపన పరిమితి.

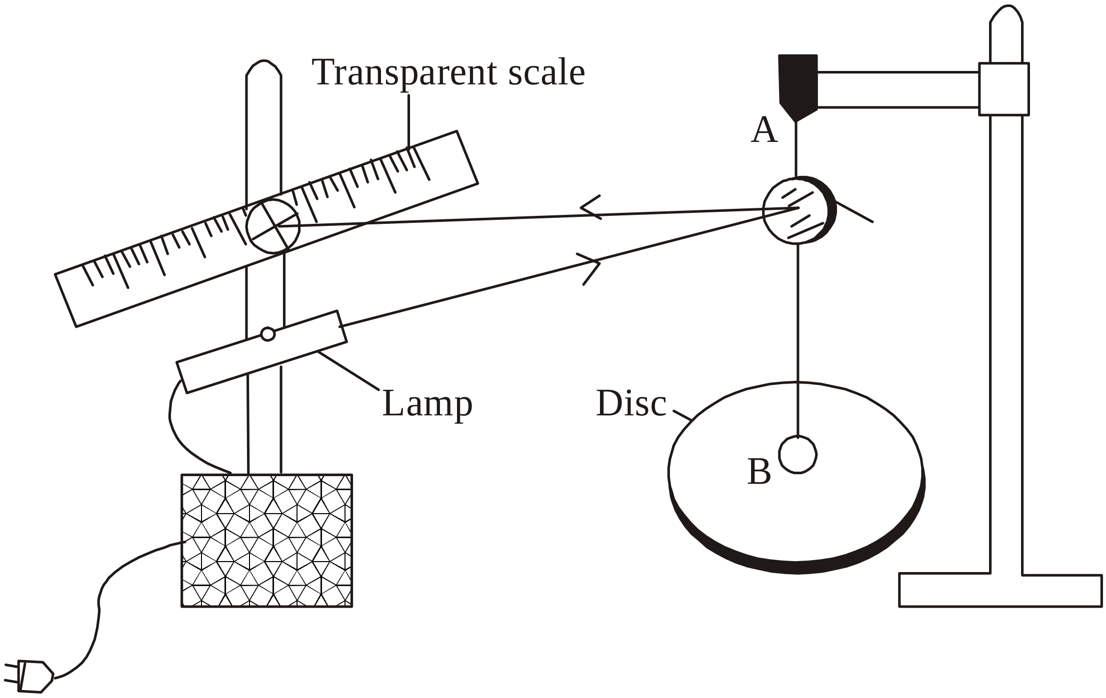
$$\log_e a_1-\log_e\left(a_{2n+1}\right)=2n\lambda$$

$$\therefore \lambda=\frac{\log_e a_1-\log_e a_{2n+1}}{2n}$$

$$\therefore \lambda=\frac{2.303\left(\log a_1-\log a_{2n+1}\right)}{2n}$$

పద్ధతి : వివోటన లోలకము దారమునకు అతికించిన పుటాకార దర్పణము పైన విద్యుద్దీపము కాంతి పడునట్లు చేసి, పరావర్తన ప్రతిబింబమును స్కేలుపై మధ్య బిందువు వద్ద పడునట్లు చేయవలెను. వృత్తాకార బిళ్ళను కొద్దిగా కోణీయ స్థాన అంశము కలిగించి వదలలేను. అది కోణీయ కంపనాలు చేయును. స్కేలుపై అడ్డుతీగల ప్రతిబింబము అటూ ఇటూ కదులును. ఒక వైపున వరుస కంపన పరిమితులు గుర్తించి పట్టికలో పొందుపరచవలెను.

పలకను నీటిలో ముంచి, ప్రయోగము మరల చేయవలెను.



పరిశీలనలు :

1) గాలిలో :

వరుస సంఖ్య	మొదటి కంపన పరిమితి a_1	కంపనాల సంఖ్య (n)	nవ కంపన పరిమితి a_{2n+1}	$\lambda = \frac{(\log a_1 - \log a_{2n+1})}{2n} \times 2.303$

2) నీటిలో :

వరుస సంఖ్య	మొదటి కంపన పరిమితి a_1	కంపనాల సంఖ్య (n)	nవ కంపన పరిమితి a_{2n+1}	$\lambda = \frac{(\log a_1 - \log a_{2n+1})}{2n} \times 2.303$

ఫలితము : λ(గాలిలో) =

λ(నీటిలో) =

జాగ్రత్తలు : 1) పలక శుద్ధ కోణీయ కంపనాలు చేయవలెను.

2) నీటిలో పలక పాత్ర గోడలను తాకరాదు.

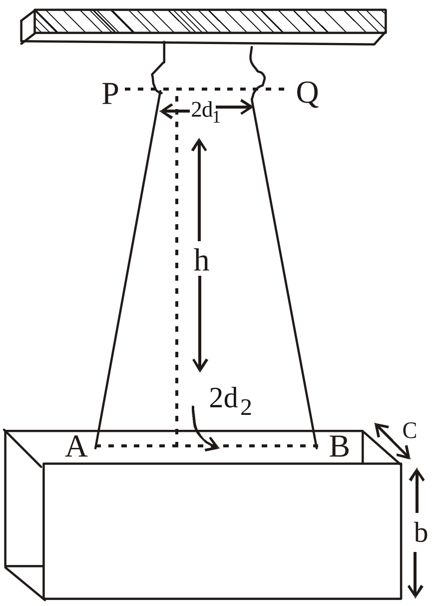
ప్రయోగము - 3

జడత్వ భ్రామకము

ఉద్దేశము : ద్వితంతు అవలంబన పద్ధతిన ఒక క్రమాకార వస్తువు జడత్వ భ్రామకమును కనుగొనుట.

పరికరములు : ద్వితంతు అవలంబన పరికరము, ఆపు గడియారము, వెర్నియర్ కాలిపర్స్

వర్ణన : ద్వితంతు అవలంబన పరికరములో20 సెం.మీ. పొడవు, 10 సెం.మీ. వెడల్పు, 0.5 సెం.మీ. మందము గల బరువైన లోహపు పలక ఉండును. ప్రతి ముఖములో కేంద్రమునకు రెండు వైపుల రెండు రంధ్రములుంటాయి. ఆ రంధ్రములలో చెక్‌నట్‌లను బిగించి లోహపు పలకను రెండు దారము (తీగ)ల ద్వారా వ్రేలాడదీయవచ్చును. లోహపు పలకను ఏ ముఖము పరంగానైనా, వ్రేలాడదీసి, కోణీయ కంపనములు చేయవచ్చును.



సిద్ధాంతము : ద్వితంతు అవలంబమును క్రొద్దిగా మెలితిప్పి, వదలిన అది నిలువు అక్షపరముగా, కోణీయ కంపనాలు చేస్తుంది. దాని ఆవర్తన కాలము

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Ih}{Mg\,d_1\,d_2}}$$

I = పలక జడత్వ భ్రామకము (భ్రమణాక్షము పరముగా)

h = వ్రేలాడదీసిన బిందువులకు, పలకకు మధ్య దూరము

d_1 = వ్రేలాడదీసిన బిందువుల మధ్య దూరములో సగము

d_2 = దారముల క్రింది చివరల మధ్య దూరములో సగము

$\therefore I = \frac{Mg}{4\pi^2} \cdot \frac{T^2 d_1 d_2}{h}$ ఈ సూత్రమును ఉపయోగించి వస్తువు జడత్వ భ్రామకమును కనుగొనవచ్చును.

పద్ధతి : ముందు లోహపు పలక ద్రవ్యరాశిని కనుగొనవలెను. ఇప్పుడు పలకను పొడవు, వెడల్పు తలము పరముగా రెండు సమాన పొడవు గల దారములతో వ్రేలాడదీయవలెను. పలకను కొద్దిగా మెలిత్రిప్పి, వదిలిన అది కంపనాలు చేయును. 20 డోలనములకు పట్టు కాలమును రెండుసార్లు కనుగొని, సరాసరి లెక్కించి, డోలనావర్తన కాలము (T) లెక్కించాలి. దారముపై చివరి కొనల మధ్య దూరము ($2d_1$), కింది కొనల మధ్య దూరము ($2d_2$) మరియు వ్రేలాడదీసిన బిందువులకు, పలకకు మధ్య దూరము (h) కొలవాలి. జడత్వ భ్రామకము లెక్కించాలి. వేరు వేరు విలువలకు ప్రయోగము చేసి, పట్టికలో పొందుపరచవలెను. ఇదే విధముగా పలక తలమును మారుస్తూ ప్రయోగము మరల చేయవలెను.

ప్రయోగాత్మక జడత్వ భ్రామక విలువలను, సైద్ధాంతిక విలువలు

$I_1 = \frac{M\left[a^2+b^2\right]}{12}$, $I_2 = \frac{M\left[b^2+c^2\right]}{12}$, $I_3 = \frac{M\left[a^2+c^2\right]}{12}$తో పోల్చవలెను. a అనగా పలకపొడవు, b అనగా వెడల్పు, c అనగా మందము.

పరిశీలనలు : లోహపు ద్రవ్యరాశి $(M) = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots gm$

పట్టిక - 1

వ.సం.	వస్తువు వ్రేలాడ దీసిన విధము	h	$2d_1$	$2d_2$	20 కంపనాలకు పట్టు కాలము			T	T^2	$\frac{T^2 d_1 d_2}{h}$	I
					1వ సారి	2వ సారి	సరాసరి				
1.	పొడవు, వెడల్పు తలము పరంగా										
2.	వెడల్పు, ఎత్తు తలం పరంగా										
3.	ఎత్తు, పొడవు తలం పరంగా										

వస్తువు పొడవు (a) = ... సెం.మీ.; వెడల్పు (b) = ... సెం.మీ., మందము (c) = ...

పట్టిక - 2

వ.సం	వస్తువు వ్రేలాడదీసిన దీసిన విధము	సైద్ధాంతిక జడత్వ భ్రామకము	ప్రయోగాత్మక జడత్వ భ్రామకము
1.	పొడవు, వెడల్పు తలము పరంగా	$M\left[\frac{a^2+b^2}{12}\right] =$	
2.	వెడల్పు, మందము తలము పరంగా	$M\left[\frac{b^2+c^2}{12}\right] =$	
3.	మందము, పొడవు తలము పరంగా	$M\left[\frac{a^2+c^2}{12}\right] =$	

ఫలితము : వస్తువు జడత్వ భ్రామకము, వివిధ అక్షముల పరంగా కనుగొనబడినవి. సైద్ధాంతిక విలువలతో వాటిని పోల్చబడినది.

జాగ్రత్తలు :
(1) కంపన పరిమితి తక్కువగా ఉండవలెను.
(2) రెండు దారములు సమానమైన పొడవు కలిగి ఉండవలెను.
(3) రెండు దారములను గరిమనాభి నుండి సమానదూరములో ఉంచవలెను.

యూనిట్ - 2

పాఠం - 4

అవిచ్ఛిన్న యానకముల యాంత్రిక శాస్త్రం

ఉద్దేశాలు

ఈ పాఠ్యాంశము చదివిన తరువాత విద్యార్థులు ఈ క్రింది అంశాలు తెలుసుకుంటారు.

- స్థితిస్థాపకత, అస్థితిస్థాపకత, వికృతి, ప్రతిబలం, స్థితిస్థాపక గుణకం, పాయిజాన్ నిష్పత్తి వంటి పదములను అర్థము చేసుకొనగలుగుట.
- వివిధ స్థితిస్థాపక గుణముల మధ్య మరియు పాయిజాన్ నిష్పత్తితో వాటి సంబంధములను రాబట్టుట.
- దండముల వంపును అర్థం చేసుకొనగలుగుట.
- మధ్య భారమును తగిలించి దండము యొక్క పదార్థాపు యంగ్ గుణకము విలువను కనుగొనుటకు సమీకరణమును రాబట్టుట.
- కాంటీలీవర్‌ను అర్థం చేసుకొనుట. మరియు దాని కంపనములను విశ్లేషించుట.
- కాంటీలీవర్ కంపన పద్ధతిన పదార్థాపు యంగ్ గుణకమును కనుగొనుటకు సమీకరణము రాబట్టుట.

విషయసూచిక

4.1 ఉపోద్ఘాతము

ఈ పాఠ్యాంశంలో బల వ్యవస్థకు లోనై, నిశ్చల స్థితిలో వున్న వస్తువులను గూర్చి అధ్యయనం చేస్తాము. ఆ సందర్భంలో వస్తువు విరామంలో ఉన్నప్పటికినీ, ఆ వస్తువు యొక్క పరిమాణము లేదా ఆకారం మారవచ్చును. అప్పుడు ఆ వస్తువు విరూపణం చెందింది అనవచ్చును. ఆ వస్తువు పై ఉన్న బాహ్య బలాలను తీసివేయగానే అవి తిరిగి తన యదార్థ రూపాన్ని మరియు పరిమాణాన్ని పొందినట్లయితే, ఆ వస్తువును **స్థితిస్థాపక వస్తువు** అంటారు. బాహ్య విరూపణ బలాలను తీసివేసినట్లయితే ఆ వస్తువు తిరిగి యథారూపాన్ని మరియు పరిమాణాన్ని పొందే వస్తువు ధర్మాన్నే **స్థితి స్థాపకత** అంటారు. విరూపణ బలాన్ని తీసివేసిన పిమ్మట కూడా ఆ వస్తువు తన తొలి రూపాన్ని మరియు పరిమాణాన్ని పొందలేకపోతే, ఆ వస్తువుని **ప్లాస్టిక్ వస్తువు** లేదా **అస్థితిస్థాపక వస్తువు** అంటారు.

అన్ని దిశలలోను వస్తువు లేక పదార్థం అంతటా ఒకే భౌతిక ధర్మాలను ప్రదర్శించే వస్తువులను **సమదైశికాలు** అంటారు.

పదార్థంలో భౌతిక ధర్మాలు గనుక దిశతోబాటు మారుతూ ఉంటే అట్లాంటి పదార్థాలను విషమ దైశికాలు అంటారు.

స్ఫటికాలు విషమ దైశికాలు. ప్రవాహాలన్నీ సమదైశికాలు.

పదార్థము అంతటిలోను ఏ భౌతిక ధర్మమైనా ఒకేలాగా ఉంటే అప్పుడు దానిని సజాతీయ వస్తువు అందురు.

సమదైశికాల విషయంలో వక్రీభవన గుణకము, జడత్వ భ్రామకము, స్థితిస్థాపక గుణకము వంటి భౌతిక ధర్మాలను అదిశరాశుల ద్వారా సూచించవచ్చు.

కాని విషమ దైశికాల విషయంలో మాత్రం భౌతిక ధర్మాలను సూచించుటకు టెన్సార్‌ను వాడతాము.

ప్రమాణ పరిమాణంలో వస్తువులలో కలిగే విరూపణనే వికృతి అంటారు. పొడవులో ఉండే వికృతిని అనుదైర్ఘ్య వికృతి, ఘన పరిమాణంలోని వికృతిని ఆయత వికృతి, ఆకారంలోని మార్పుని విమోటన వికృతి అని అంటారు.

వస్తువులో ప్రతి ప్రమాణ మధ్యచ్ఛేద వైశాల్యం పై ఏర్పడే పునః స్థాపక బలాన్ని ప్రతి బలం అంటారు.

సాధారణంగా, ఓ అవధిలోపలే అయితే ప్రతిబలం, వికృతికి అనులోమానుపాతంగా ఉంటుంది. ప్రతిబలంనకు వికృతిల నిష్పత్తిని స్థితిస్థాపక గుణకం అంటారు.

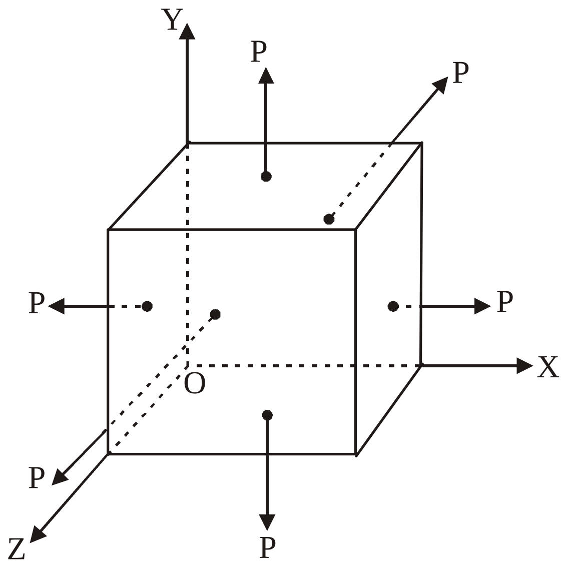
మూడు రకాల వికృతులైన, అనుదైర్ఘ్య, ఆయత, విమోటన, వికృతులకు సంబంధించి మూడు రకాల స్థితిస్థాపక గుణకాలు యంగ్ గుణకం, ఆయత గుణకం, ధృఢతా గుణకాలు ఉన్నాయి.

ఒక వస్తువును ప్రతి బలంకు గురి చేసినప్పుడు ఆ వస్తువు అనుదైర్ఘ్య వికృతినే కాక పార్శ్వ వికృతికి కూడా లోనవుతుంది. ఒక వస్తువు యొక్క పార్శ్వ సంకోచ వికృతికి అనుదైర్ఘ్య సాగుదల వికృతికి గల నిష్పత్తినే పాయిజాన్ నిష్పత్తి అంటారు.

4.2 స్థితిస్థాపక గుణకాల మధ్య సంబంధము

మనం ఘనాన్ని తీసుకుందాం. ఈ ఘనమును మూడు నిరూపకాక్షములకు సమాంతరముగా ఉంచుదాము. ఈ ఘనము

ఆరు ముఖతలాలు కలిగి ఉండి, ఒక్కొక ముఖ తలము పైన ఏకరీతి బలము 'P' బయటికి పని చేస్తుంటుంది. అప్పుడు $X-$ అక్షమునకు సమాంతరముగా ఉన్న బలము, $X-$ అక్షమునకు సమాంతరముగా సాగుదలను మరియు $X-$అక్షమునకు లంబంగా అనగా Y, Z అక్షాలకు సమాంతరముగా సంపీడనమును ఉత్పత్తి చేస్తుంది (పటము 4.1).



పటము 4.1

ఈ విధంగా ప్రతి బలము తన స్వంత దిశలో సాగుదలను మరియు లంబ దిశలో సంపీడనమును ఉత్పత్తి చేస్తుంది. యంగ్ గుణకమును ఈ విధముగా తెలియజేయవచ్చు.

$$Y = \frac{\text{అనుదైర్ఘ్య ప్రతిబలం}}{\text{అనుదైర్ఘ్య వికృతి}}$$

$$\text{అనుదైర్ఘ్య వికృతి} = \frac{\text{అనుదైర్ఘ్య ప్రతిబలం}}{\text{యంగ్ గుణకం}}$$

$$= \frac{P}{Y}$$

$$X \text{ అక్షము వెంబడి సాగుదల} = \frac{P}{Y}$$

$$\text{పాయిజాన్ నిష్పత్తి } (\sigma) = \frac{\text{పార్శ్వ వికృతి}}{\text{అనుదైర్ఘ్య వికృతి}} \times 100, \text{ కావున}$$

$$\text{పార్శ్వ వికృతి} = \sigma \times \text{అనుదైర్ఘ్య వికృతి}$$

$$= \sigma \times \frac{P}{Y}$$

అప్పుడు, Y, Z అక్షముల వెంబడి సంకోచము = $\sigma \dfrac{P}{Y}$

లేక Y, Z అక్షముల వెంబడి సాగుదల $= -\sigma \dfrac{P}{Y}$

ఈ విధంగా $X-$ అక్షమునకు సమాంతరంగా వున్న ప్రతిబలం ఈ క్రింది వాటిని ఏర్పరుస్తుంది.

$X-$ అక్షమునకు సమాంతరముగా సాగుదల $= \dfrac{P}{Y}$

$Y-$ అక్షమునకు సమాంతరంగా సాగుదల $= -\sigma \cdot \dfrac{P}{Y}$

$Z-$ అక్షమునకు సమాంతరంగా సాగుదల $= -\sigma \cdot \dfrac{P}{Y}$

అదే విధముగా $Y-$ అక్షమునకు సమాంతరంగా ప్రతిబలం 'P' పని చేస్తుంటే ఈ క్రింది వాటిని ఉత్పత్తి చేస్తుంది.

$Y-$ అక్షమునకు సమాంతరంగా సాగుదల $= \dfrac{P}{Y}$

$X-$ అక్షమునకు సమాంతరంగా సాగుదల $= -\sigma \cdot \dfrac{P}{Y}$

$Z-$ అక్షమునకు సమాంతరంగా సాగుదల $= -\sigma \cdot P/Y$

$Z-$ అక్షమునకు సమాంతరంగా 'P' ప్రతిబలం పని చేస్తుంటే ఈ క్రింది వాటిని ఉత్పత్తి చేస్తుంది.

$Z-$ అక్షమునకు సమాంతరంగా సాగుదల $= P/Y$

$X-$ అక్షమునకు సమాంతరంగా సాగుదల $= -\sigma \cdot P/Y$

$Y-$ అక్షమునకు సమాంతరంగా సాగుదల $= -\sigma \cdot P/Y$

4.2.1 Y,K ల మధ్య సంబంధం

అన్ని బలాల వలన X, Y, Z అక్షముల వెంబడి మొత్తము సాగుదలను e_x, e_y, e_z లతో సూచిస్తే, అప్పుడు

$$e_x = \frac{P}{Y} - \frac{\sigma P}{Y} - \frac{\sigma P}{Y} = \frac{P}{Y}(1-2\sigma)$$

$$e_y = -\frac{\sigma P}{Y} + \frac{P}{Y} - \frac{\sigma P}{Y} = \frac{P}{Y}(1-2\sigma)$$

$$e_z = -\frac{\sigma P}{Y} - \frac{\sigma P}{Y} - \frac{\sigma P}{Y} + \frac{P}{Y} = \frac{P}{Y}(1-2\sigma)$$

అప్పుడు ఘనములోని ప్రతి భుజము $1+\frac{P}{Y}(1-2\sigma)$ అవుతుంది.

అప్పుడు ఘనము యొక్క క్రొత్త పరిమాణము $=\left[1+\frac{P}{Y}(1-2\sigma)\right]^3$

$$=1+\frac{3P}{Y}(1-2\sigma) \text{ approx}$$

ఘనము యొక్క తొలి పరిమాణము '1' అయితే అప్పుడు పరిమాణములో వచ్చే మార్పు

$$=\left[1+\frac{3P}{Y}(1-2\sigma)\right]-1$$

$$=\frac{3P}{Y}(1-2\sigma)$$

ఘనపరిమాణ వికృతి = $\frac{\text{ఘనపరిమాణములోని మార్పు}}{\text{తొలి ఘనపరిమాణము}}$

$\therefore$ ఘనపరిమాణ వికృతి $=\frac{3P}{Y}(1-2\sigma)$

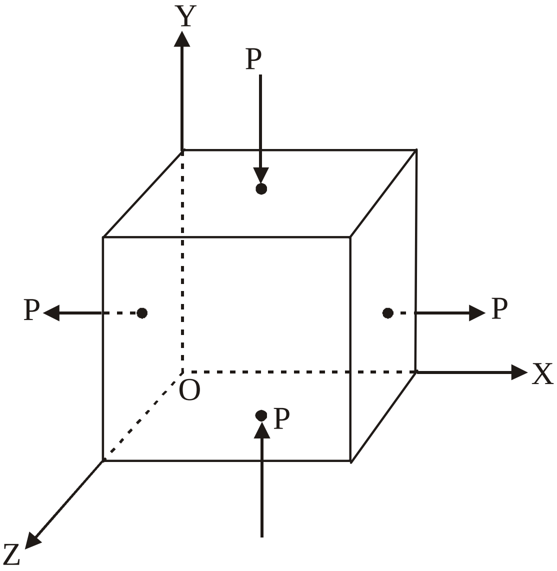
ఆయతన గుణకం (K) = $\frac{\text{ఘనపరిమాణ ప్రతిబలం}}{\text{ఘనపరిమాణ వికృతి}}$

$$\text{or} \quad K = \frac{P}{\frac{3P}{Y}(1-2\sigma)} = \frac{Y}{3(1-2\sigma)}$$

$$Y = 3K(1-2\sigma)$$

4.2.2 దృఢతా గుణకము (η) మరియు యంగ్ గుణకము (Y) ల మధ్య సంబంధం

ఒక ఘనము తీసుకుందాం. X – అక్షము వెంబడి వికృతి బలము 'P' ని మరియు Y – అక్షమునకు సమాంతరంగా సంకోచము లేక సంపీడన వికృతిని ప్రయోగిద్దాము. మూడు అక్షములు X, Y, Z ల వెంబడి మొత్తము సాగుదలలు e_x, e_y, e_z అనుకుంటే



$$e_X = \frac{P}{Y} + \frac{\sigma P}{Y} = \frac{P}{Y}(1+\sigma)$$

$$e_y = \frac{-\sigma P}{Y} - \frac{P}{Y}$$

$$= \frac{-P}{Y}(1+\sigma) \text{ లేదా సంకోచము } = \frac{P}{Y}(1+\sigma)$$

$$e_z = \frac{-\sigma P}{Y} + \frac{\sigma P}{Y} = 0$$

అప్పుడు X, Y అక్షముల వెంబడి సమానమైన సాగుదలలు మరియు సంకోచము లేక సంపీడనములు ఉంటాయి. సమానమైన సంకోచ, సాగుదలలు లంబ దిశలలో ఉన్నప్పుడు అవి 'θ' విరూపణ కోణానికి తుల్యం.

అప్పుడు $\frac{P}{Y}(1+\sigma) + \frac{P}{Y}(1+\sigma) = \theta$

$$\text{or} \quad \frac{2P}{Y}(1+\sigma) = \theta$$

$$\frac{P}{\theta} = \frac{Y}{2(1+\sigma)}$$

ఇంకను సాగుదల ప్రతిబలము 'P' మరియు సంకోచ బలాలు 'P' ఒకదానికొకటి లంబదిశలో ఉన్నప్పుడు అవి 'θ' విరూపణ కోణానికి లేదా విరూపణ ప్రతిబలం 'P'కు తల్యం.

అప్పుడు దృఢతా గుణకం

$$n = \frac{\text{విరూపణ ప్రతిబలం}}{\text{విరూపణ కోణం}} = \frac{P}{\theta}$$

$$n = \frac{Y}{2(1+\sigma)}$$

$$Y = 2n(1+\sigma) \text{ ------------ } (2)$$

b) **మూడు స్థితిస్థాపక స్థిరాంకాల మధ్య సంబంధం**

మొదటి (1) సమీకరణము నుంచి

$$\frac{Y}{3K} = 1 - 2\sigma$$

సమీకరణము $(2) \Rightarrow \dfrac{Y}{\eta} = 2 + 2\sigma$

కూడితే, $\dfrac{Y}{3K} + \dfrac{Y}{\eta} = 3$

$$Y = \frac{9nK}{3K+\eta} \text{ ----------- } (3)$$

(1), (2) సమీకరణాల నుంచి 'Y'ని తొలగించిన

$$3K(1-2\sigma) = 2n(1+\sigma)$$

$$3K - 2n = \sigma(2n + 6K)$$

$$\sigma = \frac{3K-2n}{6K+2n} \text{ ---------- } (4)$$

4.2.3 పాయిజాన్ నిష్పత్తి, స్థితిస్థాపక గుణకముల మధ్య సంబంధము

$$Y = 3K(1-2\sigma) \text{ --------- } (a)$$

$$Y = 2n(1+\sigma) \text{ ---------- } (b)$$

పాయిజాన్ నిష్పత్తి (σ) యొక్క అవధులు

$$3K(1-2\sigma) = 2n(1+\sigma) \text{ ----------- } (c)$$

ఇక్కడ Y, K, n లు ధనాత్మక గుణకాలు.

పాయిజాన్ నిష్పత్తి 'σ' ధనాత్మక గుణకము అయితే, అప్పుడు (c) సమీకరణములో కుడి చేతి వైపు $n(1+\sigma)$ విలువ ధనాత్మకము.

కాబట్టి $3K(1-2\sigma)$ కూడా ధనాత్మకమే.

ఇది ఎప్పుడు సాధ్యమవుతుంది అంటే

$(1-2\sigma) > 0$ అయినప్పుడు,

$1 > 2\sigma$

$$\frac{1}{2} > \sigma$$

$$\therefore \sigma < \frac{1}{2}$$

అప్పుడు 'σ' యొక్క గరిష్ట విలువ $\frac{1}{2}$.

ఒకవేళ 'σ' ఋణాత్మక గుణకము అయితే, $3K(1-2\sigma)$ ధనాత్మకము అవుతుంది. కాబట్టి $(1+\sigma)$ కూడా ధనాత్మకము కావాలి. ఇది

$(1+\sigma)>0$ అయినప్పుడే సాధ్యపడుతుంది.

$\sigma > -1$

'σ' కనిష్ట విలువ '-1'

ఈ విధంగా 'σ' యొక్క అవధులు -1 మరియు $\frac{1}{2}$

4.3 దండము లేదా కమ్మి

సజాతీయ సమదైశిక పదార్థములతో చేయబడి మధ్యచ్ఛేదముతో పోలిస్తే ఎక్కువ పొడవును కలిగిన ఏకరీతి మధ్యచ్ఛేదము గల కడ్డీని కాని, కమ్మీని కాని దండము లేదా కమ్మి అందురు.

మధ్యచ్ఛేద కొలతలు లేదా అడ్డుకొలతలు తక్కువ గనుక ఏ విభాగము పైనైనా ఉండే విమోటన ప్రతి బలాలను నిర్లక్ష్యం చేయవచ్చు. ఈ సందర్భంలోనే వంపును శుద్ధమైన లేక సరళమైన వంపు అందురు.

సామాన్యంగా దండము పొడవునకు లంబంగా పనిచేసే బలాలను నిరోధించుటకు దండమును ఉపయోగిస్తారు.

ఉపయోగించే పద్ధతిని ఆధారం చేసుకొని దండములను ఈ క్రింది విధంగా వర్గీకరించవచ్చును.

1. సరళ దండము లేదా సరళంగా ఆధారముల మీద ఆధారపడిన దండము.

2. కాంటిలీవరు దండము

3. ముందుకు చొచ్చుకు వచ్చిన దండము

4. మడత బందు దండము

1. **సరళ దండము :** దండము యొక్క రెండు అంచులను, రెండు కత్తిమొనల పై ఉంచుట కాని, లేదా ఒక అంచును కత్తి మొన పైనను మరియొక అంచును రోలరు పైనున్న కత్తి అంచున ఉంచిన దానిని సరళ దండము అందురు.

2. **కాంటిలీవరు దండము :** దండము యొక్క ఒక కొనను ధృడముగా బిగించి మిగిలిన దండము క్షితిజ సమాంతరముగా ఉండుటకు వదిలివేసిన లేదా వదిలివేసిన దండపు కొన వద్ద ఒక భారమును తగిలించినను దానిని కాంటాలీవరు దండము అందురు.

3. **ముందుకు చొచ్చుకు వచ్చిన దండము :** ఆధారముల పై ఆధారపడి ఉన్న దండములలో కొంత భాగము ఆధారము వెలుపలకు చొచ్చుకొని వచ్చిన దానిని ముందుకు చొచ్చుకొని వచ్చిన దండము అందురు.

4. **మడత బందు దండము :** దండము యొక్క ఒక కొనను మడత బందుతో బిగించి, మిగిలిన పొడవు అంతము క్షితిజ సమాంతరముగా ఉండునట్లు చూసిన, దానిని మడత బందు దండము అంటారు.

కడ్డీల పై పనిచేయు భారాలను ఈ క్రింది విధముగా వర్గీకరించవచ్చు.

1. ఏకీకృత భారము లేదా బిందు భారము
2. ఏకరీతి విస్తరిత భారము
3. ఏకరీతితో మారే భారము

1. **ఏకీకృత భారము లేదా బిందు భారము :** ఒక బిందువు వద్ద పనిచేసే భారమునే (అది మొత్తము పొడవులో అతి చిన్న భాగము మీద) బిందు భారము లేదా ఏకీకృత భారము అందురు.

2. **ఏకరీతి విస్తరిత భారము :** దండము పొడవు వెంబడినే కొంత దూరం మీద విస్తరించి పనిచేసే భారాన్ని ఏకరీతి విస్తరిత భారము అందురు. ప్రమాణ పొడవుతో భారము స్థిరంగా ఉంటుంది.

3. **ఏకరీతి మారే భారము :** దండము పొడవు వెంబడే కొంత దూరము విస్తరించిన భారము ప్రమాణ పొడవుతో ఏకరీతిగా పెరుగుతూ లేదా తగ్గుతూ ఉంటే ఆ భారాన్నే ఏకరీతి మారే భారము అందురు.

4.3.1 దండముల వంపు, వంపు భ్రామకము

వంపు భ్రామకాలకు సంబంధించిన కొన్ని శాస్త్రీయ పదాలను తెలుసుకుందాం.

1. దండము స్థితిస్థాపక అవధులలోనే ఉన్నట్లయితే అప్పుడు ఆ దండము బలయుగ్మమునకు గురయి విరూపణ చెంది, అచట కొంత సాగుదలను కొంత సంకోచము చెందుతుంది.

2. సమాంతరంగా అనుకొని ఉన్న పలుచని సమతల పొరల సముదాయముతో దండము నిర్మింపబడి ఉందని అనుకోవచ్చు. (కడ్డీ అయినచో ఏకాక్షముగా అదీకాక ఒక పలుచని పొరను సన్నని సమాంతరముగా ఆనుకొని ఉన్న పొడవైన పోచల సముదాయంగా ఊహించవచ్చును. ఈ పోచలనే **అనుదైర్ఘ్య తంతువులు** అనవచ్చును).

3. దండములో ఏ స్థానములో బలయుగ్మము పని చేస్తుందో లేక ఏ స్థానములో దండము వంగుతుందో దానినే **వంపు తలము** అందురు.

4. వంచిన దండములో ఏ ఉపరితములోనైతే సంకోచము కాని, విస్తరణ కాని ఉండదో ఆ తలమును **తటస్థ తలము** అందురు.

5. తటస్థ తలము, వంపు తలము ఏ సరళరేఖ వెంబడి కండించుకుంటాయో ఆ సరళరేఖను **తటస్థ అక్షం** అంటారు.

6. దండము యొక్క వంపునకు బాహ్య యుగ్మము అనువర్తించినప్పుడు అంతర్గత పునః స్థాపన యుగ్మము ఏర్పడుతుంది. సమతాస్థితి నియమముల క్రింద పునః స్థాపక యుగ్మము, బాహ్య అనువర్తిత యుగ్మమునకు సమానము. ఈ పునః స్థాపక యుగ్మము యొక్క భ్రామకమునే **వంపు భ్రామకము** అంటారు.

సంజ్ఞా సంప్రదాయాలు : సంజ్ఞా సంప్రదాయాలు రెండు రకాలు. బలాల చర్యలను ఆధారముగా చేసుకుని వంపు భ్రామకాలను లేక వంపును ఈ క్రింది విధంగా విభజించారు.

1. **ధనాత్మక వంపు లేక వంపు భ్రామకము :** ఏ విభాగమునకు సంబంధించి అయిన బలాలు ఊర్ధ్వ ముఖంగా పనిచేస్తున్నట్లయితే అప్పుడు ధనాత్మక వంపు భ్రామకం లేక ధనాత్మక వంపు ఏర్పడుతుంది.

2. **ఋణాత్మక వంపు లేక వంపు భ్రామకం :** బలాలు అదోముఖంగా పనిచేస్తున్నట్లయితే ఋణాత్మక వంపు భ్రామకము లేక ఋణాత్మక వంపు ఏర్పడుతుంది.

దండము యొక్క వంపు రూపమును ఆధారముగా చేసుకుని వంపు ఈ క్రింది విధముగా విభజింపబడింది.

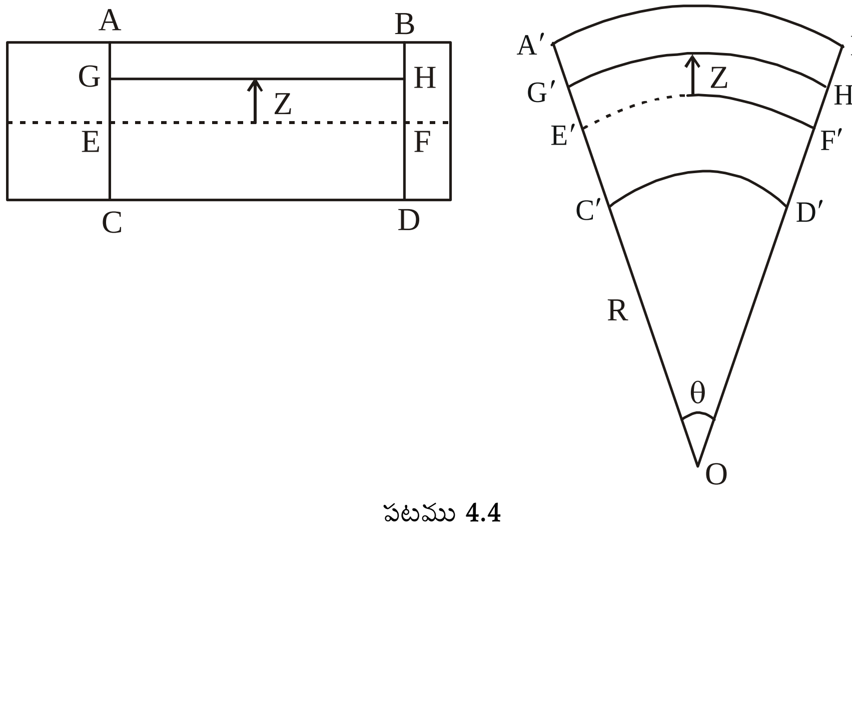
ధనాత్మక వంపు భ్రామకం : వంపు భ్రామకం, దండము యొక్క వంపుని ఊర్ధ్వముఖ పుటాకారముగా ఏర్పరచినట్లయితే అప్పుడు మనము దానిని ధనాత్మక వంపు భ్రామకం అందురు.

ఋణాత్మక వంపు భ్రామకము : వంపు భ్రామకం, దండము యొక్క వంపుని అదోముఖ పుటాకారముగా ఏర్పరచినట్లయితే అప్పుడు మనము దానిని ఋణాత్మక వంపు భ్రామకం అందురు.

పటము 4.3

4.3.2 వంపు భ్రామకమునకు సమీకరణము

ఒకదానికొకటి దగ్గరగా ఉన్న AC మరియు BD తిర్యక్ తలాల మధ్య దండములోని కొంత భాగము ABCD తో సూచిస్తాము. దండమును వంచినపుడు AB నుంచి $A'B'$ కు దీర్ఘీకరించబడింది. మరియు CD, $C'D'$ కు సంకోచించబడింది. $EF = E'F'$ తలము సంకోచించదు, దీర్ఘీకరించదు(పటము 4.4).



పటము 4.4

కేంద్రము వద్ద 'θ' కోణము చేయు వృత్తాకార చాపముగా ఆ చిన్న భాగము వంచబడినది. తటస్థ తలము E^1F^1 యొక్క వక్రతా వ్యాసార్థమును 'R'తో సూచిస్తాము.

GH ఒక తంతువు. వంపునకు ముందు అది తటస్థ తలము నుండి 'Z' దూరంలో ఉంది. వంపు తరువాత తంతువు $G'H'$.

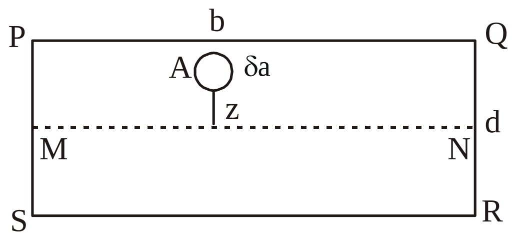
$$G'\,H' = (R+Z)\theta$$
$$GH = EF = E'F'$$
$$E'F' = R\theta$$

తంతువు పొడవులో వచ్చిన మార్పు $= G'H' - GH$

$$= (R+Z)\theta - R\theta = Z\theta$$

$$\text{వికృతి} = \frac{\text{పొడవులో మార్పు}}{\text{తొలి పొడవు}} = \frac{G'H' - GH}{GH} = \frac{Z\theta}{R\theta} = \frac{Z}{R}$$

పొడవుకు మరియు వంపు తలమునకు లంబ దిశలో దండములో ఒక చిన్న భాగమును $PQRS$తో సూచిస్తాము.



తంతువు మీద పని చేయు బలాలు ఈ విభాగమునకు లంబ దిశలో ఉంటాయి. 'MN' సరళరేఖ తటస్థ తలము పైన ఉంది.

ఆ విభాగము యొక్క 'PQ' యొక్క వెడల్పు 'b' మరియు PR మందము 'd'.

దీర్ఘీకరణమును, సంకోచమును ఏర్పరుచు బలాలు ఈ విభాగమునకు లంబ కోణంలో పని చేస్తాయి. $PQMN$ మీద పని చేయు బలాలు దీర్ఘీకరణమున, $MNSR$ మీద పనిచేయు బలాలు సంకోచమును ఏర్పరుస్తాయి. అప్పుడు రెండు సమతలం యొక్క బలాలు వ్యతిరేక దిశలో ఉంటాయి.

$PQRS$ విభాగములో చిన్న వైశాల్యము 'δa'ని తీసుకుందాం. తటస్థ తలము నుండి అది 'Z' దూరంలో ఉంది.

$$\text{వికృతి} = \frac{Z}{R}$$

$$Y = \frac{\text{ప్రతిబలం}}{\text{వికృతి}}$$ లేక ప్రతిబలం = Y × వికృతి

$$\delta a \text{ వైశాల్యంపై బలము } = \left(Y \times \frac{Z}{R}\right) \times \delta a$$

ఇచట Y – యంగ్ గుణకము.

ఈ బలము యొక్క భ్రామకము

$$= Y \cdot \frac{Z}{R} \delta a \times Z$$

$$= \frac{YZ^2}{R} \delta a$$

పైన మరియు క్రింది సగభాగములలో నున్న అన్ని బలాల యొక్క భ్రామకాలు తుల్యమే.

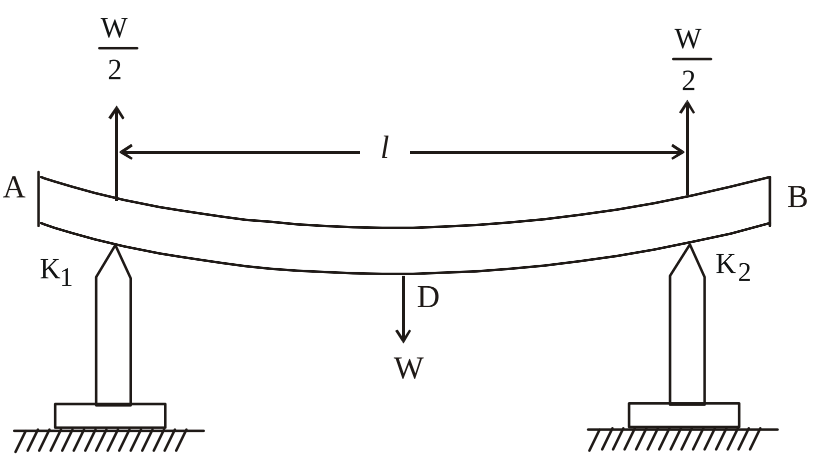
కావున PQRS మూలకములోని మొత్తము భ్రామకము

$$\sum \frac{Y \delta a Z^2}{R} = \frac{Y}{R} \sum \delta a Z^2 = \frac{YI_g}{R}$$

$\sum \delta a Z^2$ అనేది జ్యామితీయ జడత్వ భ్రామకము(I_g). (కొన్ని సందర్భాలలో దీనిని ‘I’తో సూచిస్తారు)

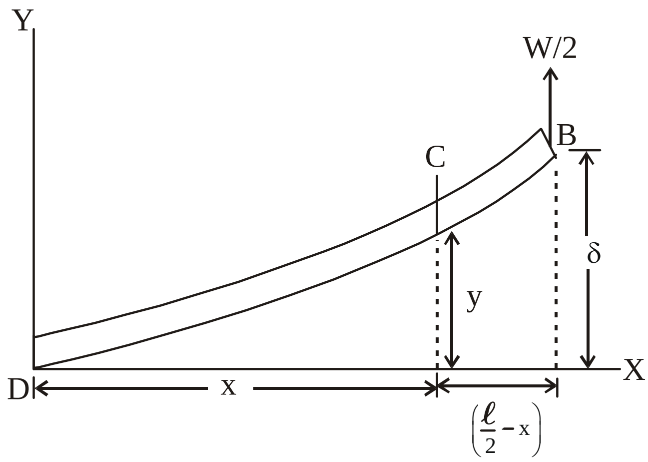
మధ్య భారము తగిలింపబడిన దండము (అసమరీతి వంపు)

దీర్ఘ చతురస్ర మధ్యచ్ఛేదాన్ని కల్గియున్న దండమును తీసుకుందాము. పటములో 5.5లో చూపించిన విధంగా దండమును AB తో చూచిద్దాము. దండమును K_1 మరియు K_2 అనే రెండు కత్తి అంచుల పైన క్షితిజ సమాంతరంగా అమర్చి, దాని మధ్య బిందువు 'D' వద్ద 'W' భారమును వేలాడదీశారు. ప్రతి కత్తి అంచువద్ద ప్రతిచర్య $\frac{W}{2}$ మరియు అది ఊర్ధ్వముఖంగా నిలువుగా పని చేస్తుంది. భారము వలన దండము పటంలో చూపినట్లుగా వంగును మరియు భారమును వేలాడదీసిన బిందువు వద్దనే గరిష్ట నిమ్నత ఉంటుంది (పటము 5.5).



పటము 5.5

సౌష్టవం చేత, 'D' వద్ద నున్న స్పర్శరేఖ సమాంతరంగా ఉంటుంది. కావున DA, DB ప్రతిభాగమును $\ell/2$ పొడవు కలిగిన విలోమ కాంటిలీవర్‌లాగా అనుకుందాము. ఇది 'D' చివరిన స్థిరంగా బిగించబడి మరియు వేరొక భాగమున $\frac{W}{2}$ భారమును ఊర్ధ్వ ముఖంగా ఉన్నట్లు భావించుము (పటము 5.6).



పటము 5.6

'D' నుంచి 'x' దూరంలో 'C' వద్ద ఒక విభాగమును తీసుకుందాము మరియు 'CB' భాగము సమతాస్థితిలో ఉంది అనుకుందాము. 'P' చివర దండము బిగించి ఉన్నందువలన, B చివరనున్న $\frac{W}{2}$ భారము బాహ్య బలయుగ్మము టార్క్‌ను పొంది అది సవ్యంగా తిరిగేటట్లు చేస్తుంది. దీని పరిమాణము $\frac{W}{2}\left(\frac{\ell}{2}-x\right)$ ~~ఈ~~ టార్క్ 'DC' భాగము చేత 'C' విభాగము మీద అంతర్గత బలాల వలన ఏర్పడిన అపసవ్య పునః స్థాపక బలయుగ్మము టార్క్‌చే సంతులనము చేయబడుతుంది.

పునః స్థాపక టార్క్ యొక్క పరిమాణము $\frac{YI}{\rho}$

$Y-$ దండము యొక్క యంగ్ గుణకము

$I-$ తటస్థ తలము సమీపమునున్న 'C' విభాగము యొక్క జ్యామితీయ జడత్వ భ్రామకము

$\rho-$ 'C' వద్ద వక్రతా వ్యాసార్థము

సమతా స్థితి వద్ద

$$\frac{W}{2}\left(\frac{\ell}{2}-x\right)=\frac{YI}{\rho} \quad \text{--------} \ (1)$$

D వద్ద మూలబిందువు 'O' అనుకుందాం. y అనేది ఉన్నతాంశము అనుకుంటే వాటి నిరూపకాలు (x, y). ఒకవేళ ఉన్నతాంశము తక్కువ అయితే, 'C' వద్ద ఉన్న వక్రతా వ్యాసార్థము

$$\rho = \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

(1)వ సమీకరణంలో ఈ విలువను ప్రతిక్షేపించగా

$$\frac{W}{2}\left(\frac{\ell}{2} - x\right) = YI\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{W}{2YI}\left(\frac{\ell}{2} - x\right)$$

పై సమీకరణాన్ని సమాకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{2YI}\left(\frac{\ell}{2}x - \frac{x^2}{2}\right) + C_1 \text{ (స్థిరాంకము)}$$

స్థిర బిందువు 'D' వద్ద, $x = 0 \ \& \ \frac{dy}{dx} = 0$ ($\because$ D వద్ద స్పర్శరేఖ సమాంతరంగా ఉంటుంది)

$$\therefore C_1 = 0$$

కావున $$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{2YI}\left(\frac{\ell}{2}x - \frac{x^2}{2}\right)$$

మరల సమాకలనం చేయగా

$$y = \frac{W}{2YI}\left(\frac{\ell}{2}\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C_2 \text{ (స్థిరాంకము)}$$

మరల D వద్ద $x = 0 \ \& \ y = 0$. $\therefore C_2 = 0$

$$\therefore y = \frac{W}{2YI}\left(\frac{\ell}{2}\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

ఇప్పుడు B చివరన, $x = \frac{\ell}{2} \ \& \ y = \delta$ (అనుకుందాం) y బదులుగా δ ని మరియు x బదులు $\frac{\ell}{2}$ ని (2)వ సమీకరణములో ప్రతిక్షేపిస్తే B వద్ద 'δ' ఉన్నతాంశమును పొందవచ్చును.

$$\therefore \delta = \frac{W}{2YI}\left(\frac{\ell}{2}\cdot\frac{\ell^2}{8} - \frac{\ell^3}{48}\right) = \frac{W\ell^3}{48YI}$$

దండము యొక్క వెడల్పు 'b' మరియు మందము 'P' అయితే

$$I = \frac{bd^3}{12}, \qquad \therefore \delta = \frac{W\ell^3}{4Ybd^3}$$

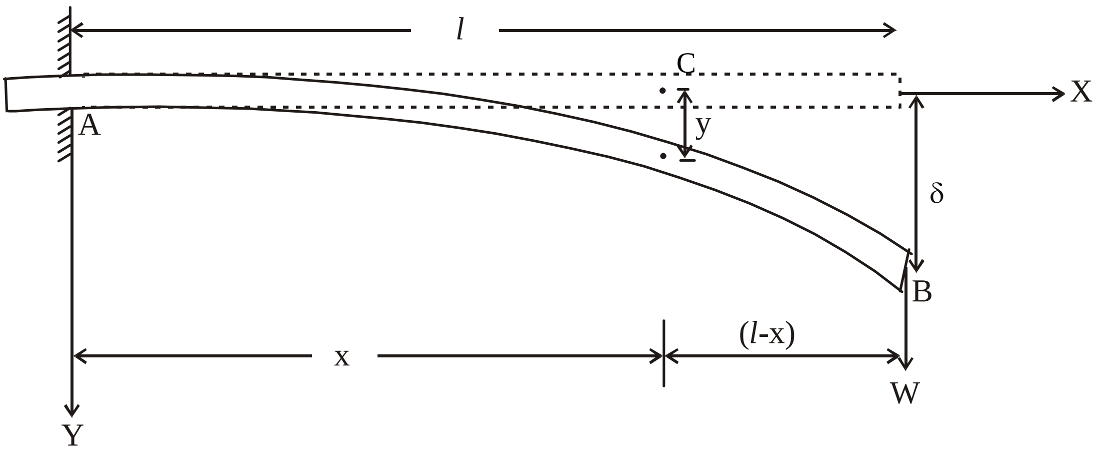
అసలు సందర్భంలో దండము యొక్క 'P' మధ్య బిందువు వద్ద ఉన్న నిమ్నత విలువ, పై విలువ (δ) ఒకేలాగా ఉన్నాయి.

అప్పుడు యంగ్ గుణకము

$$Y = \frac{W\ell^3}{4bd^3\delta}$$

కాంటీలీవరు

ℓ పొడవు కలిగిన, సన్నని, సమాంతర దండము ఒక చివర స్థిరంగా, క్షితిజ సమాంతరంగా బిగింపబడి ఉన్నదని అనుకుందాం. ఇప్పుడు స్వేచ్ఛగా నున్న రెండవ చివరి B వద్ద 'W' భారమును వేలాడదీయగా 'A'తో పోలిస్తే 'B' చివర కొంత వంగుతుంది. తత్ఫలితంగా దండము వంపు తిరుగుతుంది. పటములో చుక్కల హద్దు భారము తగిలించక ముందు దండము యొక్క స్థితిని సూచిస్తుంది. ఈ వ్యవస్థనే కాంటీలీవర్ అంటారు. ఇక్కడ దండము కాంతి కనుక, మొత్తము నిమ్నత కూడా 'W' భారము వలనే వచ్చిందని అనుకుందాము.



ఇప్పుడు మనము 'A' నుంచి 'x' దూరంలో నున్న 'C' విభాగమును తీసుకుందాము. మరియు CB భాగము సమతాస్థితిలో ఉంది అనుకుందాం. A చివరి దండము బిగించి ఉన్నందువలన B చివరనున్న భారము బాహ్య టార్క్‌ను పొంది సవ్యంగా తిరిగేటట్లు AC విభాగము చేత C విభాగము మీద అంతర్గత బలాలను ప్రయోగించుట వలన ఏర్పడిన అపసవ్య పునః స్థాపక టార్క్‌చే సంతులినము చేయబడుతుంది.

పునః స్థాపక టార్క్ యొక్క పరిమాణము $\frac{YI}{\rho}$

$Y-$ దండము యొక్క యంగ్ గుణకము

$I-$ తటస్థ తలము సమీపమునున్న 'C' నిభాగము యొక్క జ్యామితీయ జడత్వ భ్రామకము

$\rho-$ 'C' వద్ద వంపు తిరిగిన దండము యొక్క వక్రతా వ్యాసార్థము

సమతాస్థితిలో

$$W(\ell-x)=\frac{YI}{\rho} \text{ --------- (1)}$$

'C' బిందువు వద్ద ఉన్న నిమ్నతని y అనుకుందాం. 'A' చివరను మూలబిందువుగా తీసుకొని x, y 'C' కి నిరూపకాలుగా లుగా తీసుకుందాం. మరియు ఈ బిందువు వద్ద వక్రతా వ్యాసార్థము

$$\rho=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

ఇచట $\frac{dy}{dx}$ అనునది

నిమ్నత స్థితిస్థాపక అవధిలోనే ఉన్నట్లయితే, వాలు తగ్గుతుంది.

అప్పుడు $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ 'ℓ'తో పోలిస్తే శూన్యము.

అప్పుడు $\rho=\frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}$

(1)వ సమీకరణంలో 'ρ' విలువను ప్రతిక్షేపిస్తే

$$W(\ell-x)=YI\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{W}{YI}(\ell-x)$$

ఈ సమీకరణాన్ని సమాకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx}=\frac{W}{YI}\left(\ell x-\frac{x^2}{2}\right)+C_1$$

C_1 - ఒక సమాకలన స్థిరాంకము

స్థిరంగా బిగించిన కొన 'A' వద్ద, $x=0$ మరియు $\frac{dy}{dx}=0$

$$\therefore C_1 = 0$$

అప్పుడు $\frac{dy}{dx}=\frac{W}{YI}\left(\ell x-\frac{x^2}{2}\right)$

దీనిని మరల సమాకలనం చేయగా

$$y=\frac{W}{YI}\left(\ell\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+C_2$$

C_2 ఒక సమాకలన స్థిరాంకము.

మరియు $x = 0$ వద్ద $y = 0$ కనుక $c_2 = 0$ అందువలన

$$y=\frac{W}{YI}\left[\frac{\ell x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right]$$

స్వేచ్ఛగానున్న చివర B వద్ద $(x=\ell)$, నిమ్నత y గరిష్ఠ విలువను కలిగి ఉంటుంది. ఇది 'δ' అనుకొనుము. అప్పుడు పై సమీకరణంలో x, y ల కొరకు ℓ మరియు δ లను వరుసక్రమంలో ప్రతిక్షేపించగా

$$\delta=\frac{W}{YI}\left(\frac{\ell^3}{2}-\frac{\ell^3}{6}\right)=\frac{W\ell^3}{3YI} \text{ ---------- (2)}$$

Case - 1 :

దీర్ఘ చతురస్ర మధ్యచ్ఛేదాన్ని కల్గియున్న దండమునకు

$$I_g = \frac{bd^3}{12}$$

$b=$ వెడల్పు, $d=$ మందం

అప్పుడు $\delta=\frac{4W\ell^3}{Ybd^3}$

Case - 2 :

వృత్తాకార మధ్యచ్ఛేదాన్ని కల్గియున్న దండమునకు

$$I = \frac{\pi r^4}{4}$$

అప్పుడు $\delta = \dfrac{4W\ell^3}{3Y\pi r^4}$

$$\therefore Y = \frac{4W\ell^3}{38\pi r^4}$$

4.5 సాధించిన సమస్యలు

1. 0.5×10^{-2} m మందము, వెడల్పు కలిగిన దీర్ఘచతురస్ర మధ్యచ్ఛేద కడ్డీని 10m వ్యాసార్థము కలిగిన వృత్తాకార చాపము ఆకారములోకి వంచబడినది. ఆ పదార్థము యొక్క యంగ్ గుణకము $Y = 10^{11}$ Nm^{-2}

   (ఎ) కుంభాకార తలము మీద వికృతి మరియు ప్రతిబలమును కనుగొనుము?

   (బి) వంపు భ్రామకమును కనుగొనుము?

పరిష్కారము :

వంపు దండము యొక్క వికృతి $= \dfrac{Z}{R}$

'Z' తటస్థ ఉపరితలము మధ్య దూరము

కుంభాకార ఉపరితలము పై గరిష్ట వికృతి ఏర్పడుతుంది. $Z = \frac{1}{2}\times$ మందము

$$\therefore \text{వికృతి } = \frac{Z}{R} = \frac{1}{2}\times\frac{0.5\times10^{-2}}{10} = \frac{5\times10^{-3}}{20} = \frac{5}{2}\times10^{-4}$$

$$= 2.5\times10^{-4} \text{ m}$$

ప్రతిబలం = యంగ్ గుణకం × వికృతి

ప్రతిబలం $= 10^{11}\times2.5\times10^{-4} = 25\times10^{8}$ Nm^{-2}

వంపు భ్రామకము $= \dfrac{YI}{R} = \dfrac{10^{11}\times0.5\times10^{-2}\times\left(0.5\times10^{-2}\right)^3}{10\times12}$ $\left(\because I = \dfrac{bd^3}{12}\right)$

$$= \frac{5\times10^{11}\times10^{-3}\times125\times10^{-9}}{10\times12} = \frac{625}{120} = 5.2\ \text{Nm}$$

2. కొంత భారమును కాంటీలీవర్ యొక్క చివర భాగమునకు తగిలించుట వలన 10 mm నిమ్నతకు గురయినది. అదే పదార్థముతో తయారై 2 రెట్లు పొడవు, 2 రెట్లు వెడల్పు, మూడు రెట్లు మందము గల వేరొక కాంటీలీవర్‌నకు అంతే భారము తగిలించినచో ఎంత నిమ్నతకు గురవుతుంది?

$$\delta_1 = \frac{w_1\ell^3}{3YI} = \frac{w_1\ell^3}{3Y\frac{b_1 d_1^3}{12}} = \frac{4w_1\ell_1^3}{3Y_1 b_1 d_1^3}$$

$$\delta_2 = \frac{4w_2\ell_2^3}{3Y_2 b_2 d_2^3}$$

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{4w_1\ell_1^3}{Y_1 b_1 d_1^3}$$

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{Y_1}{Y_2}\cdot\frac{w_2}{w_1}\cdot\left(\frac{\ell_2}{\ell_1}\right)^3 \frac{b_1}{b_2}\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^3$$

$$Y_1 = Y_2;\ w_2 = w_1;\ \frac{\ell_2}{\ell_1} = 2;\ \frac{b_2}{b_1} = 2;\ \frac{d_2}{d_1} = 3$$

$$\therefore \frac{\delta_2}{\delta_1} = 1\times1\times2^3\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^3 = 8\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{27}$$

$$\delta_2 = \frac{8\times10}{2\times27} = 1.48\,\text{mm} \qquad (\because \delta_1 = 10\text{mm})$$

3. ఒక తీగ యొక్క యంగ్ గుణకము $2.04\times10^9\,\text{Kgwtm}^{-2}$ పొడవు 1m మరియు 0.25 Sq mm మధ్యచ్ఛేదమునకు 10 Kgwt భారము తగిలించగా అది సాగినది. ఆ తీగ ఎంత సాగినది.

సాగుదల, $$e = \frac{F\times L}{AY} = \frac{10\times9.8\times1}{2.04\times10^9\times9.8\times0.25\times10^{-6}}$$

$$= \frac{1}{2.04\times10^2\times0.25}$$

$$= \frac{1}{0.51 \times 10^2}$$

$$= 1.96 \times 10^{-2} \text{m.}$$

$$= 0.196 \text{mm}$$

4. ఒక రబ్బరు ట్యూబ్ యొక్క పొడవు 0.4 m దానికి 5 Kgwt బలము వలన బాహ్య వ్యాసము 0.01 m మరియు అంతర్ వ్యాసము 0.004 m కలిగినవి. 0.0006 m కు విస్తరించినది. Y గుణకమును కనుగొనుము.

పరిష్కారము :

$$A = \pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)$$

$$= 3.14\left[0.005^2 - 0.002^2\right]$$

$$= 3.14 \times 0.000021$$

$$= 6.6 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

$$F = 5 \times 9.8 = 49 \text{N}$$

$$Y = \frac{FL}{A\ell} = \frac{49 \times 0.4}{6.0 \times 10^{-5} \times 0.0006}$$

$$= \frac{49 \times 4}{6.6 \times 6} \times 10^8 \quad = 4.93 \times 10^8 \text{Nm}^{-2}$$

5. పొడవు 1 m కల్గియుండిన, ఒక ఏకరీతి దండమును క్షితిజ సమాంతరంగా ఉండునట్లు ఒక చివర బిగించి యుంచారు. స్వేచ్ఛగా నున్న రెండవ చివర 0.1 Kg భారాన్ని వ్రేలాడదీశారు. కడ్డీ వ్యాసం 0.02 m మరియు $Y = 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$ అయితే, కడ్డీ మధ్య బిందువు యొక్క నిమ్నతను లెక్కించుము.

పరిష్కారం :

నిమ్నత 'ρ'కు సాధారణ సూత్రం

$$\rho = \frac{w}{YI_g}\left[\frac{\ell x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]$$

$$x = \frac{\ell}{2};\ w = mg;\ I_g = \frac{\pi r^4}{4}$$

$$\therefore \rho = \frac{Mg}{Y\frac{\pi r^4}{4}}\left[\frac{\ell \cdot \ell^2}{8} - \frac{\ell^3}{8\times 6}\right]$$

$$= \frac{mg}{Y\left(\frac{\pi r^4}{4}\right)}\left[\frac{\ell^3}{8} - \frac{\ell^3}{8\times 6}\right]$$

$$= \frac{5mg\ell^3}{12\pi\times r^4}$$

$$M = 0.1\text{kg} \quad \ell = 1\text{m} \quad Y = 10^{10}\,\text{Nm}^{-2} \quad \ell = 1\text{m}$$

$$\therefore \rho = \frac{5\times 0.1\times 9.8\times 1^3}{12\pi\times 10^{10}\times(0.1)^4}$$

$$= 1.299\times 10^{-3}\text{m}$$

4.6 సారాంశము

1. ఒక వస్తువు పై ఉన్న బాహ్య బలాలను తీసివేయగానే అది తిరిగి తన యదార్థ రూపాన్ని, మరియు పరిమాణాన్ని పొందినట్లయితే ఆ వస్తువుని స్థితిస్థాపక వస్తువు అంటారు.

2. బాహ్యంగా ప్రయోగించిన బలాలను తీసివేసిన తరువాత యదార్థ పరిమాణాన్ని, రూపాన్ని పొందుటకు ఏ విధమైన ఉన్ముఖత కనపర్చనిచో ఆ వస్తువుని ప్లాస్టిక్ వస్తువు అంటారు.

3. అన్ని దిశలలోను ఒకే రకమైన ధర్మాన్ని ప్రదర్శించే వస్తువుని సమదైశిక వస్తువు అంటారు.

4. వేరు వేరు దిశలలో వేరు వేరు ధర్మాలను ప్రదర్శించే వస్తువును అసమదైశిక వస్తువు అంటారు.

5. స్ఫటిక పదార్థాలు సాధారణంగా అసమదైశికాలు.

6. ప్రమాణ వైశాల్యము పై పని చేయు పునః స్థాపక బలాన్ని ప్రతిబలం అందురు.

7. ప్రమాణ తొలి కొలతకు సంభవించిన కొలతలోని మార్పుని వికృతి అందురు.

8. వికృతులు మూడు రకాలు

   1. దైర్ఘ్య వికృతి 2. ఘనపరిమాణ వికృతి 3. విమోటన వికృతి

$$\text{దైర్ఘ్య వికృతి} = \frac{\text{పొడవులోని మార్పు}}{\text{తొలి పొడవు}}$$

$$\text{ఘన పరిమాణ వికృతి} = \frac{\text{ఘనపరిమాణములోని మార్పు}}{\text{తొలి ఘన పరిమాణము}}$$

విమోటన వికృతి = బలప్రయోగ దిశకు లంబముగా ఉన్న తలము వంగిన కోణము

9. కొంత అవధి లోపల ప్రతిబలము వికృతికి అనులోమాను పాతములో ఉండును. ఆ సందర్భములో ప్రతిబలమునకు వికృతికి గల నిష్పత్తిని స్థితిస్థాపక గుణకము అందురు.

10. మూడు వికృతులను అనుసరించి మూడు స్థితిస్థాపక గుణకములు కలవు.
    1. యంగ్ గుణకము (Y)
    2. ఆయత గుణకము (K)
    3. దృఢత గుణకము (η)

11. పార్శ్వ సంకోచ వికృతికి, అనుదైర్ఘ్య సాగుదల వికృతికి గల నిష్పత్తినే పాయిజాన్ నిష్పత్తి అందురు (σ).

12. $Y = 2n(1+\sigma)$

$$Y = 3K(1-2\sigma)$$

$$Y = \frac{9nK}{3K+n} \quad \sigma = \frac{3K-2n}{2n+6K}$$

$$\frac{9}{Y} = \frac{3}{n} + \frac{1}{K}$$

13. $'\sigma'$ కు సైద్ధాంతిక అవధులు $-1 < \sigma < 0.5$

14. విరూపణలో ప్రమాణ గణ పరిమాణమునకు జరుగు పని $= \frac{1}{2} \times$ వికృతి × ప్రతిబలం

15. వంచిన దండములో ఏ ఉపరితలములోనైతే సంకోచము కాని, విస్తరణ కాని ఉండదో ఆ తలమును తటస్థ తలము అందురు.

16. వంపు ఏకరీతిగా ఉన్నప్పుడు దానిలోని దైర్ఘ్య మూలకాన్ని ఒక సౌష్ఠవ తలమునకు సమాంతరముగా వలయాకారములో వంగిన, ఆ తలమునే వంపు తలమునందురు.

17. తటస్థ తలము, వంపు తలము ఏ సరళరేఖ వెంబడి ఖండించుకుంటాయో ఆ సరళరేఖను తటస్థ అక్షం అంటారు.

18. దండమును వంచు బలయుగ్మ భ్రామకమునే వంపు భ్రామకము అందురు.

19. వంపు భ్రామకము $= \frac{YI_g}{R}$

I_g = జ్యామితీయ జడత్వ భ్రామకం

R = వక్రతా వ్యాసార్థము

20. ఒక కొన వద్ద బిగించబడి మరియొక కొన వద్ద భారమును తగిలించిన క్షితిజ సమాంతర దండమునే కాంటీలీవర్ అందురు.

21. స్వేచ్ఛగా ఉన్న కొన నిమ్నత

$$\delta_f = \frac{W\ell^3}{3YI}$$

బిగించబడిన కొన నుండి 'x' దూరంలో నున్న నిమ్నత

$$\delta_x = \frac{W}{YI}\left(\frac{\ell x^2}{2} - \frac{x^2}{6}\right)$$

22. భారమును తగిలించిన కాంటీలీవర్ డోలనావర్తన కాలము

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M\ell^3}{3YI}}$$

23. కొనలను ఆధారముల పై నుంచి మధ్యన భారమును తగిలించినచో మధ్య నిమ్నత

$$\delta = \frac{W\ell^3}{48I_g Y}$$

దండము యొక్క మధ్యచ్ఛేదము దీర్ఘ చతురస్రాకారమైతే

కావున $I_y = \frac{bd^3}{12}$ ఆ సందర్భములో $\delta = \frac{W\ell^3}{4Ybd^3}$

4.7 కీలక పదాలు

స్థితిస్థాపకత, వికృతి, ప్రతిబలం, స్థితిస్థాపక గుణకము, యంగ్ గుణకము, ఘనపరిమాణ గుణకము, ధృడతా గుణకము, పాయిజాన్ నిష్పత్తి, దండము, ఏకరీతి, అసమరీతి వంపు, వంపు భ్రామకము, కాంటీలీవరు.

4.8 స్వయం సమీక్షా ప్రశ్నలు

వ్యాసరూప ప్రశ్నలు :

1. దీర్ఘచతురస్త్రాకార మధ్యచ్ఛేదము కలిగిన ఒక దండమును రెండు కత్తి మొనలపై నుంచి మధ్య బిందువు వద్ద భారము తగిలించిన, నిమ్నతకు సమీకరణము రాబట్టండి.
2. మూడు స్థితిస్థాపక గుణముల మధ్య సంబంధాన్ని రాబట్టండి.

3. కాంటీలీవరు అనగానేమి? కాంటీలీవరులో నిమ్నతకు, పదార్థాపు యంగ్ గుణకానికి గల సంబంధాన్ని రాబట్టండి.

లఘుప్రశ్నలు :

4. క్రింది పదాలను వివరించండి.

ఎ) స్థితిస్థాపకత, బి) ప్రతిబలం సి) వికృతి డి) విమోటనం

5. పాయిజాన్ నిష్పత్తి అవధులను రాబట్టండి.

6. దండముల వర్గీకరణను వివరించుము.

7. భారముల వర్గీకరణను వివరించుము.

అభ్యాసము :

1. 6 mm వ్యాసార్థము కలిగిన ఒక ఘన స్థూపాకార కడ్డీ కొంత భారము తగించుట వలన 8 mm వంగినది. ఒక గుల్ల స్థూపాకార వస్తువుని తీసుకుని దానికి బాహ్య వ్యాసార్థము 10 mm అంతర్ వ్యాసార్థము 8 mm మిగిలినవన్ని అంతే విలువలు కలిగినచో అది ఎంత వంపునకు గురవుతుంది. $[\text{Ans}: \ 1.76\,\text{mm}]$

సూచన : రెండు కడ్డీల నిమ్నత δ_1, δ_2 అయితే

$$\delta_1 = \frac{Mg\,\ell^3}{3\,YI_1} \qquad \delta_2 = \frac{Mg\,\ell_3}{3Y\,I_2}$$

$$\delta_1 = \frac{I_1}{I_2}\,\delta_2$$

ఘన స్థూపాకార కడ్డీ కొరకు $I_1 = \frac{\pi r^4}{4}$

గుల్ల స్థూపాకార కడ్డీ $I_2 = \frac{\pi\left(r_2^4 - r_1^4\right)}{4}$

2. ఒక వస్తువును విరుచుటకు $10^6 \ {}^{N}\!/_{m^2}$ బలము అవసరమవుతుంది. ఆ వస్తువు యొక్క సాంద్రత $3\times10^3\ \text{Kgm}^{-3}$ అయితే దాని బరువుకే ఆ వస్తువు విరిగినట్లయితే దాని యొక్క పొడవు ఎంత? $[\text{Ans}: 34\,\text{m}]$

సూచన : 'ρ' అనునది తీగ యొక్క సాంద్ర, అప్పుడు

తీగ బరువు = mg = పరిమాణము × సాంద్రత × g

$$= (Al) \times \rho g$$

$$\therefore \text{ ప్రతిబలము } = \frac{Al\rho g}{A} = \ell\rho g$$

ఈ సమస్య ప్రకారం

$$\ell\rho g = 10^6$$

$$\Rightarrow \ell = \frac{10^6}{\rho g} \text{ and } g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$$

3. ఉక్కు యొక్క యంగ్ గుణకము $Y = 2\times10^{11}$ N/m^2 మరియు దృఢతా గుణకం $n = 8\times10^{10}$ N/m^2. పాయిజాన్ నిష్పత్తిని మరియు స్థూల గుణకాన్ని కనుగొనుము. $\left[\text{Ans}: \ \sigma = 0.25, K = 1.33\times10^{11} \ N/m^2\right]$

సూచన : $Y = 3K(1-2\sigma), \sigma = \frac{1}{2}\left(1-\frac{Y}{3k}\right)$

4. 10 cm వైశాల్యము, 0.3 mm వెడల్పు, కలిగిన ఒక లోబపు కడ్డీ ఆర్క్ రూపములో వంగినది. దాని పొడవు 20 cm మరియు వ్యాసార్థము 50 cm ఈ క్రింది వాటిని కనుగొనుము.

(1) వంపు భ్రామకాన్ని, (2) గరిష్ట వికృతి, (3) గరిష్ట ప్రతిబలము $\left[Y = 1.5\times10^{11} N/m^2\right]$

[Ans : i) 6.75×10^{-2} N – m ii) 3×10^{-4} iii) 4.5×10^{7} N/m^2]

సూచన :

(1) వంపు భ్రాకము $= \frac{YI}{R}$, $I = \frac{bd^3}{12}$ దీర్ఘ చతురస్రమునకు

(2) వంపు తిరిగిన కడ్డీ బాహ్య ఉపరితలము వద్దనే గరిష్ట వికృతి మరియు ప్రతిబలం ఉంటాయి. తటస్థ అక్షము నుండి బాహ్య ఉపరితలము యొక్క దూరము.

$$Z = \frac{\text{కడ్డీ వెడల్పు}}{2} = \frac{d}{2}$$

$$\therefore \text{ గరిష్ట వికృతి } = \frac{Z}{R} \quad \frac{\left(d/2\right)}{R}$$

(3) గరిష్ట ప్రతిబలము $= Y \times$ గరిష్ట వికృతి

5. వెండి యొక్క యంగ్ గుణకము $= 7.25 \times 10^{10}$ N/m^2 మరియు స్థూల గుణకము $= 11\times10^{10}$ N/m^2 . పాయిజాన్ నిష్పత్తిని కనుగొనుము. $[\text{Ans}: \ 0.39]$

సూచన :

$$Y = 3K(1-2\sigma)$$

$$\sigma = \frac{1}{2}\left(1-\frac{Y}{3K}\right)$$

6. 6 mm వ్యాసార్థము కలిగిన ఘన స్థూపాకార దండము ఒక చివరి భాగమును క్షితిజ సమాంతరంగా స్థిరంగా బిగించి, వేరొక

భాగమునకు కొంత భారమును తగిలించగా, 8 mm నిమ్నతకు గురయినది. ఈ దండమునకు మారుగా అంతే పొడవు కలిగిన గుల్ల దండము (hdlow beam) యొక్క బాహ్య, అంతర్ వ్యాసార్థాలు 8 mm, 10 mm దీనికి అంతే భాగము తగిలించినచో నిమ్నత ఎంత? [Ans: 1.76 mm]

సూచన :

$$\delta_1 = \frac{W\ell^3}{3YI} \ ; \ I = \frac{\pi r^4}{4}$$

$$\delta_2 = \frac{W\ell^3}{3YI} ; \ I = \frac{\pi\left(r_2^4 - r_1^4\right)}{4}$$

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{r^4}{r_2^4 - r_1^4}$$

7. 0.5 m పొడవు కలిగిన కాంటీలీవరు యొక్క స్వేచ్ఛగానున్న చివరి భాగము వద్ద 15 mm నిమ్నత కలిగినది. స్థిరంగా బిగించిన స్వేచ్ఛగా ఉన్న భాగము వద్ద నుండి 0.3 m దూరంలో ఎంత నిమ్నతను కలిగి ఉంది? [Ans: 6.48 mm]

సూచన : స్థిరంగా బిగించిన స్వేచ్ఛగా ఉ్న చివరి భాగము నుండి 'x' దూరంలో కాంటీలీవర్ యొక్క నిమ్నత

$$y = \frac{Wx^2}{2YI}\left(\ell - \frac{x}{3}\right)$$

స్వేచ్ఛగా ఉన్న చివరి భాగము వద్ద $x = \ell$ మరియు $Y = 8$

$$\therefore \delta = \frac{W\ell^3}{3YI}$$

$$\frac{Y}{\delta} = \frac{x^2/2\left(\ell - \frac{x}{3}\right)}{\left(\ell^3/3\right)}$$

$$Y = \frac{3x^2\left(\ell - x/3\right)}{2\ell^3} \times \delta .$$

8. 10 cm పొడవు, 50 cm వ్యాసార్థము కలిగిన స్థూపాకారముగా మార్చుటకు 10 cm వెడల్పు, 0.2 mm మందము కలిగిన ఒక లోహపు పలకను వంచితిరి. ఆ లోహము యొక్క యంగ్ గుణకము $1.5 \times 10^{11}\ N-m^2$ అయితే,

(1) కుంభాకార ఉపరితలము పై వికృతి మరియు ప్రతిబలాలు

(2) వంపు భ్రామకము $\left[\text{Ans: } 3\times10^7\ Nm^2,\ 2\times10^{-4}\ 2,\ 2\times10^{-2}\ N-m\right]$

సూచన : (1) వికృతి $= \frac{Z}{R} = \frac{2\times10^{-4}}{2} \times \frac{1}{0.5} = 2\times10^{-4}$

ప్రతిబలం $= Y \times$ వికృతి $= \left(1.5\times10^{11}\right)\left(2\times10^{-4}\right) =$

(2) వంపు భ్రామకము $= \frac{YI}{R} = \frac{Y}{R}\times\frac{bd^3}{12}$

9. $50\ cm$ పొడవు కలిగిన కాంటాలీవరు భారము తగిలించిన వైపు $15\ mm$ నిమ్నతకు గురయినది. అది స్థిరంగా బిగించిన చివర భాగము నుండి $30\,cm$ దూరంలో ఎంత నిమ్నత కలిగి ఉంటుంది? $\left[\text{Ans}: 6.48\times10^{-3}\ m\right]$

సూచన : $Y = \frac{Mgx^2}{2YI}\left(\ell - \frac{x}{3}\right)$

$x = 0.5m,\ y = 0.015\,m$ అయినపుడు

$\therefore 0.015 = \frac{Mg(0.5)^2}{2YI}\left(0.5 - \frac{0.5}{3}\right)$ ---------- (1)

$x = 0.3m,\ y = ?$

$y = \frac{mg(0.3)^2}{2YI}\left(0.5 - \frac{0.3}{3}\right)$ --------- (2)

(1), (2) సమీకరణాలని పరిష్కరించగా 'Y' విలువ వచ్చును.

10. $40\ cm$ దూరము కలిగిన రెండు కత్తి అంచుల పైన ఒక వలయాకార కడ్డీ సౌష్టవంగా ఆధారపడి యుండెను. ఆ కడ్డీ యొక్క మొత్తము పొడవు $60\ cm$ మరియు వ్యాసార్థము $4\ mm$. ప్రతి చివరి భాగమున $5\ Kg$ భారమును వ్రేలాడదీయగా ఆ కడ్డీ యొక్క మధ్య భాగము $4.8\ mm$ పైకి లేచినప్పుడు దాని యొక్క యంగ్ గుణకము ఎంత?

$\left[\text{Ans}: 20.31\times10^{10}\ N/m^2\right]$

4.9 చదువదగిన గ్రంథాలు

1. Academy Publication (భౌతికశాస్త్రము మొదటి సంవత్సరము)
2. Physics : Resnick & Halliday
3. Fundamentals of Physics : Halliday, Robert Resnick and Walker - Weiley Eastern
4. Mechanics, Waves and Oscillations : S.L. Gupta & Sanjiv Gupta - Jai prakashnath and Company.

ప్రయోగము : 4

స్ప్రింగుల సంధానములు

ఉద్దేశము : భారగ్రస్త స్ప్రింగులను శ్రేణిలో మరియు సమాంతరముగా కలిపి, కంపనాలను అధ్యయనం చేయుట, బల స్థిరాంకముల మధ్య సంబంధమును నిర్ధారించుట.

పరికరములు : రెండు స్పైరల్ స్ప్రింగులు, ద్రవ్యరాశి, ఆపు గడియారము, రిటార్ట్ స్టాండు, త్రాసు.

వర్ణన : రెండు స్పైరల్ స్ప్రింగులకు బరువును పటములో చూపిన విధముగా శ్రేణి మరియు సమాంతర సంధానములను ఏర్పరచి, నిలువతలంలో వాటి ఆవర్తన కాలములను కొలవవలెను.

సిద్ధాంతము : m_1, m_2 లు స్ప్రింగ్‌ల ద్రవ్యరాశులు. K_1, K_2 లు వాటి స్ప్రింగ్ స్థిరాంకములు అనుకొనుము. వాటికి M ద్రవ్యరాశిని వ్రేలాడదీసి నిలువుగా కంపింప చేసినపుడు వాటి ఆవర్తనకాలములు T_1, T_2 అయితే,

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{M + \frac{m_1}{3}}{K_1}}$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{M + \frac{m_2}{3}}{K_2}}$$

$$K_1 = \frac{4\pi^2}{T_1^2}\left(M + \frac{m_1}{3}\right)$$

$$K_2 = \frac{4\pi^2}{T_2^2}\left(M + \frac{m_2}{3}\right)$$

ఆ స్ప్రింగ్‌లను శ్రేణిలో కలిపి, M ద్రవ్యరాశితో కంపింప చేసినపుడు ఆవర్తనకాలము T_3 మరియు సమాంతరముగా కలిపినపుడు ఆవర్తనకాలము T_4 అయిన,

$$\text{శ్రేణి స్ప్రింగ్ స్థిరాంకము} \quad K_3 = \frac{4\pi^2}{T_3^2}\left[M + \frac{m_1 + m_2}{3}\right]$$

$$\text{సమాంతర స్ప్రింగ్ స్థిరాంకము} \quad K_4 = \frac{4\pi^2}{T_4^2}\left[M + \frac{m_1 + m_2}{3}\right]$$

సైద్ధాంతికంగా వాటి విలువలు

$$K_3 = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}, \quad K_4 = K_1 + K_2$$

ప్రయోగాత్మక, సైద్ధాంతిక విలువలను పోల్చవచ్చును.

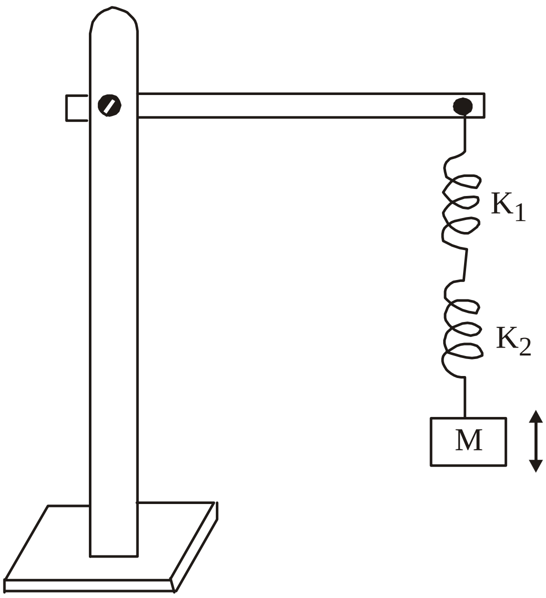


Fig. 1

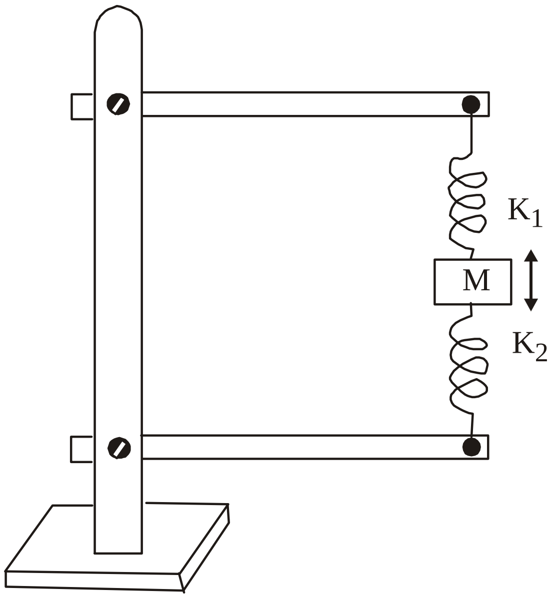


Fig. 2

పద్ధతి : మొదట స్ప్రింగ్‌లను ద్రవ్యరాశిని విడివిడిగా వ్రేలాడదీసి, 20 కంపనాలకు పట్టు కాలము కనుగొనవలెను. దీనిని రెండుసార్లు చేసి, సరాసరి లెక్కించి, ఆవర్తనకాలములు T_1, T_2 లను లెక్కించాలి. ఇప్పుడు ఆ స్ప్రింగ్‌లను శ్రేణిలో పటములో చూపిన విధముగా కలిపి, అదే ద్రవ్యరాశిని వ్రేలాడదీసి ఆవర్తనకాలము T_3 కనుగొనాలి. మరల స్ప్రింగ్‌లను సమాంతరముగా కలిపి, ఆవర్తనకాలము T_4 కనుగొనాలి. తరువాత స్ప్రింగ్ ద్రవ్యరాశులు m_1, m_2 లను త్రాసుతో కొలవాలి.

సూత్రములనుపయోగించి, K_1, K_2, K_3, K_4 విలువలను లెక్కించాలి. సైద్ధాంతిక, ప్రయోగాత్మక విలువలను పోల్చవలెను.

పరిశీలనలు : వ్రేలాడదీసిన ద్రవ్యరాశి (M) =

స్ప్రింగ్ ద్రవ్యరాశులు m_1 =...................................... m_2 = ...

వ.సం.	అమరిక	20 డోలనములకు పట్టుకాలము			ఆవర్తన కాలము	స్ప్రింగ్ స్థిరాంకము
		1వసారి	2వసారి	3వసారి		
1	మొదటి స్ప్రింగ్				T_1	K_1
2.	రెండవ స్ప్రింగ్				T_2	K_2
3.	శ్రేణి సంధానము				T_3	K_3
4.	సమాంతర సంధానము				T_4	K_4

సైద్ధాంతిక విలువలు

$$K_3 = \frac{K_1\ K_2}{K_1 + K_2} =$$

$$K_4 = K_1 + K_2 =$$

ఫలితము : స్ప్రింగ్‌ల శ్రేణి, సమాంతర సంధానాల స్ప్రింగ్ స్థిరాంకముల సూత్రములను నిర్ధారించడమైనది.

సంధానము	ప్రయోగాత్మక విలువ	సైద్ధాంతిక విలువ
1. శ్రేణి		
2. సమాంతర		

జాగ్రత్తలు :

1. కంపన పరిమితి తక్కువగా ఉండవలెను.

యూనిట్ - 2

పాఠం - 5 # కేంద్రీయ బలాలు

ఉద్దేశాలు

ఈ పాఠ్యాంశము అధ్యయనము పిమ్మట విద్యార్థి

- కేంద్రీయ బలమును అర్థం చేసుకొనుట.
- కేంద్రీయ బలము స్థితిజశక్తి రుణనతిక్రమమం అనే విషయమును గ్రహించుట.
- కేంద్రీయ బలమునకు లోనైన వస్తువు చలనమునకు సమీకరణము రాబట్టగలుగుట.
- విలోమవర్గ నియమమును పాటించు బలమునకు లోనైన వస్తువు చలనమును విశ్లేషింపగలుగుట.
- కొన్ని సందర్భములలో గురుత్వక్షేత్రము, గురుత్వ శక్మములకు సమీకరణములను రాబట్టగలుగుట.
- విశ్వ గురుత్వ క్షేత్ర సిద్ధాంతమును అవగాహన చేసుకొనగలుగుట.
- కెప్లర్ గ్రహ గమన సూత్రములను నిర్వచించి, నిరూపింపగలుగుట.

పాఠ్యాంశ నిర్మాణక్రమము

5.1 ఉపోద్ఘాతము

ఈ అధ్యాయములో గురుత్వ, స్థిర విద్యుత్ బలముల రెంటికి ఏకీకృతమైన లక్షణము ఒకటి కలదని తెలుసుకుంటాము. ఈ పాఠంలో విశ్వగురుత్వ సిద్ధాంతము, కెప్లర్ గ్రహగమన సూత్రములను కూడా చదువుకుంటాము.

5.2 కేంద్రీయ బలములు

ఒక బలము గనుక ఎల్లప్పుడూ ఒక స్థిర బిందువు వైపుగాని, ఒక స్థిర బిందువు నుండి గాని పని చేస్తూ, ఆ బలము యొక్క పరిమాణము ఆ స్థిర బిందువు నుండి గల దూరం మీద మాత్రమే ఆధారపడి ఉన్నచో అటువంటి బలాన్ని కేంద్రీయ బలం అంటారు.

ఉదాహరణలు :

1. గురుత్వాకర్షణ బలం 2. స్థిర విద్యుత్ బలం 3. స్ప్రింగు నుండి వేలాడదీసిన ద్రవ్యరాశి పై పనిచేసే స్థితిస్థాపక శక్తి

5.2.1 కేంద్రీయ బలాల ముఖ్య లక్షణాలు : కేంద్రీయ బలాల ముఖ్య లక్షణాలు ఈ క్రింద సూచించబడినవి.

1. కేంద్రీయ బలమును సాధారణముగా ఈ క్రింది రూపములో సూచిస్తాము.

$$F = \hat{r}\ f(r)$$

ఇందులో $f(r)$ ఒక కణము స్థిర బిందువు 'r' దూరంలో ఉంటే $f(r)$ ఆ 'r' దూరం యొక్క ప్రమేయము.

r - స్థాన సదిశ వెంబడి ఏకాంక సదిశ

2. $f(r) < 0$ అనగా ఋణాత్మకము అయితే, కేంద్రీయ బలము ఆకర్షణము

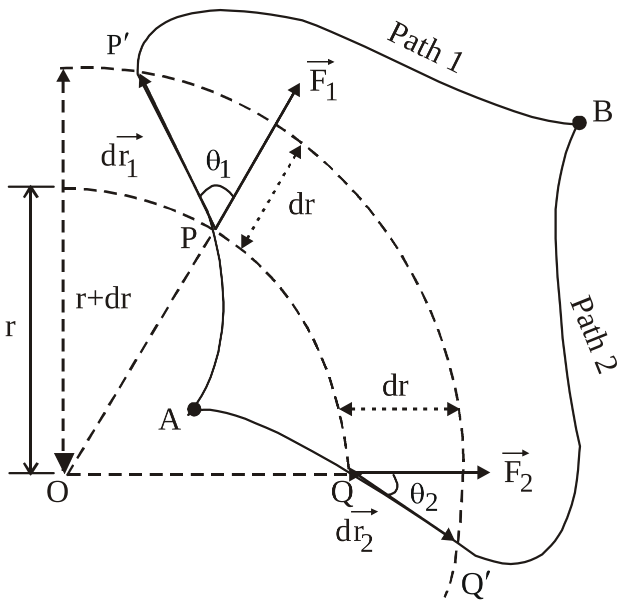
$f(r) > 0$ అనగా ధనాత్మకము అయితే, కేంద్రీయ బలము వికర్షణము

3. ఒక బలము గనుక ఏదయినా ఒక కణం మీద పనిచేస్తూ, ఆ కణాన్ని ఒక బిందువు నుండి రెండవ బిందువుకి కదిలించి, తిరిగి రెండవ బిందువు నుండి మొదటి బిందువుకి కదిలించినపుడు (ఆ సంవృత పథం వెంబడి) ఆ బలము చేసిన మొత్తము పని గనుక సున్నా అయితే దానిని నిత్యత్వబలం అంటారు.
4. కేంద్రీయ బలాల వలన ఒక కణము మీద పని చేయు టార్క్ ఎల్లప్పుడూ సున్నానే.
5. కేంద్రీయ బలాల విషయంలో కోణీయ ద్రవ్యవేగం ఎల్లప్పుడూ స్థిరంగా ఉంటుంది.
6. కేంద్రీయ బలానికి లోనైన, ఒక కణము యొక్క వైశాల్య వేగం స్థిరంగా ఉంటుంది.

5.2.2 కేంద్రీయ బలాలకు గల నిత్యత్వ స్వభావం : ఒక బలము గనుక ఏదయినా ఒక కణం మీద పని చేస్తూ, ఆ కణాన్ని ఒక బిందువు A నుంచి రెండవ బిందువు B కి కదిలించి, తిరిగి B నుంచి మొదటి బిందువు A కి కదిలించినపుడు (ఆ సంవృత పథం

వెంబడి) ఆ బలము చేసిన మొత్తము పని గనుక సున్నా అయితే దానిని నిత్యత్వ బలం అంటారు.

A, B అను రెండు బిందువులు రెండు వేర్వేరు స్వేచ్ఛా (Path - 1, Path - 2) పథములచే కలుసుకొనినవి(పటము 5.1). ఒక కణము A నుంచి B కి కేంద్రీయ బల ప్రభావము వలన ఈ రెండు పథము లేక దారి (path) లో కదులుచున్నది. పటములో చూపించిన విధముగా కేంద్రీయ బలము 'O' బిందువు నుండి వేరొక దిశలో పని చేస్తుంది. $r, r+dr$ వ్యాసార్థము కలిగిన రెండు ఆర్క్‌లను గీయవలెను. ఆ రెండు ఆర్క్‌లు P, P^1 మరియు Q, Q^1 అను పథములను తాకును.



పటము 5.1

PP^1 అనునది dr_1 మరియు QQ^1 అనునది dr_2 అనుకుందాము. ఇది ఆర్క్‌ల మధ్య Path - 1, Path - 2 ల వెంబడి కణము యొక్క స్థాన భ్రంశాలు. ఒక కణము P మరియు Q బిందువుల వద్ద ఉన్నప్పుడు ఆ కణము మీద F_1 మరియు F_2 అను కేంద్రీయ బలాలు క్రమానుసారంగా పని చేయుచున్నవి. F_1 మరియు dr_1 ల మధ్య కోణము θ_1 మరియు F_2 మరియు dr_2 ల మధ్య కోణము θ_2 అని అనుకొందాము. అప్పుడు F_1, F_2 ల వెంబడి dr_1, dr_2 ల స్థానభ్రంశము యొక్క ప్రక్షేపములు $dr_1 \cos\theta_1$ మరియు $dr_2 \cos\theta_2$ అని అనుకొందాము.

కాని, $dr_1 \cos\theta_1 = dr_2 \cos\theta_2 = dr$ అయితే

$\therefore F_1 \cdot dr_1 = F_2 \cdot dr_2$ ($\because$ P, Q స్థిర బిందువు నుంచి సమాన దూరము కావున $F_1 = F_2$)

అదే విధముగా పథము - 1 మరియు పథము - 2 లలోని ప్రతి ఖండమునకు ఈ విధమైనటువంటి ఫలితాలను పొందవచ్చును.

సాధారణంగా $$\underset{\text{Path}-1}{\int_A^B F\cdot dr} = \underset{\text{Path}-2}{\int_A^B F\cdot dr}$$

ఈ విధముగా ఒక కణము మీద పని చేయు కేంద్రీయ బలము మరియు అవి A నుండి B బిందువునకు కదులుచున్న విషయములో అది పథము మీద ఆధారపడదు. కావున కేంద్రీయ బలము నిత్యత్వ బలము.

5.2.3 స్థితిశక్తి యొక్క ఋణాత్మక నతిక్రమంగా (ప్రవణతగా) నిత్యత్వ బలం

$$U(\bar{r}) = -\int_{r_0}^{r} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} \text{ ---------- } (1)$$

$\overrightarrow{F}$ ని అంశరూపంలో రాస్తే

$$\overrightarrow{F} = \hat{i}\, F_x + \hat{j}\, F_y + \hat{k} F_z$$

స్థానభ్రంశ సదిశ యొక్క అంశరూపం

$$\overrightarrow{dr} = \hat{i} dx + \hat{j} dy + \hat{k}\, dz$$

$$\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \left(\hat{i} F_x + \hat{j} F_y + \hat{k} F_z\right) \cdot \left(\hat{i}\, dx + \hat{j}\, dy + \hat{k}\, dz\right)$$

$$= F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz \text{ ....}(2)$$

$$U(r) = -\int_{r_0}^{r} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = -\int_{x_0}^{x} F_x dx - \int_{y_0}^{y} F_y dy - \int_{z_0}^{z} F_z dz$$

$$= \int U(x, y, z)$$

ఈ సమీకరణాన్ని, x, y, z ల పరంగా అవకలనం చేయగా

$$F_x = -\frac{\partial u}{\partial x},\ F_y = -\frac{\partial u}{\partial y}\ \&\ F_z = -\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\therefore F = \hat{i}\, F_x + \hat{j} F_y + \hat{k} F_z$$

$$= -\hat{i}\frac{\partial u}{\partial x} - \hat{j}\frac{\partial u}{\partial y} - \hat{k}\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$= -\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) U$$

$$= -\nabla U = -\mathrm{grad} U$$

ఈ విధముగా మనము ఒక నిత్యత్వ బలాన్ని, స్థితి శక్తి యొక్క ఋణాత్మక (ప్రవణత) గ్రేడియంటే (నతిక్రమంగా) రాయవచ్చు.

మనకు తెలుసు $F = -\nabla U$

Curl $F = \nabla \times F = \nabla \times (\nabla U)$

$$= \nabla \times \left(\hat{i}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \hat{j}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \hat{k}\,\frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} \right) + \hat{j}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} \right) - \hat{k}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\text{Curl } F = \nabla \times F = 0$$

అర్థనాభి లంబ పొడవు $\ell = \dfrac{h^2}{\mu}$ మరియు

ఉత్కేంద్రత $\in = \dfrac{Ah^2}{\mu}$ అవుతాయి.

పైగా ఈ శాంకవము $\in < 1$ విలువకు దీర్ఘవృత్తము ;
$\in = 1$ విలువకు పరావలయము ;
$\in > 1$ విలువకు అతిపరావలయము. } అవుతుంది

ఇప్పుడు కక్ష్య యొక్క స్వభావాన్ని, మొత్తం శక్తి $\in$ ఆధారంగా అర్థం చేసుకోవడానికి ప్రయత్నం చేద్దాం. ఒక గ్రహము యొక్క మొత్తము శక్తి గతిజ శక్తి మరియు స్థితిజ శక్తి సమానము.

గతిజ శక్తి $= \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}m\left[\left(\dfrac{dr}{dt} \right)^2 + r^2\left(\dfrac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]$

$$= \frac{1}{2}m\left[h^2\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + h^2u^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2}mh^2\left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right]$$

కేంద్రీయ బలము వలన ఒక వస్తువు యొక్క చలన సమీకరణము $\frac{d\theta}{dt}=\frac{h}{r^2}=hu^2$

$$\frac{dr}{dt}=-r^2\frac{du}{dt}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}\ =\frac{-1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}]$$

$$=\frac{1}{2}m\left[A^2\sin^2(\theta-\theta_0)+\left\{\frac{\mu}{h^2}+A\cos(\theta-\theta_0)\right\}^2\right]\quad ((4)\text{ eq. ఉపయోగించి})$$

$$=\frac{1}{2}mh^2\left[A^2+\frac{\mu^2}{h^4}+\frac{2\mu A}{h^2}\cos(\theta-\theta_0)\right]$$

గ్రహము యొక్క స్థితిజ శక్తి

$$\text{P.E.}=\int P dr=\int\frac{\mu}{r^2}dr=-\frac{\mu}{r}=-\mu u$$

ఈ సమాకలనంలో, సమాకలన స్థిరాంకము సున్నా అయ్యేటట్లుగా అనంత దూరం $(r=\propto)$ వద్ద శక్మము సున్నాగా తీసుకుని దానినే నిర్దేశ బిందువు (reference point)గా గ్రహిస్తాము.

$$\text{స్థితిజ శక్తి }=mv=-\mu um=-\mu m\left[\frac{\mu}{h^2}+A\cos(\theta-\theta_0)\right]$$

$\therefore$ మొత్తము శక్తి $E=\text{P.E.}+\text{K.E.}$

$$E=\frac{1}{2}mh^2\left[A^2+\frac{\mu^2}{h^4}+\frac{2\mu A}{h^2}\cos(\theta-\theta_0)\right]-\mu m\left[\frac{\mu}{h^2}+A\cos(\theta-\theta_0)\right]$$

$$=\frac{1}{2}mh^2\left[A^2+\frac{\mu^2}{h^4}+\frac{2\mu A}{h^2}\cos(\theta-\theta_0)-\frac{2\mu^2}{h^4}-\frac{2\mu A}{h^2}\cos(\theta-\theta_0)\right]$$

$$=\frac{1}{2}mh^2\left[A^2-\frac{\mu^2}{h^4}\right]$$

$$\therefore\frac{2E}{mh^2}=A^2-\frac{\mu^2}{h^4}\text{ or}$$

$$A^2=\frac{2E}{mh^2}+\frac{\mu^2}{h^4}$$

$$\therefore A = \left[\frac{2E}{mh^2} + \frac{\mu^2}{h^2}\right]^{1/2}$$

$$= \frac{\mu}{h^2}\left[1 + \frac{2Eh^2}{m\mu^2}\right]^{1/2}$$

దీని నుంచి, శాంకవం యొక్క ఉత్కేంద్రత

$$\in = \frac{Ah^2}{\mu} = \left[1 + \frac{2Eh^2}{m\mu^2}\right]^{1/2}$$

$E<0$ అయిన, $\in<1$ అయి, దీర్ఘ వృత్తము లభించును.

$E=0$ అయిన, $\in=1$ అయి, పరావలయం లభించును.

$E>0$ అయిన, $\in>1$ అయి, అతి పరావలయం లభించును.

పర్యవసానంగా క్రింది విషయాలు స్పష్టము

1. మొత్తం శక్తి ధనాత్మకం అయితే $(E>0)$ పథము పరావలయం అవుతుంది. కక్ష్య సంవృత్తము కాదు. వ్యవస్థ బంధితం కాదు.

5.2.4 కేంద్రీయ బలానికి లోనయిన వస్తువు చలన సమీకరణం

కేంద్రీయ బల ప్రభావం వలన ఏదయినా ఒక వస్తువు చలిస్తుందని అనుకుందాము. ధ్రవ్య నిరూపకములు (Polar co-ordinates) పరంగా కక్ష్యా వ్యాసార్థము వెంబడి వేగము, త్రిజ్యా వేగము, వ్యాసార్థమునకు లంబముగా యుండే వేగము తిర్యక్ వేగము అందురు.

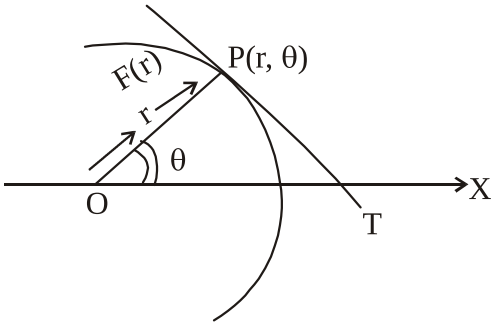
అదే విధముగా త్రిజ్యా వేగము $= \frac{dr}{dt}\hat{r}$

ఈ క్రింది సమీకరణాలు మనకు తెలుసు

త్రిజ్యా (వ్యాసార్థీయ) త్వరణం $= \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ ----------- (1)

తిర్యక్ త్వరణము $= \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$

కాని, కేంద్రీయ బలాల విషయంలో, బలము గాని, త్వరణము గాని ఎల్లప్పుడూ స్థిర బిందువు 'O' దిశగానే ఉంటాయి. అనగా కేవలం త్రిజ్యా వ్యాసార్థీయ త్వరణం మాత్రమే ఉంటుంది, తిర్యక్ త్వరణం శూన్యం.



$$\therefore \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0$$

or $r^2\dfrac{d\theta}{dt} =$ ఒక స్థిరరాశి

$= h$

Let $\dfrac{1}{r} = u \Rightarrow r = \dfrac{1}{u}$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}$$

$$= -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$= -r^2\frac{d\theta}{dt}\frac{du}{d\theta}$$

$$= -h\frac{du}{dt}$$

$$\frac{dr^2}{dt^2} = -h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{dt}\right)$$

$$= -h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt}$$

$$= -h\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{d\theta}{dt}$$

$$= -h\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{h}{r^2};\ \left[\because \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}\right]$$

$$= -\frac{h^2}{r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$= -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$\frac{d^2r}{dt^2}$ విలువను (1) వ సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపిస్తే

$$\text{త్రిజ్యా(వ్యాసార్థ) త్వరణము} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$= -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - r\frac{h^2}{r^4}$$

$$= -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - h^2u^3$$

ఒక కణము పై పని చేయు బలము, $F = ma$

$F = m \times$ త్రిజ్యా(వ్యాసార్థ) త్వరణము

కేంద్రీయ బలము, $F =$ ద్రవ్యరాశి × వ్యాసార్థ త్వరణము

$$= -m\left[-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - h^2u^3\right]$$

$$= m\left[h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} + h^2u^3\right]$$

ఋణసంజ్ఞ బలము ఆకర్షణ బలమని సూచించును.

$\frac{F}{m} = P$, P అనునది ఏకాంక ద్రవ్యరాశి పై పనిచేయు బలము.

$$P = h^2u^2 - \left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right) + h^2u^3 \qquad \text{i.e.} \quad \boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{P}{h^2u^2}}$$

ఇదియే కేంద్రీయ బల ప్రభావానికి లోనయి చలిస్తున్న కణం యొక్క చలన సమీకరణం. ఇచ్చట P అనేది కణం యొక్క ఏకాంక ద్రవ్యరాశి మీద పనిచేసే కేంద్రీయ బల పరిమాణము.

5.4 న్యూటన్ విశ్వ గురుత్వ నియమము

విశ్వంలో ద్రవ్యరాశిని కలిగి ఉన్న ప్రతి కణము, ద్రవ్యరాశిని కలిగియున్న వేరొక కణముతో కొంత బలముతో ఆకర్షించబడుతుంది. ఆ బలము ద్రవ్యరాశుల లబ్ధమునకు అనులోమానుపాతంగాను, మరియు వాటి మధ్య దూర వర్గానికి విలోమానుపాతంగా ఉంటుంది. ఆ బలము రెండు కణముల యొక్క ద్రవ్యరాశుల కేంద్రములను కలుపు సరళరేఖ మీదనే పని చేస్తూ ఉంటుంది.

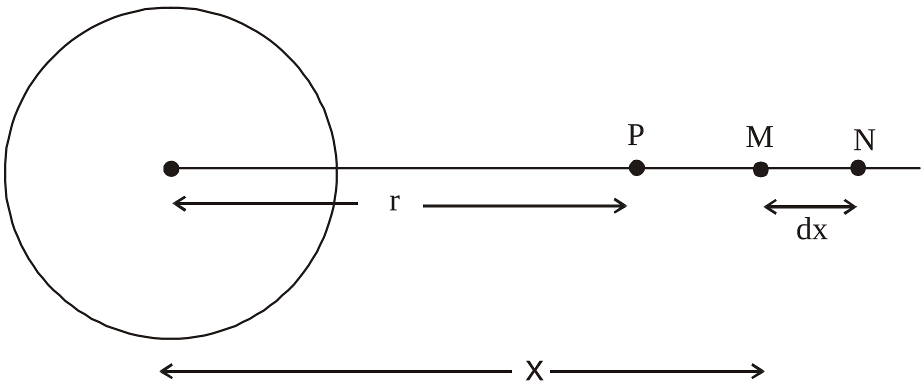
$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

G – విశ్వ గురుత్వ స్థిరాంకము m_1, m_2 – రెండు కణాల ద్రవ్యరాశులు r – రెండు కణాల మధ్య దూరము

5.4.1 గురుత్వ క్షేత్రము : ఒక ద్రవ్యరాశి చుట్టూ దాని గురుత్వాకర్షణ బలం యొక్క ప్రభావం ఎంత మేరకు విస్తరించి ఉంటుందో ఆ ప్రదేశమునంతయు ఆ ద్రవ్యరాశి వలన ఏర్పడిన గురుత్వ క్షేత్రము అంటారు.

గురుత్వ క్షేత్రములో ఒక బిందువు వద్ద ప్రమాణ ద్రవ్యరాశిని ఉంచినచో దానిపై పని చేసే బలమును, ఆ బిందువు వద్ద గల గురుత్వ క్షేత్ర తీవ్రత అంటారు.

5.4.3 గురుత్వ శక్మము : అనంత దూరము నుండి గురుత్వ క్షేత్రములోని ఒక బిందువు వద్దకు ప్రమాణ ద్రవ్యరాశిని తీసుకొని వచ్చుటకు చేయవలసిన పనిని ఆ బిందువు వద్ద ఉన్న గురుత్వ శక్మము అందురు.



పటము 5.3

'M' అను ద్రవ్యరాశి గల వస్తువు దాని చుట్టూనూ గురుత్వ క్షేత్రము ఏర్పడినది. ఆ క్షేత్రములో ఆ వస్తువు యొక్క ద్రవ్యరాశి కేంద్రము నుండి 'r' దూరంలో 'P' అను బిందువు ఉన్నదని అనుకుందాము(పటము 5.3).

అనంత దూరము నుండి ప్రమాణ ద్రవ్యరాశి వద్దకు 'P' బిందువు వద్దకు తీసుకొనువచ్చుటకు చేయవలసిన పనిని 'P' బిందువు వద్ద ఉన్న గురుత్వ శక్మము. వస్తువు యొక్క ద్రవ్యరాశి కేంద్రమయిన 'O'ను 'P'కి కలుపు రేఖను పొడిగించగా ఆ

పొడిగించిన రేఖ పై 'O' నుండి 'x' దూరంలో గల రెండు సన్నిహిత బిందువులు M, N ల మధ్య దూరము dx అనుకొనుము.

ముందుగా, N నుండి M కు ప్రమాణ ద్రవ్యరాశిని తీసుకొని వచ్చుటకు చేయవలసిన పని dw ని కనుగొందుము.

బలము మరియు స్థానభ్రంశముల బిందు లబ్దము పని విలువను తెలియజేయును.

ప్రమాణ ద్రవ్యరాశిని 'N' నుండి 'M'కు తీసుకొని వచ్చు సందర్భమున 'PO' దిశలో చేయు బలము $F = \frac{GM}{x^2}$

ప్రమాణ ద్రవ్యరాశి యొక్క స్థానభ్రంశము $= dx$ 'PO'దిశలో

$$\therefore dw = \vec{F} \cdot \vec{dx} = |\vec{F}|\, dx \cos\theta$$

$$= \frac{GM}{x^2} dx(1)$$

$$= \frac{GM}{x^2} dx$$

ప్రమాణ ద్రవ్యరాశిని అనంత దూరము నుండి 'P' వద్దకు తీసుకొని వచ్చుటకు చేయవలసిన మొత్తము పనియే P బిందువు వద్ద శక్మము.

$$\therefore V = \int_{\infty}^{r} dw$$

$$= GM \int_{\infty}^{r} \frac{1}{x^2} dx$$

$$= GM \left[\frac{-1}{x} \right]_{\infty}^{r}$$

$$= -GM \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty} \right]$$

$$V = -\frac{GM}{r}$$

Relation between potential and field :

We know $V = -\frac{GM}{r}$

అవకలనం చేయగా w.r.t. 'r'

$$\frac{dv}{dr} = -GM\left(\frac{-1}{r^2}\right)$$

$$\therefore \frac{dv}{dr} = \frac{GM}{r^2} \qquad \therefore F = \frac{Gm}{r^2}$$

$$-\frac{dv}{dr} = -\frac{GM}{r^2} = E$$ = Intensity of gravitational field at P

$$\therefore E = \frac{-dv}{dr}$$

గురుత్వ శక్మము దూరముతో మారే రేటు యొక్క ఋణరాశి గురుత్వ క్షేత్ర తీవ్రతను తెలియజేయును.

$$\left[E = -\text{Grad}\,\phi\right].$$

5.5 కెప్లర్ గ్రహ గమన సూత్రాలు

1. సూర్యుడు ఒక నాభి వద్ద ఉండేటట్లుగా, గ్రహాలన్నీ సూర్యుని చుట్టూ దీర్ఘవృత్తాకార కక్ష్యలలో తిరుగుతున్నాయి.
2. సూర్యుని నుండి గ్రహాన్ని కలిపే వ్యాసార్ధ సదిస సమాన కాల వ్యవధులలో సమాన వైశాల్యాలను చిమ్ముకుంటూ ప్రయాణిస్తుంది. లేదా గ్రహం యొక్క వైశాల్య వేగం స్థిరము.
3. గ్రహం యొక్క ఆవర్తన కాలం యొక్క వర్గము, ఆ గ్రహపు కక్ష్య యొక్క అర్థ గురు అక్షం యొక్క ఘనానికి అనులోమానుపాతంలో ఉంటుంది.

5.5.1 కెప్లర్ సూత్రాల ఉత్పాదన :

I - సూత్రము : 'M' ద్రవ్యరాశి గల సూర్యునికి, 'm' ద్రవ్యరాశి గల్గి సూర్యుని నుంచి 'r' దూరంలో నున్న గ్రహానికి మధ్య గల గురుత్వాకర్షణ బలం.

$$F = -G\frac{Mm}{r^2} = -\frac{\mu m}{r^2}$$

ఇచట $\mu = Gm$ ------- (1)

$\frac{-GM}{r^2}$ అనునది ఒక గ్రహము యొక్క త్వరణము. ఈ బలము ఎల్లప్పుడూ సూర్యుని వైపుగా ఉండును.

త్రిజ్యా(వ్యాసార్థ) త్వరణము $= \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

$$\therefore \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{-\mu}{r^2} \text{ -------- (2)}$$

తిర్యక్ త్వరణము $= \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$ --------- (3)

కాని తిర్యక్ త్వరణము సున్నా అవుతుంది.

$$\therefore \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0$$

$$\therefore r^2\ \frac{d\theta}{dt}=h \rightarrow \text{(స్థిరాంకము) -------- (3)}$$

కేంద్రీయ బలానికి సంబంధించిన చలన అవకలన సమీకరణము

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{P}{h^2u^2}$$

ఇచట $P=\frac{GM}{r^2}=GMu^2=\mu u^2$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{\mu u^2}{h^2u^2}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{\mu}{h^2}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+\left(u-\frac{\mu}{h^2}\right)=0$$

$$\text{i.e. } \frac{d^2}{d\theta^2}\left(u-\frac{\mu}{h^2}\right)+\left(u-\frac{\mu}{h^2}\right)=0 \text{ ---------- (4)}$$

ఈ అవకలన సమీకరణం యొక్క సాధారణ పరిష్కారము

$$x=A\cos(\theta-\theta_0)$$

A, θ_0 స్థిరాంకములు

$$\therefore u=\frac{+\mu}{h^2}+A\ \cos(\theta-\theta_0) \text{ ------- (5)}$$

$$\frac{1}{r}=\frac{\mu}{h^2}+A\cos(\theta-\theta_0)$$

$$\frac{1}{r}=\frac{1+\frac{Ah^2}{\mu}\cos(\theta-\theta_0)}{\frac{h^2}{\mu}}$$

$$\text{(or)} \quad \frac{1}{r} = \frac{1+\in\cos\alpha}{\ell} \quad \text{ఇచట} \quad \in = \frac{Ah^2}{\mu} \quad \text{-------- (6)}$$

ఇది శాంకవ (వక్రపు) సమీకరణం

మరియు

$\in > 1$ అయితే, అతి పరావలయము

$\in < 1$ అయితే, దీర్ఘవృత్తము

$\in = 1$ అయితే, పరావలయము

శక్తి పరంగా ఏ స్థితిలో ఏ కక్ష్యా మార్గము వెంబడి ప్రయాణించునో తెలిసికొనవచ్చును.

కాని ఏ క్షణములోనైనా గ్రహము గతిశక్తి, స్థితిశక్తిల మొత్తము స్థిరము. గ్రహపు గతిశక్తి $K.E = \frac{1}{2}mv^2$

$$= \frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}.$$

$\because$ వేగము = త్రిజ్యా వేగము + తిర్యక్ వేగము

$$v = \frac{dr}{dt} + r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$K.E. = \frac{1}{2}m\left\{h^2\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + h^2u^2\right\}$$

$$\left(\because \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u}\right) = -h\frac{du}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} = u^2h^2\right)$$

$$\therefore K.E. = \frac{1}{2}mh^2\left\{\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right\}$$

(5)వ సమీకరణము నుంచి $u = \frac{1}{r} = \frac{u}{h^2} + A\cos(\theta - \theta_0)$

$$\frac{du}{d\theta} = -A\sin(\theta - \theta_0)$$

$$\therefore K.E. = \frac{1}{2}mh^2\left\{A^2\sin^2(\theta-\theta_0) + \frac{\mu^2}{h^{2+}} + A^2\cos^2(\theta-\theta_0) + \frac{2\mu}{h^2}A\cos(\theta-\theta_0)\right\} \text{-------- (7)}$$

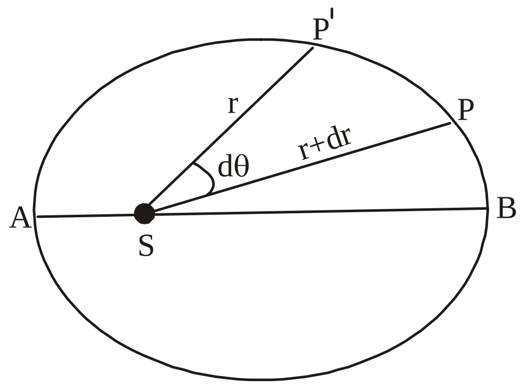
గ్రహము స్థితిజశక్తి

$$P.E. = \int_r^w -\frac{GHm}{r^2}\,dr = \int_{-r}^w -\frac{\mu m}{r^2} = \left[\frac{\mu m}{r}\right]_r^w$$

$$= -\frac{\mu m}{r} = -\mu m u = -\mu m\left[\frac{\mu}{h^2} + A\cos(\theta - \theta_0)\right]$$

(5)వ సమీకరణము $u = \frac{\mu}{h^2} + A\cos(\theta - \theta_0)$

II - **సూత్రము :**



పటము 5.6

వైశాల్య వేగం $= \frac{SPP^1 \text{ వైశాల్యం}}{dt}$

ఇక్కడ P నుంచి Δt కాలం తర్వాత P^1కి చేరిందనుకుందాము.

SPP^1 త్రికోణముగా పరిగణిద్దాము.

$\therefore SPP^1$ వైశాల్యము $= \frac{1}{2} r\,(r + dr) \sin\theta d\theta$

వైశాల్య వేగం $= \frac{1}{2}\frac{r(r + dr) \sin\theta d\theta}{dt}$

r^2 తో పోలిస్తే, rdr ని వదిలి వేయవలెను. మరియు $\sin\theta d\theta = d\theta$

వైశాల్య వేగం $= \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$

$$= \frac{h}{2} \quad \left[\because r^2 \frac{d\theta}{dt} = h\right]$$

'h' is constant

$\therefore$ వైశాల్య వేగం ఒక స్థిరరాశి.

అనగా సూర్యుని నుండి గ్రహాన్ని కలిపే వ్యాసార్థ సదిశ సమాన కాల వ్యవధులలో సమాన వైశాల్యాలను చిమ్ముకుంటూ ప్రయాణిస్తుంది.

III - **సూత్రము :**

$$\text{వైశాల్య వేగం} = \frac{\text{ఒక పూర్తి చుట్టు తిరగటంలో చిమ్మిన వైశాల్యం}}{\text{ఒక చుట్టు తిరగడానికి పట్టే కాలం}}$$

సూర్యుని చుట్టూ ఒకసారి పూర్తిగా తిరిగి రావడానికి గ్రహానికి పట్టే కాలం 'T' అనుకుంటే,

$$T = \frac{\text{ఒక పూర్తి చుట్టు తిరగటంలో చిమ్మిన వైశాల్యం}}{\text{వైశాల్య వేగం}}$$

$$T = \frac{\pi ab}{h/2}$$

దీర్ఘ వృత్తం ధర్మాల నుంచి, $l = \frac{b^2}{a}$ $\ell -$Semilatus recturn (అర్థ లంబ నాభి పొడవు)

కాని అర్థ లంబ నాభి పొడవు $\frac{h^2}{\mu}$ కి సమానం

$$\therefore \frac{b^2}{a} = \frac{h^2}{\mu}$$

$$\therefore h = b\sqrt{\frac{\mu}{a}}$$

(1)వ సమీకరణంలో 'h' విలువను ప్రతిక్షేపిస్తే

$$T = \frac{2\pi ab}{b\sqrt{\frac{\mu}{a}}}$$

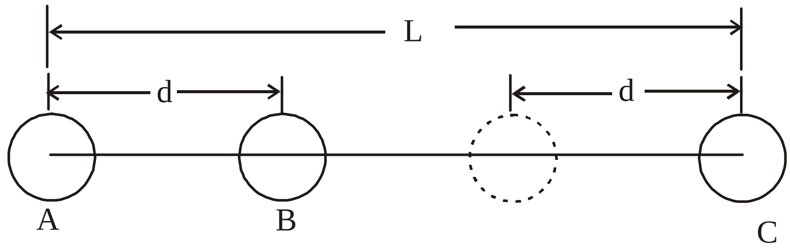
$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3$$

$$T^2 \propto a^3$$

దీన్నిబట్టి ఒక గ్రహం యొక్క ఆవర్తన కాలం యొక్క వర్గము, ఆ గ్రహపు కక్ష్య యొక్క అర్థ గురు అక్షం యొక్క ఘనానికి అనులోమానుపాతంలో ఉంటుంది.

5.6 సాధించిన సమస్యలు

1. A, B, C అను మూడు గోళముల యొక్క ద్రవ్యరాశులు $m_A = 800$ gm, $m_B = 100$ gm, $m_C = 200$ gm. వాటిని ఈ క్రింది విధంగా పెట్టాము. $L = 12$ cm, $d = 4$ cm తో వాటి కేంద్రములు మూడు కూడా ఒకే రేఖ మీద ఉన్నవి.



'C' కేంద్రము నుండి 4 cm దూరము వరకు 'B' గోళమును ఆ రేఖ వెంబడే కదిలించబడినది.

అప్పుడు (ఎ) 'B'ని కదిలించటంలో మీరు చేసిన పని ఎంత?

(బి) A, C ల వలన 'B' యొక్క మొత్తము గురుత్వ బలము.

పరిష్కారము :

(ఎ) 'B'ని కదిలించుటలో చేసిన పని = $w = u_f - v_i = Gm_B\left[m_A\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{(L-d)}\right)+m_C\left(\frac{1}{L-d}-\frac{1}{d}\right)\right]$

$$= 6.67\times10^{11}m^3s^{-2}kg^{-1}\ 0.10\,kg\left[0.80kg\left(\frac{1}{0.04m}-\frac{1}{0.08}\right)+0.20\,kg\left(\frac{1}{0.08m}-\frac{1}{0.04}\right)\right]$$

$$= +5\times10^{11}J$$

(బి) A, C ల వలన 'B' మీద ఫలిత గురుత్వ బలము చేయు పని

$$= -(u_f - v_i) = -5.0\times10^{-11}J$$

2. మార్స్ మరియు భూమి యొక్క వ్యాసములు 6.9×10^3 km, 1.3×10^4 km మార్స్ యొక్క ద్రవ్యరాశి భూమి యొక్క ద్రవ్యరాశి కంటే **0.11** రెట్లు ఉన్నది.

(ఎ) మార్స్ భూమిల సంబంధించిన సాంద్రత నిష్పత్తిని కనుగొనుము.

(బి) మార్స్ మీద ఉండే గురుత్వ త్వరణమును కనుగొనుము.

(సి) మార్స్ యొక్క పలాయన వేగమును కనుగొనుము.

పరిష్కారము :-

(ఎ) శంక్వాకార గోళము యొక్క సాంద్రత

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

$$\frac{\rho_m}{\rho_E} = \frac{M_m}{M_E} \cdot \frac{R_E^3}{R_M^3}$$

$$\frac{\rho_M}{\rho_E} = 0.11\left(\frac{0.65\times10^4}{3.45\times10^3}\right)^3 = 0.74$$

(బి) మార్స్ మీద ఉండే గురుత్వాకర్షణ వలన ఏర్పడే త్వరణము

$$\frac{a_{g_m}}{a_{g_E}} = \frac{GM_M}{R_m^2}\,\frac{{R_E}^2}{GM_E} = \frac{M_m R_E{}^2}{M_E\, R_M{}^2}$$

$$a_{g_m} = 0.11\left(\frac{0.65\times10^4}{3.45\times10^3}\right)^2 \times 9.8 = 3.7\ ms^{-2}$$

(సి) పలాయన వేగము

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{R}$$

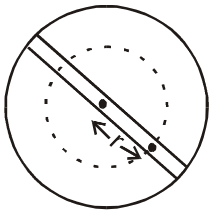
$$v^2 = \frac{2GM}{R}$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

మార్స్ యొక్క పలాయన వేగము $= \sqrt{\dfrac{2\times6.67\times10^{-11}\times0.11\times5.98\times10^{24}}{3.45\times10^6}}$

$$= 5\times10^3 m/s$$

3. బొమ్మలో చూపించిన విధంగా భూమి గుండా ఒక వైపు నుండి మరొక వైపునకు వ్యాసము వెంబడి ఒక సొరంగమును త్రవ్వాలి.



(ఎ) 'm' ద్రవ్యరాశి కలిగిన ఒక కణాన్ని సొరంగ మార&గము గుండా జార విడిచినపుడు సరళ హరాత్మకము అని

చూపించుము.

(బి) సొరంగమునకు ఒక వైపు జారవిడుచునప్పటికి మరో వైపు చేరునప్పటికి చేరు కాల వ్యవధి.

పరిష్కారము :

కణము పై భూమి యొక్క ఆకర్షణ ఆ కణము నుండి 'r' అను దూరము లోపల గల కర్పరముల వలన మాత్రమే ఏర్పడును. 'r' వ్యాసార్థము కలిగిన 'ρ' - భూమి సాంద్రత.

$$M' = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

ఆకర్షణ బలం $F = \frac{-GM'm}{r^2}$ $m-$ కణము యొక్క ద్రవ్యరాశి

$$F = -G\frac{4}{3}\frac{\pi r^3 \rho m}{r^2}$$

$$F = -K \cdot r$$

బలము 'r'కు అనులోమానుపాతంగా ఉంటూ మరియు వ్యతిరేక దిశలో ఉంటే ఆ కణము యొక్క చలనము సరళ హరాత్మకము.

(బి) సరళ హరాత్మక చలనము డోలనా ఆవర్తన కాలము

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{G\rho 4\pi m}}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 3m}{G\rho 4\pi m}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

$G = 6.67 \times 10^{-11}\ Nm^2\ Kg^{-2}$ మరియు $\rho = 5.5 \times 10^3\ Kgm^{-3}$ ప్రతిక్షేపిస్తే

మనకి వచ్చినవి $T = 5050\ sec$ or $84.2\ min$

గడచిన కాలము $= 42$ నిమిషాలు

4. ఒక ఉపగ్రహాన్ని భూమి నుంచి 100 మైళ్ళు ఎత్తుకు తీసుకువెళ్ళుటకు ఎంత క్షితిజ సమాంతర వేగము కావలెను. ఆ ఉపగ్రహం భూమి చుట్టూ వృత్తాకార కక్ష్యలో పరిభ్రమిస్తుంది. భూమి యొక్క వ్యాసార్థము 4000 మైళ్ళు. పరిభ్రమించుటకు డోలనా ఆవర్తనా కాలము ఎంత?

(ఎ) కక్ష్య యొక్క వ్యాసార్థము $r = 4000 + 100$

$$= 4100\ \text{miles}$$

$$= 6560\ \text{km}$$

$$= 6356 \times 10^6 \text{ m}$$

ఉపగ్రహము యొక్క కక్ష్య వేగము $V_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$

$$V_0 = \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.98 \times 10^{24}}{6.56 \times 10^6}} = 7808 \text{ ms}^{-1}$$

(బి) పరిభ్రమించుటకు పట్టు కాలము $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\omega = \frac{V_0}{r}$$

$$T = \frac{2\pi \times 6.56 \times 10^6}{7808} = 5276 \text{ sec}$$

$$= 88 \text{ min}$$

5. సూర్యుని నుంచి మార్స్‌కు ఉన్న దూరము, సూర్యుని నుంచి భూమికి ఉన్న దూరంలో **1.524** రెట్లు దూరము? మార్స్ సూర్యుని చుట్టూ ఒకమారు చుట్టి రావడానికి కనుగొనుము?

పరిష్కారము :-

$T^2 \propto r^3$ అని మనకు తెలుసు

$$\frac{T_M}{T_E} = \left(\frac{r_m}{r_E}\right)^{3/2}$$

$$T_M = T_E \left(\frac{r_m}{r_E}\right)^{3/2}$$

$$= 1 \text{year} \times (1.524)^{3/2}$$

$$= 1.88 \text{ years}$$

6. చంద్రుని యొక్క కక్ష్యా వ్యాసార్థము (R) ఆవర్తన కాలము 'T' లను ఉపయోగించి భూమి యొక్క ద్రవ్యరాశిని కనుగొనుము.

$T = 23.3$ రోజులు; $R = 2.39 \times 10^5$ మైళ్ళు

పరిష్కారము :

$$\frac{GM_e M_m}{r^2} = \frac{M_m v^2}{r}$$

$$= \frac{M_m r^2 \omega^2}{r}$$

$$= \frac{M_m r^2 4\pi^2}{T^2 r}$$

$$M_e = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

$T = 27.3$ days $= 2.359 \times 10^6 \text{ sec}$

$r = 2.39 \times 10^5$ miles $= 3.845 \times 10^8 \text{ m}$

భూమి యొక్క ద్రవ్యరాశి $M_e = \dfrac{4\pi^2 \left(3.845 \times 10^8\right)^3}{6.67 \times 10^{-11} \times 2.359 \times 10^6}$

$$= 6.04 \times 10^{24} \text{ Kg}.$$

5.7 సారాంశము

1. ఒక కణము పై పని చేసే బలము విలువ ఒక స్థిర బిందువు నుండి ఆ కణమునకు గల దూరము పై ఆధారపడి ఆ బల దిశ కణము వైపునకు దాని నుండి వెలువడే దిశను కాని కలిగియుంటే ఆ బలమును కేంద్రక బలమందురు.

2. కేంద్రక బలమునకు ఉదాహరణలు

   (ఎ) గురుత్వ బలము (ఆకర్షణ)

   (బి) స్థిర విద్యుత్ బలము (ఆకర్షణ లేదా వికర్షణ)

   (సి) తీగచుట్టకు వేలాడే ద్రవ్యరాశి పై పనిచేయు స్థితిస్థాపకతలు.

3. కేంద్రక బలము నిత్యత్వ బలము.

ఒక కణము పై పనిచేయు బలము ఆ కణ మార్గము పై ఆధారపడకుండా ఉండినపుడు దానిని నిత్యత్వ బలము అందురు. స్థిరశక్తి మార్పు రేటు యొక్క ఋణరాశి నిత్యత్వ బలమునకు సమానము.

4. కేంద్రక బలమునకులోనైన కణము యొక్క కోణీయ ద్రవ్య వేగము స్థిరము.

5. ఒక కణము పై కేంద్రక బలం పని చేయునపుడు ఆ కణ చలన సమీకరణము

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u = \frac{P}{h^2u^2}$$

$$h = r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad P = \frac{F}{m}$$

ప్రమాణ ద్రవ్యరాశి పై బలము $u = \frac{1}{r}$

6. రెండు ద్రవ్యరాశుల మధ్య పనిచేయు గురుత్వ బలము (ఆకర్షణ) ఎల్లప్పుడు ఆ రెండు ద్రవ్యరాశుల లబ్ధమునకు అనులోమానుపాతములోను మరియు ఆ రెండు ద్రవ్యరాశులన మధ్య గల దూర వర్గమునకు విలోమానుపాతములోను ఉండును.

$$F \propto m_1\ m_2 \text{ లు } \quad F \propto \frac{1}{r^2}$$

$$\therefore\ F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

r_1 , m_1 మరియు m_2 ల మధ్య దూరము G ని గురుత్వ త్వరణము అందురు.

8. గురుత్వ క్షేత్రములో ఏదైనా బిందువు వద్ద ప్రమాణ ద్రవ్యరాశినుంచితే, దాని పై పనిచేయు బలమునే గురుత్వ క్షేత్ర తీవ్రత అందురు.

9. గురుత్వ క్షేత్రములో ఏదైనా బిందువు వద్ద శక్మము $V = \frac{-GM}{r}$

10. గురుత్వ క్షేత్రములో ఏదైనా బిందువు వద్ద క్షేత్రపు మార్పు రేటునే ఆ బిందువు వద్ద క్షేత్రము అందురు.

$$E = -\frac{dv}{dr} \text{ or } E = -\text{Grad}\,\phi$$

11.

(ఎ) సూర్యుని చుట్టూ తిరిగే గ్రహము యొక్క మార్గము దీర్ఘ వృత్తముగా నుండి ఆ దీర్ఘ వృత్తము యొక్క ఒక కేంద్రము వద్ద భూమి ఉండెను.

(బి) సూర్యుని నుండి భూమికి గీయబడిన దీర్ఘ వృత్త వ్యాసార్థము సమకాల వ్యవస్థలలో సమకాలంలో సమ వైశాల్యలను దాటును.

(సి) సూర్యుని చుట్టూ తిరిగే ఏదైనా గ్రహము యొక్క డోలనావర్తన కాల వర్గము అర్థ దీర్ఘాక్ష పొడవు యొక్క మూడవన ఘాతమునకు అనులోమానుపాతములో నుండును.

5.8 కీలక పదాలు

కేంద్రీయబలము, కేంద్రీయ బల నిత్యత్వము, విలోమవర్గ నియమము, విశ్వ గురుత్వ సిద్ధాంతము, గురుత్వక్షేత్రము, గురుత్వశక్మము, కెప్లర్ సూత్రములు.

5.9 స్వయం సమీక్షాప్రశ్నలు

వ్యాసరూప ప్రశ్నలు

1. "కేంద్రీయ బలాలు" నిర్వచించుము. నిత్యత్వ బలమును వివరించు కేంద్రీయ బలం నిత్యత్వ బలమని చూపండి.
2. కెప్లరు గ్రహగమన సూత్రాలను నిర్వచించండి. న్యూటను విలోమ వర్గ గురుత్వ సూత్ర ఆధారంగా కెప్లరు సూత్రాలను రాబట్టండి.
3. కెప్లరు రెండవ సూత్రాన్ని నిర్వచించి, అది కోణీయ భ్రామక నిత్యత్వ సూత్ర ఫలితమేనని చూపండి.
4. కేంద్రీయ బలమునకు లోనైన ఒక కణముకు లోనైన ఒక కణము యొక్క చలనానికి సమీకరణమును రాబట్టండి.

లఘు ప్రశ్నలు

1. గురుత్వక్షేత్రము, గురుత్వ శక్మములను వివరించండి.
2. కేంద్రీయ బలము నిత్యత్వమని చూపండి.
3. కేంద్రీయ బల పరిధిలో కోణీయ భ్రామక నిత్యత్వమును చర్చించండి.
4. కెప్లరు గ్రహ గమన సూత్రాలను వివరించండి.
5. కెప్లరు మూడవ గ్రహ గమన సూత్రాన్ని రాబట్టండి.
6. కెప్లరు రెండవ సూత్రాన్ని, కేంద్రీయ బల పరిధిలో రాబట్టుట.

అభ్యాసము :

1. ఒక ఉపగ్రహాన్ని భూమి నుంచి 1000 మైళ్ళు ఎత్తుకు తీసుకువెళ్ళుటకు ఎక్కువ శక్తి అవసరమవుతుందా లేక కక్ష్యలో ప్రవేశపెట్టుటకు ఎక్కువ శక్తి అవసరమవుతుందా? భూమి యొక్క వ్యాసార్థము 4000 మైళ్ళు.

   (ఇదే సమస్యను 1000 మైళ్ళుకు మారుగా 2000 మైళ్ళుకు మరియు 3000 మైళ్ళుకు తీసుకుని పరిష్కరించండి.)

   సూచన : భూమి ఉపరితలం నుంచి 'h' ఎత్తుకు ఉపగ్రహాన్ని తీసుకువచ్చుటకు చేయుపని, దాని స్థితిజ శక్తి పొందుటకు సమానమవుతుంది.

$$w_1 = \frac{GM_m h}{R(R+h)}$$

ఉపగ్రహాన్ని 'h' ఎత్తులో కక్ష్యలో ప్రవేశ పెట్టుటకు చేయు అధిక పని దానికి మనమివ్వవలసిన అధిక గతిజ శక్తికి సమానమవుతుంది.

కక్ష్యయ వేగము $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{2h}{R}$$

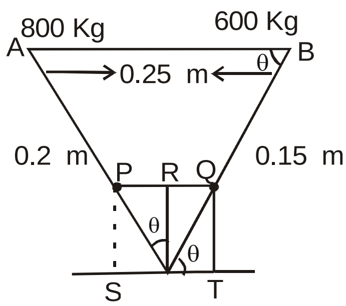
జ॥

h	1000 మైళ్ళు	2000 మైళ్ళు	3000 మైళ్ళు
$\frac{w_1}{w_2}$	0.5	1	1.5
	$w_1 < w_2$	$w_1 = w_2$	$w_1 > w_2$

2. 1.5×10^{11} m వ్యాసార్థముతో భూమి వలయాకార కక్ష్యలో చలిస్తుంది. సూర్యుని చుట్టూ మార్స్ 687 రోజులు పరిభ్రమిస్తుంది. సూర్యుని చుట్టూ ఉన్న మార్స్ కక్ష్య వ్యాసార్థము ఎంత?

[సూచన : $T^2 \propto a^3$] జ॥ $\left[2.286 \times 10^{11} M\right]$

3. 800 Kg ద్రవ్యరాశి, 600 Kg ద్రవ్యరాశి 0.25 m తో వేరు చేయబడి ఉన్నది.



(ఎ) 800 Kg ద్రవ్యరాశి నుండి 0.20 m లోను, 600 Kg ద్రవ్యరాశి నుండి 0.15 m లకు ఉన్న ఈ ద్రవ్యరాశుల వలన గురుత్వ క్షేత్ర తీవ్రత ఎంత?

(బి) ఈ ద్రవ్యరాశుల వలన ఈ బిందువు వద్ద గురుత్వ శక్మము ఎంత?

$$F = \frac{GM}{r^2};\ V = \frac{-GM}{r}$$

జ॥ 800 Kg వలన 'C' వద్ద క్షేత్ర తీవ్రత $= F_{CA}$

600 Kg వలన 'C' వద్ద క్షేత్ర తీవ్రత $= F_{CB}$

$$F = F_{CA} + F_{CB} \quad \widehat{ABC} = \theta \quad \sin\theta = \frac{0.2}{0.25} = \frac{4}{5}$$

$$\cos\theta = \frac{0.15}{0.25} = \frac{3}{5}$$

F_{CA} , F_{CB} లను రెండు లంబాంశములుగా విభజించినపుడు

$X-$ అక్షము వెంబడి AB కి సమాంతరంగా SCT లెక్కించగా $X-$అంశము విలువ సున్నా

$Y-$ అక్షము వెంబడి AB కి లంబంగా CR

AB కి లంబంగా CR వెంబడి $Y-$ అక్షము $-F_{CA}(Y)$

అప్పుడు $Y-$ అక్షము వెంబడి $F = F(Y) = F_{CA}(Y) + F_{CB}(Y)$

$$= 2.2 \times 10^{-6} \ \text{nt/Kg}$$

(బి) 'C' వద్ద ఉన్న గురుత్వ శక్మము $\Rightarrow V = V_{CA} + V_{CB}$

$$= -5.33 \times 10^{-7} \ \text{Joule/Kg}$$

4. భూమి యొక్క వ్యాసార్థము 6.37×10^6 m, సాంద్రత $5.5 \times 10^3\ \text{Kg}/\text{m}^3$ గురుత్వ స్థిరాంకము $6.67 \times 10^{-11}\ \text{nt} - \text{m}^2/\text{Kg}^2$ భూమి యొక్క ఉపరితల శక్మము గణింపుము.

(జ॥ -6.2×10^7 Joule/Kg)

$$V = \frac{-GM}{R}$$

$M-$ భూమి యొక్క ద్రవ్యరాశి $= \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$

$R-$ భూమి యొక్క వ్యాసార్థము

$\rho-$ భూమి యొక్క సాంద్రత

5. భూమి, సూర్యుని నుంచి ప్రస్తుతము ఉన్న దూరము నుంచి సగమే ఉన్నట్లయితే, సంవత్సరానికి ఎన్ని రోజులు ఉంటాయి?

(జ॥ 129 రోజులు)

సూచన : $T^2 \propto a^3, \quad \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$ $\quad a_1 = x \quad T_1 = 365$ days

$a_2 = x/2 \quad T_2 = ?$

6. రెండు న్యూట్రాన్ నక్షత్రములు 10^{10} m దూరముతో వేరు చేయబడి వున్నవి. ఒక్కొక్క నక్షత్రము యొక్క ద్రవ్యరాశి 10^{30} Kg మరియు వ్యాసార్థము 10^5 m ఒకదానికొకటి మొదటి విరామ స్థితిలో ఉంటాయి. ఆ విరామ చట్రము నుండి కొలిచినపుడు

(ఎ) వాటి మధ్య ఉన్న దూరము సగానికి తగ్గించినపుడు

(బి) అరెంటి మధ్య అభిఘాతము జరుగుబోవుచున్నప్పుడు

ఈ రెండు సందర్భాలలో అవి ఎంత వేగముతో కదలగలవు.

సూచన :

తొలి స్థితిజ శక్తి $u_i = \frac{-GM^2}{r_i}$ M – ఏ నక్షత్రము యొక్క ద్రవ్యరాశియైన తొలి గతిజ శక్తి సున్నా (నక్షత్రములు నిశ్చల స్థితిలో ఉన్నవి కనుక)

తుది స్థితిజ శక్తి $u_f = \frac{-2GM^2}{r_i} \quad \left[r_f = \frac{r_i}{2}\right]$

తుది గతిజ శక్తి $MV^2 \quad \left[MV^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}MV^2\right]$

శక్తినిత్యత్వము $\Rightarrow \frac{-GM^2}{r_i} = \frac{-2GM^2}{r_i} + MV^2$

అపుడు $V = \sqrt{\frac{GM}{r_i}} = 8.2 \times 10^4$ m/s

(బి) $V_f = 2R = 2 \times 10^5$ M

తుది గతిజ శక్తి $u_f = \frac{-GM^2}{r_f}$

అపుడు శక్తి సమీకరణము $\frac{-GM^2}{r_i} = \frac{-GM^2}{r_f} + MV^2$

$$\therefore V = \sqrt{GM\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right)} = 1.8 \times 10^7 \text{ m/s}$$

7. ఒక ఆస్టిరాయిడ్ యొక్క ద్రవ్యరాశి భూమి యొక్క ద్రవ్యరాశి కంటే 2×10^{-4} రెట్లు కలదు. సూర్యుని నుంచి

ప్రయోగం సంఖ్య : 5(ఎ)

యంగ్ గుణకము - క్రమరహిత వంపు పద్ధతి

ఉద్దేశము : క్రమరహిత వంపు పద్ధతిన ఒక కడ్డీ పదార్థపు యంగ్ గుణకము నిర్ణయించుట.

పరికరములు : ఏకరీతి దీర్ఘచతురస్రాకరపు లోహపు కడ్డీ, కత్తి మొనలు బరువులు, బరువులు వ్రేలాడదీయు కొంకీలు, చల ద్వేష్టన సూక్ష్మదర్శిని - వెర్నియర్‌కాలిపర్స్, స్క్రూగేజ్

సూత్రం : $$Y = \frac{g\ell^3}{4bd^3}\frac{M}{e}\ \text{dyne/cm}^2$$

ఇక్కడ Y- యంగ్ గుణకం

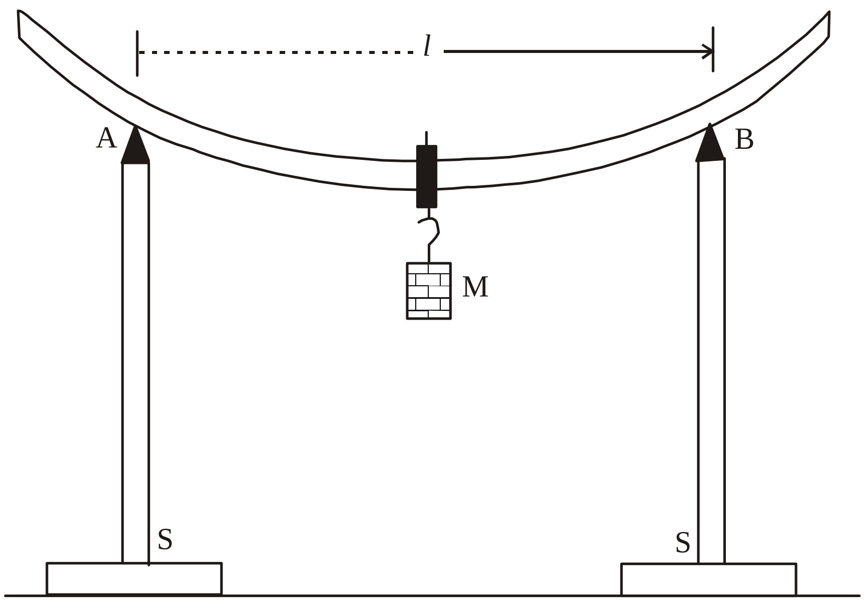
ℓ – కత్తిమొనల మధ్యదూరం

b - కడ్డీ సగటు వెడల్పు

d - కడ్డీ సగటు మందం

M - వ్రేలాడదీసిన ద్రవ్యరాశి

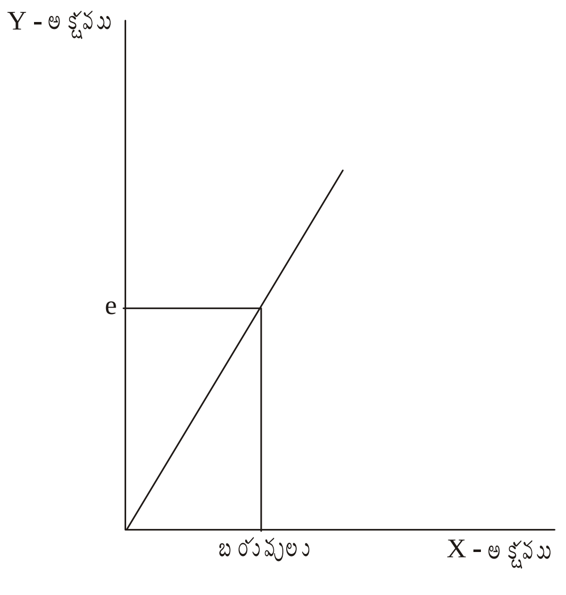
e - కడ్డీ మధ్య బిందువు క్రింది దిశలో విస్థాపనము.



పటము - 1

పద్ధతి : లోహపు కడ్డీని 2 కత్తిమొనల పైన క్షితిజ సమాంతరంగా సౌష్టవముగా అమర్చాలి. కడ్డీ మధ్య బిందువు వద్ద గుండు సూదిని నిలువుగా అతికించాలి. సూక్ష్మదర్శినిలో గుండుసూది కొన ప్రతిబింబంని రాబట్టాలి. సూక్ష్మదర్శినిలోని అడ్డు తీగలను గుండు సూదికొనకు ఏకీభవింపజేయాలి. ఇప్పుడు సూక్ష్మదర్శినిలో రీడింగును గుర్తించాలి. ఇప్పుడు ఒక కొంకిని కడ్డీ మధ్యలో తగిలించి 500 గ్రాముల చొప్పున బరువును పెంచుతూ ప్రతిసారి గుండుసూది కొనను అడ్డు తీగలో ఏకీభవింపజేసి రీడింగులు తీసుకొనవలెను. అదే విధంగా బరువులు తగ్గించుతూ ప్రయోగంను జరిపి రీడింగులు తీసుకొనవలెను. బరువులను తగిలించకముందు, కేవలం కొంకీని తగిలించినపుడు వచ్చిన రీడింగుల సరాసరిని X_0 గా గుర్తించాలి. తదుపరి 500 గ్రాములకు వచ్చిన రీడింగును X_1 గా గుర్తించాలి. ఈ రెండింటి తేడా కడ్డీ యొక్క క్రింది దశలో విస్థాపనము e ని తెలియజేస్తుంది. ఈ విధంగా ప్రతిసారి e విలువను గుర్తిస్తూ M/e విలువను కనుగొని దాని సగటు విలువను పరిగణనలోనికి తీసుకోవాలి. కడ్డీ యొక్క కత్తిమొనల మధ్య పొడవు ℓ, వెడల్పు b, మందం d, కనుగొనవలెను. ఇచ్చిన సూత్రంలో పై విలువలను ప్రతిక్షేపించి Y విలువను కనుగొనవలెను.

గ్రాఫ్ : బరువు X - అక్షంపైన, విస్థాపనం 'e' Y - అక్షం పైన తీసుకుని గ్రాఫ్ గీచిన అది మూల బిందువు నుంచి పోవు సరళరేఖను సూచిస్తుంది. గ్రాఫ్ నుంచి కూడా M/e ని కనుగొని Y విలువలను లెక్కించవలెను.



పట్టిక

వరుస సంఖ్య	బరువులు గ్రాములు	సూక్ష్మదర్శిని రీడింగులు			విస్థాపం (e)
		బరువులు	బరువులు	సరాసరి	

సగటు $\frac{M}{e}$ విలువ

ఫలితం : ఇచ్చిన కడ్డీ పదార్థపు యంగ్ గుణకము

$Y =$ ____________________________ dyne cm^{-2}

జాగ్రత్తలు : (1) కొంకిని కడ్డీ మధ్య బిందువు వద్ద వ్రేలాడదీయాలి.

(2) కడ్డీ మందం ఖచ్చితంగా కొలవవలెను.

(3) కత్తిమొనలు రెండు కడ్డీ గరిమనాభి నుండి సమాన దూరంలో ఉండవలెను.

ప్రయోగ సంఖ్య : 5బి

యంగ్ గుణకము - క్రమ వంపు విధానము

ఉద్దేశము : ఇచ్చిన కడ్డీ పదార్థపు యంగ్ గుణకము - క్రమ వంపు పద్ధతిని కనుగొనుట.

పరికరములు : ఏకరీతి, దీర్ఘచతురస్రాకారపు లోహపుకడ్డీ, కత్తి మొనలు, కొంకీ బరువులు, చలన ద్వేష్టన సూక్ష్మదర్శిని, వెర్నియర్ కాలిపర్స్, స్క్రూగేజ్

సూత్రము : $Y = \frac{3}{2} \cdot \frac{ga\ell^2}{bd^3} \cdot \frac{M}{e}$

ఇక్కడ Y- యంగ్ గుణకం

ℓ – కత్తిమొనల మధ్యదూరం

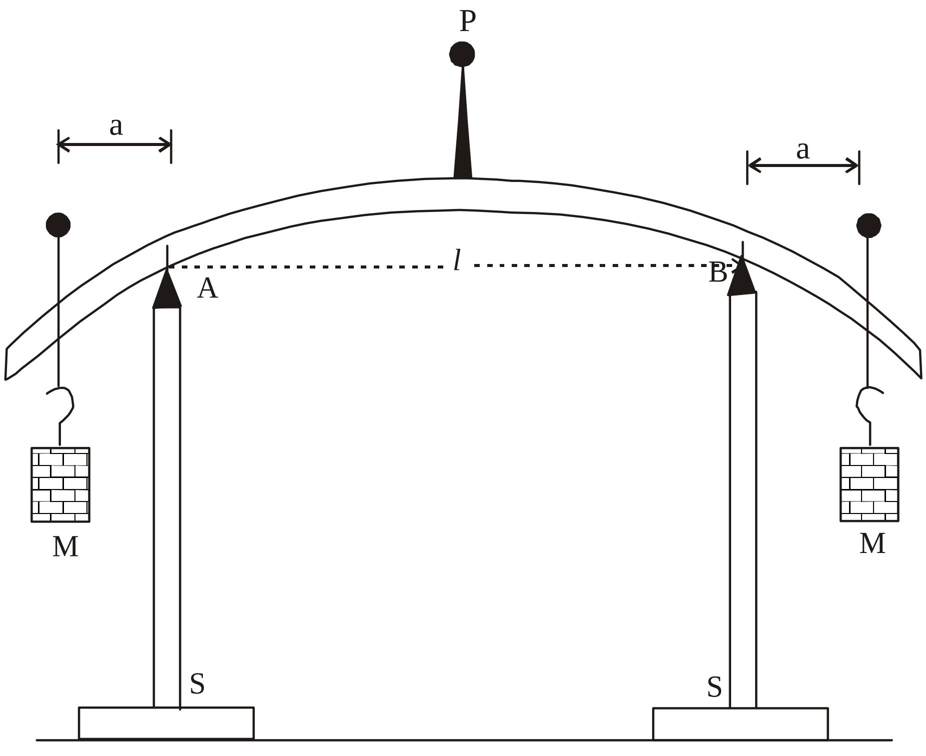
a - కత్తిమొనకు, వ్రేలాడదీసిన బరువుకు మధ్యదూరం

b - కడ్డీ వెడల్పు

d - కడ్డీ మందం

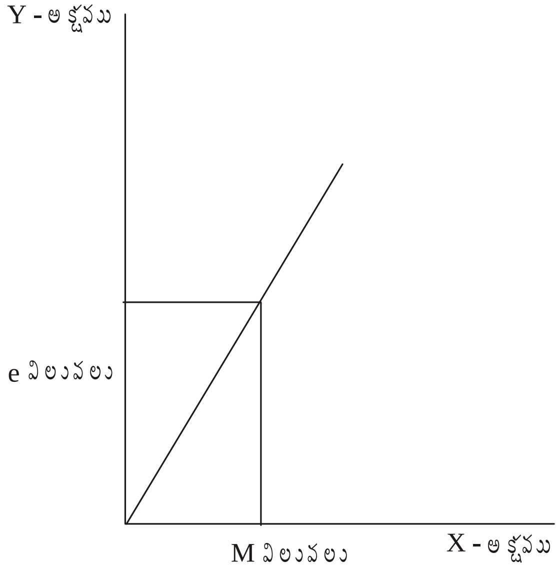
M - వ్రేలాడదీసిన బరువు ద్రవ్యరాశి

e - ఊర్ధ్వ దిశలో విస్థాపనము.



పద్ధతి : రెండు కత్తిమొనలపై సమముగా క్షితిజ సమాంతరంగా కడ్డీని వుంచి ప్రతి కత్తిమొన నుంచి సమాన దూరంలో వెలుపలివైపున రెండు కొంకీలను వ్రేలాడదీయాలి. కొంకీల దూరములు 'a' కొలవాలి. సమానమైన బరువులను ఇరువైపుల వ్రేలాడదీస్తూ కడ్డీ మధ్య బిందువు వద్ద అతికించిన సూది విస్థాపనమును సూక్ష్మదర్శిని ద్వారా ప్రతిసారి కనుగొని సగటు $\frac{M}{e}$ విలువను లెక్కించాలి. కడ్డీ వెడల్పు 'b' మరియు మందం 'd'ని వెర్నియర్ కాలిపర్స్, స్క్రూగేజ్‌లతో కనుగొనవలెను. కత్తిమొనల మధ్య దూరం 'ℓ' కొలవవలెను. పై విలువలను సూత్రంలో ప్రతిక్షేపించి Y విలువను లెక్కించాలి.

గ్రాఫ్ :



M - విలువలను X - అక్షముపై e విలువలను Y - అక్షముపై తీసుకొని గ్రాఫ్ గీచిన అది మూల బిందువు గుండా పోవు సరళరేఖను ఇస్తుంది. గ్రాఫ్ నుంచి $\frac{M}{e}$ కనుగొని Y విలువలను లెక్కించాలి.

పరిశీలనలు :

పట్టిక

వ.సంఖ్య.	బరువు(M)	మైక్రోస్కోపు రీడింగులు						విస్థాపనం e	M/e
		పెంచుతూ			తగ్గించుతూ				
		1వసారి	2వసారి	సరాసరి	1వసారి	2వ సారి	సరాసరి		

ఫలితము : ఇచ్చిన కడ్డీ పదార్థాపు యంగ్ గుణకము Y = ... $dyne/cm^2$

జాగ్రత్తలు :

(1) కత్తి మొనల మధ్య కడ్డీని క్షితిజ సమాంతరంగా అమర్చవలెను.

(2) బరువులు రెండు సమాన దూరములలో వ్రేలాడదీయాలి.

(3) సూక్ష్మదర్శినిని ఒక వైపునే కదిలించాలి.

యూనిట్ - 2

పాఠం - 6

ప్రత్యేక సాపేక్ష సిద్ధాంతము

ఉద్దేశాలు

ఈ పాఠ్యాంశం అధ్యయనము పిమ్మట విద్యార్థి

1. 'నిర్దేశ చట్రము' యొక్క అవసరమును గుర్తించ గలుగుట మరియు వివిధ ఆధార చట్రములను అర్థము చేసికొనగలుగుట
2. గెలీలియన్ రూపాంతరీకరణమును అవగాహన చేసికొనగలుగుట.
3. ప్రత్యేక సాపేక్షతా సిద్ధాంత ప్రతిపాదనలను అవగాహన చేసికొనగలుగుట
4. లారెంజ్ రూపాంతరీకరణములను అవగాహన చేసుకొనుట
5. దైర్ఘ్య సంకోచము, కాల వ్యాకోచము, ద్రవ్యరాశి విలువ కాలముతో మారుటలను అవగాహన చేసుకొనగలుగుట.
6. చతుస్సదిశా రూపమును అవగాహన చేసికొనుగలుగుట.

పాఠ్యాంశ నిర్మాణక్రమం

6.1 ఉపోద్ఘాతం

ఆల్‌బర్ట్ ఐన్‌స్టీన్ 1905లో ప్రత్యేక సాపేక్ష సిద్ధాంతము ప్రతిపాదించాడు. ఏ వ్యవస్థలైనను ఒక దానికి మరొకటి సాపేక్షంగా స్థిర వేగంతో చలిస్తున్నను నిశ్చలంగా ఉన్న వాటితో ఈ ప్రత్యేక సాపేక్ష సిద్ధాంతం వ్యవహరిస్తుంది.

భూమి మీద నిశ్చలంగా ఉన్న పరిశీలకుడు ఒక కదులుచున్న వస్తువు (ఉదా॥ విమానము) యొక్క పొడవును కొలిచినట్లైతే ఆ పొడవును విమానము నుండి పరిశీలించే వేరొక పరిశీలకుడు కొలిచిన విమాన పొడవుతో పోలిస్తే ఆ పొడవు చిన్నదిగా ఉన్నట్లు మనము కనుగొంటాము. దీనిని మనము అర్థము చేసుకొనుటకు చలనమును దృష్టిలో పెట్టుకొని కొలతల ప్రక్రియను విశ్లేషించవలెను. ముందుగా మనము చలనము అంటే ఏమిటో తెలుసుకుందాము.

ఒక వస్తువు యొక్క స్థానము సాపేక్షముగా వేరొక దానితో మారినట్లయితే, ఆ వస్తువు చలనములో ఉన్నదని చెప్పవచ్చు.

ఉదా॥ విమానము భూమితో సాపేక్షంగా కదులును మరియు ఒక ప్రయాణికుడు విమానంతోసాపేక్షంగా కదులును (అతను విమానంలో నడుస్తున్నప్పుడు) సూర్యునికి సాపేక్షముగా భూమి కదులునని మనకు తెలుసు.

6.2 నిర్దేశ చట్రాలు

ఏదైనా వ్యవస్థ కదలికను వర్ణించుటకు నిర్ణీతమైన నిర్దేశ చట్రం మనకు అవసరము.

చలనము వర్ణించు ప్రతి సందర్భంలోను నిర్దేశ చట్రం మనకు ఉపయోగపడును.

న్యూటన్ మొదటి గమన సూత్రాన్ని సంతృప్తి పరచే నిర్దేశ చట్రానికి జడత్వ నిర్దేశ చట్రమని పేరు.

ఒక వస్తువు తొలిగా నిశ్చల స్థితిలో ఉండి ఆ వస్తువు పైన ఎటువంటి బలము పని చేయకపోతే అప్పుడు ఆ వస్తువు నిశ్చలస్థితిలోనే ఉన్నట్లుగా లేక సమవేగంతోపోతున్న వస్తువు మీద బలము పని చేయకపోతే ఆ వస్తువు సమవేగంతోనే పోవును.

జడత్వ నిర్దేశ చట్రంలో ఒక వ్యక్తి ఉన్నట్లుగా ఊహించుకొందాము. అతని పరంగా చూస్తే ఏదో ఒక దాని వలన జడత్వ నిర్దేశ చట్రము యొక్క స్థానము స్థిర వేగంతో మారుతున్నట్లుగా గమనించాడు. ఆ ఏదో ఒకటి కదులుతుందా? లేక నిర్దేశ చట్రము కదులుతుందా? అనే ప్రశ్న ఏర్పడింది. స్థిర వేగ చలనము సాపేక్షమగుట వలన పై ప్రశ్నలు అర్థరహితము.

ఎక్కడైనా ఉపయోగించగలిగినటువంటి "సార్వత్రిక చట్రం" అనేది ఉండదు మరియు "నిరపేక్ష చలనము" ఉండదు. అన్ని చలనాలు సాపేక్షమే.

6.2.1 సంఘటన : సంఘటన అనేది ఆ సంఘటనను వివరించడానికిఎన్నుకొన్న నిర్దేశ చట్రం పై ఆధారపడి ఉండదు. దీనిని విశదీకరించడానికి నాలుగు నిరూపకాలు అవసరం. స్థలం (x, y, z) - కాలం (t).

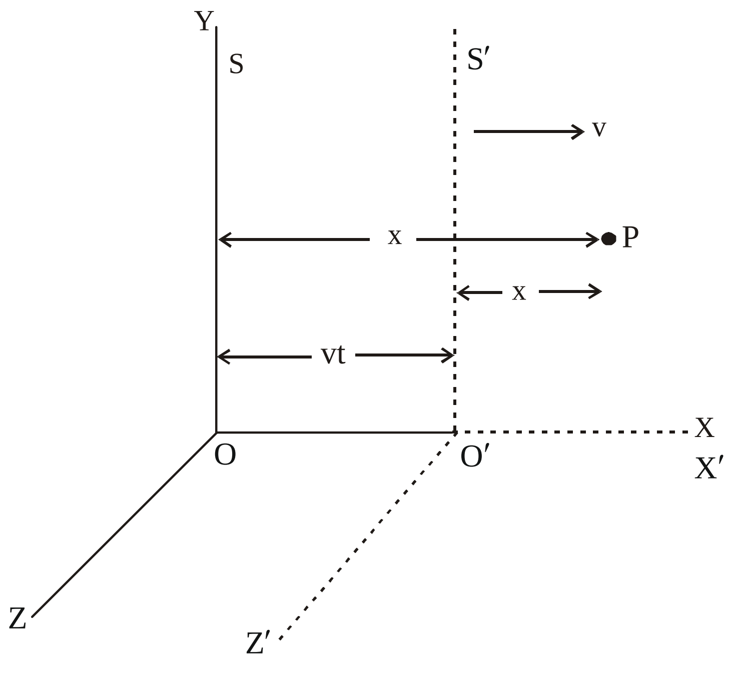
6.2.2 రెండు సంఘటనల ఏకకాలీనత : ఒక సంఘటన జరిగిన కాలాన్ని కొలవలనంటే గడియారము సంఘటనను జరిగిన ప్రదేశము వద్దే ఏకీభవించవలెను. అదే నిర్దేశ చట్రములో, రెండు వేర్వేరు ప్రదేశములలో రెండు సంఘటనలు సంభవించినచో ఆయా ప్రదేశాల వద్ద ఉన్న గడియారాలు ఒకే సమయమును సూచించినచో ఆ రెండు సంఘటనలను "రెండు సంఘటనల ఏకకాలీనత" అంటారు. ఈ ప్రక్రియ నిర్దేశ చట్రం మీద ఆధారపడుతుంది.

6.3 గెలీలియన్ రూపాంతరీకరణము

గెలీలియన్ సాపేక్షతని, సాంప్రదాయక సాపేక్షత అని, లేక న్యూటన్ సాపేక్షత అని అంటారు.

ఒక నిర్దేశ చట్రము (లేక నిరూపక వ్యవస్థ) లోని స్వరూపకాలను, మరియొక నిర్దేశ చట్రము (లేక నిరూపక వ్యవస్థ) లోని నిరూపకాలుగా మార్పు చేయడానికి పనికి వచ్చే సమీకరణాలనే రూపాంతరీకరణ సమీకరణాలు అంటారు. యాంత్రిక శాస్త్రానికి సంబంధించిన అన్ని సూత్రాలు, అన్ని జడత్వ నిర్దేశ చట్రాలలోను ఒకే రూపము కలిగి ఉండటాన్నే గెలీలియన్ అచరము అందురు.

x, y, z & $x' y' z'$ (చిత్రము **6.1**) అనునవి రెండు జడత్వ నిర్దేశ చట్రాలుగా అనుకుందాము. వాటిని S, S' తో సూచిద్దాము. $'S'$ చట్రంతో సాపేక్షంగా S' అనునది $'V'$ వేగముతో కదులుచున్నది. రెండు చట్రాల అక్షాలు పరస్పరం సమాంతరముగా ఉన్నాయని మరియు X & X' అనునవి $'V'$ కి సమాంతరంగా ఉన్నాయని అనుకుందాము. రెండు చట్రాల మూల బిందువులూ, 0 మరియు $0'$ లు ఏకీభవిస్తూ ఒకే చోటున ఉన్న సమయం నుంచి మనం కాలాన్ని లెక్కించడం ప్రారంభిద్దాం.



చిత్రము **6.1**

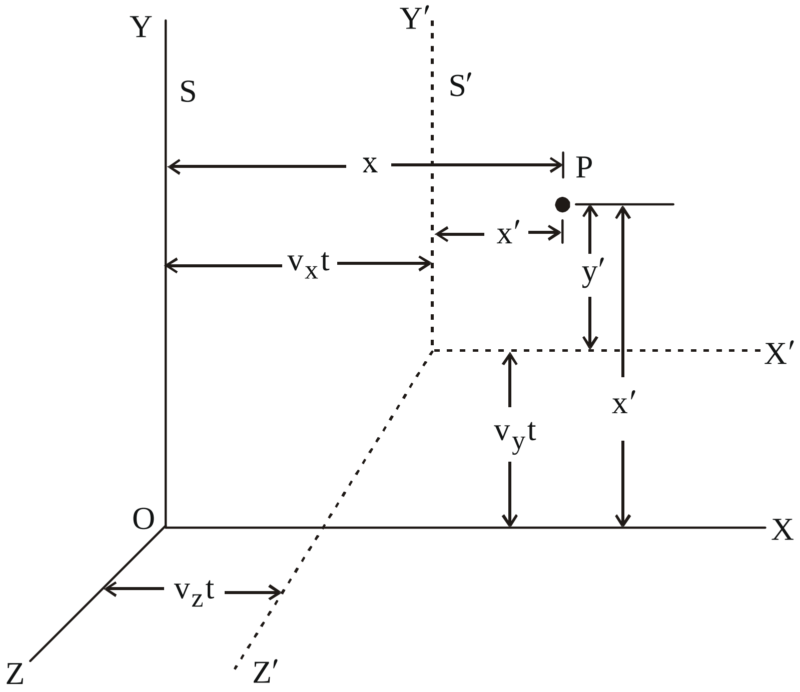
అప్పుడు ఈ క్రింది విధంగా ఉంటాయి.

$$x' = x - vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$

ఈ సమీకరణాలనే గెలీలియన్ రూపాంతరీకరణము అంటారు.

సరళ రేఖ వెంబడి ఏ దిశలోనైనా 'S'తో సాపేక్షంగా S' చట్రము కదులుచున్న సందర్భంలో (చిత్రము 6.2)

$$\vec{v} = \hat{i}\, v_x + \hat{j}\, v_j \pm \hat{k}\, v_z$$



చిత్రము 6.2

v అనునది s చట్రంతో సాపేక్షంగా ఉండే S' వేగము మరియు $v_x v_y v_z$ అనేవి వేగపు అంశాలు.

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ అనునవి ప్రమాణ సదిశలు.

తొలిగా రెండు చట్రాల మూల బిందువును O మరియు O' ఏకీభవించినవి అనుకుందాం. P వద్ద జరిగే సంఘటనలను 's' చట్రంలోని పరిశీలకుడు x, y, z, t అనే నిర్దేశాలతో గుర్తిస్తాడు. S' చట్రంలోని పరిశీలకుడు x', y', z', t' అనే నిర్దేశాలతో సూచిస్తాడు. అప్పుడు ఈ క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చు.

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - v_x t \\ y' &= y - v_y t \\ z' &= z - v_z t \text{ and } t' = t \end{aligned}\right\} ----(2)$$

(2)వ సమితి సమీకరణాలను అవకలనం చేయగా

$$\left.\begin{aligned} dx' &= dx - v_x dt;\ \ dy' = dy - v_y dt \\ dz' &= dz - v_z dt;\ \ dt' = dt \end{aligned}\right\} -------(3)$$

$v_x, v_y \& v_z$ అనే వేగాంశములు స్థిరాంకాలు.

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v_x; \quad \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt} - v_y$$

$$\frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt} - v_z$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow u'_x &= u_x - v_x \\ u'_y &= u_y - v_y \quad u'_z = u_z - v_z \end{aligned}\right\} ----(4)$$

$u'_x, u'_{y'}, u'_z$ అనునవి S' చట్రములోని వేగాలు

u_x, u_y, u_z అనునవి S చట్రములోని వేగాలు

అప్పుడు (4)వ సమీకరణాన్ని ఈ క్రింది విధముగా సూచించవచ్చును.

$$u'_x\,\hat{i} + u'_y\,\hat{j} + u'_z\,\hat{k} = u_x\,\hat{i} + u_y\,\hat{j} + u_z\,\hat{k} - v_x\,\hat{i} - v_y\,\hat{j} - v_z\,\hat{k}$$

$$\Rightarrow u' = u - v \text{ --------- } (5)$$

ఈ సమీకరణమే ఒక కణము యొక్క వేగమునకు గెలీలియన్ రూపాంతరీకరణము అంటారు.

యాంత్రిక శాస్త్రానికి సంబంధించిన అన్ని సూత్రాలు రెండు జడత్వ నిర్దేశ చట్రాలలోను మార్పు ఉండదు. దీనినే మనం గెలీలియన్ రూపాంతరీకరణము ద్వారా చూపించవచ్చు. దీనినే గెలీలియన్ అచరము అందురు.

త్వరణాంశాల రూపాంతరణ కోసం (5)వ సమీకరణాన్ని తీసుకుందాము.

$$u' = u - v$$

పై సమీకరణాన్ని 't' పరంగా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dU'}{dt'} = \frac{du}{dt} \Rightarrow a'_x = a_x \text{ (V స్థిరాంకం)}$$

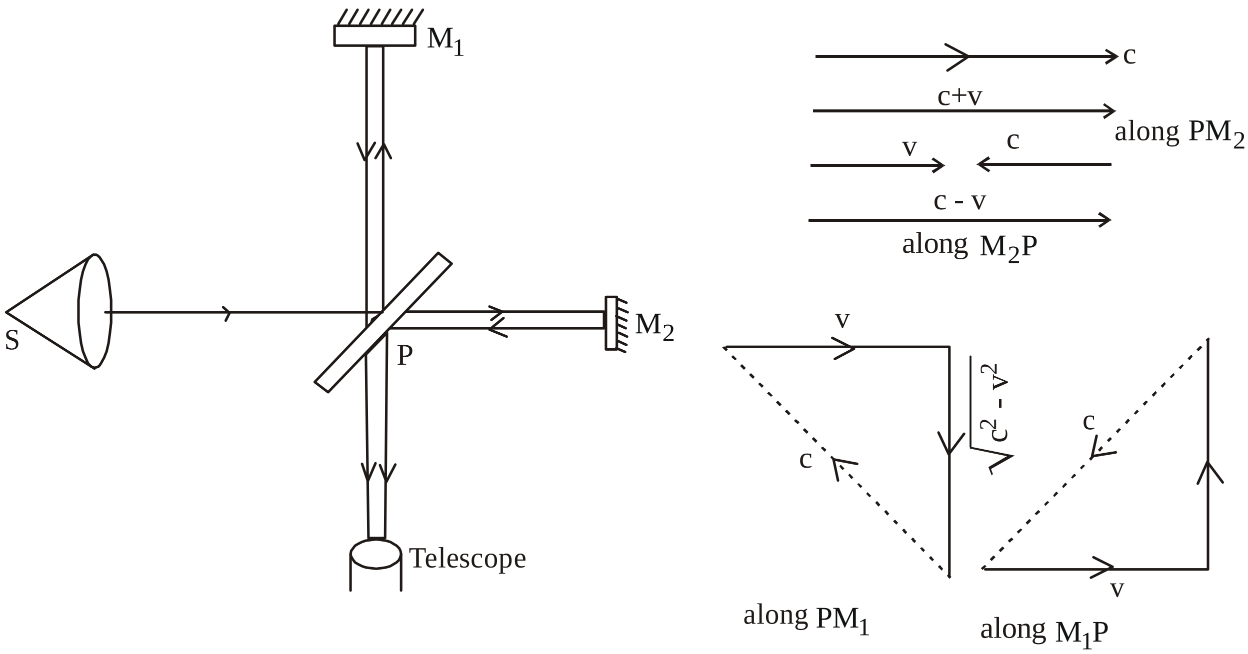
అదే విధముగా $a_{y'} = a_y$

పై సమీకరణాల నుండి జడత్వ నిర్దేశ చట్రాల సాపేక్షతా వేగం, త్వరణాంశాల విలువల పై ఎటువంటి ప్రభావం కలిగి, ఉండవని విశదమవుతుంది. అంటే ఒకదానితో ఒకటి సమ స్థిర వేగంతో కదులుతున్న విశదమవుతుంది. అంటే ఒక దానితో ఒకటి సమ స్థిర వేగంతో కదులుతున్న చట్రాలన్నిటిలో వస్తువు త్వరణం ఒకే విలువను కలిగి ఉంటుంది. ఈ రెండు చట్రాలలో న్యూటన్ రెండవ సూత్రము మారదు. ఆ గెలీలియన్ రూపాంతరీకరణము క్రింద న్యూటన్ సూత్రము అచరము మరియు ద్రవ్యవేగ నిత్యత్వము కూడా అచరము.

6.4 మైకల్‌సన్ మార్లే ప్రయోగము

అంతరాళము ఈథర్ అనే పదార్థముతో నిండి ఉండవచ్చని మొదట అనుకున్నారు.

భూమి ఎటువంటి అలజడి లేకుండా ఈథర్ యానకం గుండా ప్రయాణించునని అనుకున్నారు. ఈ ప్రతిపాదన నిజమైతే, వేరొక చట్రం పరంగా భూమి యొక్క వేగాన్ని కనుగొనవచ్చును. దీనిపరంగా మైకల్‌సన్ - మార్లే ఈ ప్రయోగాన్ని వ్యతీకరణ మాపకం ఉపయోగించి చేశారు. ఈ పరికరం పటంలో చూపినట్లుగా ఉంటుంది.



చిత్రము 6.3

వ్యతికరణ మాపకంలో సాపేక్షంగా నిశ్చలంగా ఉన్న ఏకవర్ణ కాంతి జనకం S నుంచి వెలువడిన కాంతి పుంజము, అర్థ కళాయి పూతపూసిన దర్పణం మీద పడుతుంది. ఈ దర్పణం, కాంతి పుంజం ప్రయాణించే దిశతో 45^0 చేస్తూ వంపుగా అమర్చబడుతుంది. P పై పడిన కిరణ పుంజం పరస్పరం లంబంగా ఉండే రెండు కిరణ పుంజాలుగా విభజింపబడుతుంది. ఈ రెండు కిరణ పుంజాలు వరుస క్రమంగా M_1, M_2 దర్పణాల పైన పడి పరావర్తనం చెంది తమ తమ మార్గాలలో వెనక్కు తిరిగి వచ్చి మరల 'P' వద్ద కలుసుకొని ఆ పిమ్మట టెలీస్కోపును జేరి వ్యతికరణ పట్టికలను ఏర్పరుస్తాయి. పరికరము స్థిరముగా ఉండి, పుంజము రెండు భాగములు M_1, M_2 దర్పణముల వద్ద క్రమంగా పరావర్తనము చెంది తిరిగి 'P'ని చేరడంలో, కాంతి పథములు సమానమైతే, కాలవ్యవధులు కూడా సమానమగును. దీనిని సరిచూడడం కోసం ప్రతికరణ గాజుపలకను వాడవచ్చును. భూమి చలనంలో ఉండుట వలన దానిపైనున్న పరికరము కూడా చలనములో నున్నది. కాంతిపుంజపు తొలి దిశ భూమి చలన దిశలోనున్నదని అనుకొనుము.

$PM_1 = PM_2 = \ell$ అయిననూ భూమి చలనము వలన రెండు దిశలలో కాంతి పుంజములు తిరిగి రావడానికి పట్టే కాలవ్యవధులలో తేడా వుంటుంది. ఈ దృగ్విషయము కాలవ్యవధిని కొలవడానికి ఒక సున్నిత సూచికగా పనిచేస్తుంది.

M_1, M_2ల వైపు కాంతి రేఖ ప్రయాణించిన పథమును చిత్రము 6.3లో చూపబడినది.

PM_2P మార్గములో రెండవ కాంతి పుంజానికి పట్టే కాలం

$$t_2 = \frac{\ell}{c+v} + \frac{\ell}{c-v} = \frac{\ell c - \ell v + \ell c + \ell v}{c^2 - v^2}$$

$$= \frac{2\ell c}{c^2 - v^2} = \frac{2\ell c}{c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

$$t_2 = \frac{2\ell}{c}\,\frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

PM_1P మార్గంలో మొదటి కాంతి పుంజానికి పట్టే కాలం

$$t_1 = \frac{2\ell}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \left[\frac{2\ell}{c} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right]$$

రెండు పుంజాల ప్రయాణ కాలాలలో భేదం Δt

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$= \frac{2\ell}{c}\left[\frac{1}{\left[1-\frac{v^2}{c^2}\right]} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right]$$

$$= \frac{2\ell}{c}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} - \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}\right]$$

బైనామినల్ సిద్ధాంతం ఉపయోగించి మరియు $\frac{v^2}{c^2}$ కంటే పై రాశులను వదిలివేయగా

$$\Delta t = \frac{2\ell}{c}\left[\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right) - \left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right)\right]$$

$$= \frac{2\ell}{c}\left[\frac{v^2}{2c^2}\right] = \frac{\ell v^2}{c^3}$$

ఇప్పుడు పరికరాన్ని 90^0 కోణం గుండా తిప్పినట్లయితే రెండు కాంతి పథములు పరస్పరం మారతాయి. ప్రయాణ కాల భేదం కూడా వ్యతిరేకమే. దాని వలన కలిసే రెండు కాంతి పుంజాల మధ్య గల దశా బేధము మారుతుంది. అందువల్ల వ్యతీకరణం పట్టీ వ్యవస్థకు స్థానభ్రంశం కలుగుతుంది. కాబట్టి ఈథరు ఉన్నట్లయితే పట్టీ వ్యవస్థ స్థానభ్రంశమును నిర్ణయించవచ్చును.

కాలవ్యవధిలోని మార్పు = $2 \times \Delta t$, దాని ఫలితంగా పథ బేధం = $c \times 2\Delta t$

పట్టీ స్థానభ్రంశం $\Delta n = \frac{2c\Delta t}{\lambda}$ అవుతుంది.

'λ' అనేది ఉపయోగించిన కాంతి యొక్క తరంగ దైర్ఘ్యం.

మైకల్సన్ - మార్లే చేసిన ప్రయోగంలో ℓ, λ మరియు vలని ప్రతిక్షేపిస్తే స్థానభ్రంశం విలువ $\Delta n = 0.4$.

మైకల్సన్ - మార్లే పరికరం, పట్టీలోని నూరవ భాగపు స్థాన భ్రంశాన్ని కొలవగల్గిన సున్నితత్వాన్ని కలిగి ఉన్నది. రావలసిన స్థానభ్రంశం 0.4 అయినప్పటికీ, ప్రయోగపూర్వకంగా 0.02 మాత్రమే గమనించారు. ఈ ప్రయోగాన్ని వివిధ స్థితులలో మరల చేసినను చివరకు పాత ఫలితాలే వచ్చినవి. ఇవి ఈథర్ ప్రతిపాదనకు పూర్తి వ్యతిరేకము.

ఫలితము : ఈ ప్రయోగ ఫలితంగా, భూమి చలనంలో ఉన్నందు వలన కాంతి వ్యాపనము ఎటువంటి ప్రభావానికి లోను కాలేదు. భూమి సూర్యుని చుట్టూ భ్రమణం చేయుచున్నందు వలన తరుచుగా భూవేగములో మార్పులు కలిగెను. కాని కాంతి వ్యాపనమునకు అన్ని జడత్వ చట్రాలు కూడా పూర్తిగా తుల్యమే. మరియు ప్రత్యేకమైన నిర్దేశ చట్రము ఏదీ లేదు.

6.5 ప్రత్యేక సాపేక్ష సిద్ధాంత ప్రతిపాదనలు

అల్‌బర్ట్ ఐన్‌స్టీన్ 1905లో ప్రత్యేక సాపేక్ష సిద్ధాంతాన్ని మైకల్‌సన్ - మార్ల్ ప్రయోగాల ఫలితంగా లేక ఆధారంగా ప్రతిపాదించాడు. (కాని అందుకు మైకల్‌సన్ తనకు తానే ఈ విషయాన్ని ఒప్పుకోలేదు).

ఇందులో రెండు ప్రతిపాదనలు ఉన్నాయి.

6.5.1 మొదటి ప్రతిపాదన : భౌతిక శాస్త్ర సూత్రాలన్నీ, అన్ని జడత్వ నిర్దేశ చట్రాలలో ఒకే విధంగా ఉంటాయి.

"నిరపేక్ష చలనము" అనేది లేదు. కేవలము ఏ వస్తువులైతే ఒక దానితో మరొకటి సాపేక్షంగా చలనంలోఉన్నవో వాటికే భౌతికంగా ప్రాముఖ్యత కలదు.

వివరణ : ఈ ప్రతిపాదన ప్రకారం ఒక వస్తువు యొక్క చలనం ఒక దానితో మరొకటి సాపేక్షంగా ఉంటుంది. ఈథర్ పరంగా వివరించిన నిరపేక్ష చలనం అర్థరహితం.

ఒక ఉపగ్రహం యొక్క చలనాన్ని వర్ణించాలంటే భూమి యొక్క చలనం కాని, నక్షత్రాలు లేక గ్రహాలను ఆధారంగా చేసుకుని వర్ణించవచ్చు. అంతరాళములో అది ఒంటరిగా ఉన్నట్లయితే అది చలనంలో ఉందో, నిశ్చలంగా ఉందో చెప్పలేము.

6.5.2 రెండవ ప్రతిపాదన : స్వేచ్ఛా అంతరాళంలో కాంతి యొక్క వేగము అందరు పరిశీలకులకు వారు ఏ విధంగా చలిస్తున్నప్పటికి, ఒకే విలువను కలిగి ఉంటుంది.

వివరణ : కాంతి వేగం అన్ని దిశలలోను ఒకేలాగ ఉంటుంది. అది కాంతి యొక్క ఉత్పత్తి స్థానము కదులుతుందా లేదా అనే విషయం పై ఆధారపడదు. మైకల్‌సన్ - మార్లే ప్రయోగ ఫలితం దీనికి సరిపోతుంది.

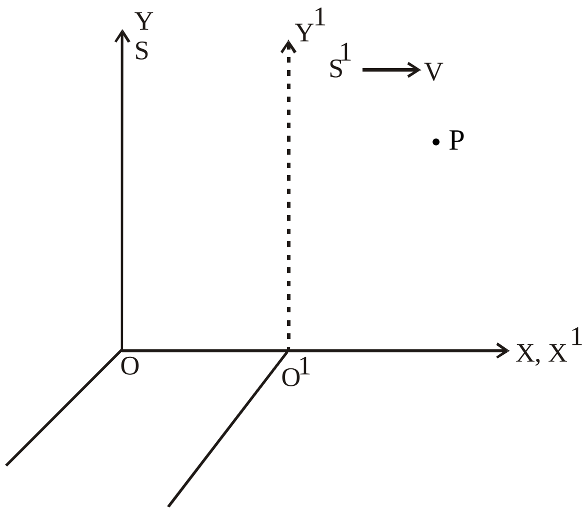
కాంతి వేగము అన్ని జడత్వ నిర్దేశ చట్రాలలో ఆచరము. దీని ద్వారా మనకు తెలిసిన విషయం ఏమిటంటే గెలీలియన్ రూపాంతలికరణాలను, ఇంకను గెలీలియన్ రూపాంతలీకరము క్రింద యాంత్రిక శాస్త్ర నియమాలు అచరాలు అనే విషయం కూడా మార్పు చేయాలి.

లారెంట్జ్ రూపొందించిన రూపాంతలికరణాలు మైకల్‌సన్ - మార్లే ప్రయోగంతో ఏకీభవిస్తాయి.

6.6 లారెంట్ రూపాంతరీకరణములు

S, S' అను రెండు జడత్వ నిర్దేశ చట్రాలను తీసుకొందాము. S' చట్రం $+x$ అక్షం దిశలో S' చట్రానికి సాపేక్షంగా $'V'$ వేగముతో ప్రయాణిస్తోంది. రెండు చట్రాల మూల బిందువులు ఏకీభవించినపుడు కాలము లెక్కించబడును. అనగా $t = t' = 0$ అయిన O, O' లు ఏకీభవించును.

P అనే బిందువు వద్ద ఒక సంఘటన జరిగింది. S చట్రంలో ఈ భౌతిక సంఘటన x, y, z, t నిరూపకాలతోను. S' చట్రంలోను x', y', z', t' నిరూపకాలతోను నిర్దేశించబడింది.



చిత్రము 6.4

పరిశీలకుడు S చట్రంలో ఉండి కాంతి వేగము కొలవగా వచ్చినది

కాంతి వేగము $c = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} / t$ or $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$.

అదే విధముగా S' చట్రంలో ఉన్న పరిశీలకునికి

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0$$

S పరంగా S' కదలిక కేవలము $+\ x$ అక్షము పైనే ఉంది. కావున $Y = Y'$ మరియు $Z = Z'$

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2$$

రెండు చట్రాల మధ్య రూపాంతరీకరణము ఈ క్రింది విధంగా సంబంధాన్ని సూచించవచ్చు.

$$x' = k(x - vt)$$

ఈ సమీకరణంలో ఇమిడి వున్న గమనించదగు విషయాలు -

1. x' మరియు x ల మధ్య సంబంధం ఎంత సరళంగా ఉండటానికి వీలవుతుందో అంత సరళంగా ఉండాలి. సమీకరణము సరళ రేఖాత్మకం కావున S చట్రంలోని ఏదైయినా ఒక సరళ సంఘటన S^1 చట్రంలోని ఒక సరళ సంఘటనకు సాదృశ్యంగా ఉండాలి.
2. సంబంధం అనేది సరళంగా ఉండాలి.
3. ఒక ప్రత్యేక సందర్భంలో x' మరియు x మధ్య ఉత్పాదించే గెలీలియన్ రూపాంతరీకరణము $x' = x - (vt)$

అనుపాత స్థిరాంకమైన ఈ k, x మీద గాని t మీద గాని ఎంత మాత్రం ఆధారపడదు. అయితే k అనునది v మరియు c ల మీద ఆధారపడి ఉంటుంది.

S' చట్రం కేవలం X అక్షం దిశలోనే చలిస్తున్నందు వలన Y, Z నిరూపకాలలో మార్పు ఉండదు.

అనగా $Y' = y \quad Z' = Z$

ఇక x', t'ల పరంగా xని వ్రాస్తే వ్యుత్క్రమీ రూపాంతరీకరణంలో మనం 'S' సాపేక్షంగా S' యొక్క వేగం V అవుతుందని గుర్తిస్తే చాలు.

$$\therefore\ x = k\left[x' + vt'\right]$$

$$x' = k\left(x - vt\right)$$

x' విలువను x కొరకు ప్రతిక్షేపిస్తే

$$x = k\left[k\left(x - vt\right) + vt'\right]$$

$$kvt' = x\left(1 - k^2\right) + k^2 vt$$

$$t' = \frac{x\left(1 - k^2\right)}{kv} + kt$$

మరియు $x' = k\left(x - vt\right);\ y' = y\ \&\ z' = z$

ఇందులో v విలువను రాబట్టటం కోసం సాపేక్షతో సిద్ధాంతం యొక్క రెండవ ప్రతిపాదని ఉపయోగిస్తాం. ఈ ప్రతిపాదన ప్రకారం

$$x = ct\ \&\ x' = ct'$$

$x'\ \&\ t'$ కొరకు ప్రతిక్షేపిస్తే

$$k\left(x - vt\right) = ckt + \left(\frac{1 - k^2}{kv}\right)cx$$

$$x = \frac{ckt + vkt}{k - \left(\frac{1 - k^2}{kv}\right)c}$$

$$x = ct\left[\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \left(\frac{1}{k^2} - 1\right)\frac{c}{v}}\right]$$

ఎప్పుడైతే $\dfrac{1+\dfrac{v}{c}}{1-\left(\dfrac{1}{k^2}-1\right)\dfrac{c}{v}}=1$ మరియు $k=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ అవుతుంది.

అప్పుడు పై సమీకరణము $x = ct$ లాగానే ఉంటుంది.

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

$$y'=y$$

$$z'=z$$

$$t'=\frac{t-\dfrac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

6.6.1 నిరపేక్ష నిర్దేశ చట్రము : గెలీలియన్ రూపాంతరణములో కొన్ని యాంత్రిక సూత్రాలు అచరములని మనకు తెలుసు. అయితే, విద్యుదయస్కారంత గతి సూత్రాలు మరియు మాక్స్‌వెల్ సమీకరణములు, మాత్రం గెలీలియన్ రూపాంతరీకరణంలో అచరములు కావు. అందువల్ల కాంతి వేగం విలువ, వేరు వేరు వేగములతో కదులుతున్న జడత్వ నిర్దేశ చట్రాలలో వేరువేరుగా ఉంటాయి. ఏ నిర్దేశ చట్రంలో కాంతి వేగం ఖచ్చితంగా మాక్స్‌వెల్ సమీకరణం నుండి వచ్చిన విలువ $c=\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \in_0}} = 3\times10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$గా ఉంటుందో దానినే (శుద్ధ) నిరపేక్ష చట్రంగా శాస్త్రజ్ఞులు భావించారు. ఇట్లాంటి నిరపేక్ష నిర్దేశ చట్రంలో కాంతి వేగం(c) అన్ని దిశలలోను ఒకే విలువను కల్గి ఉంటుంది.

అన్ని భౌతిక సూత్రాలూ గెలీలియన్ రూపాంతరీకరణంలో ఆచరంగా ఉండవు. కనుక అట్లా అచరంగా ఉండే రూపాంతరీకరణములను లారెంజ్ శాస్త్రజ్ఞుడు రూపొందించాడు.

భౌతిక శాస్త్ర సూత్రాలను చతుస్సదిశా రూపంలో ప్రకటించనప్పుడు అవి అచరములు.

6.6.2 లారెంజ్ విలోమ రూపాంతరీకరణము : S పరంగా S' చట్రం 'v' వేగంతో కదులుతున్నది అనుకుంటే S' పరంగా v' వేగంతో చట్రాలు కదులుతున్నట్లుగా తీసకుంటే లొరెంజ్ రూపాంతరీకరణం ఈ క్రింది విధముగా ప్రకటించవచ్చు.

$$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}};\quad t=\frac{t'+\dfrac{vx'}{v^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

$$y = y'; \; z = z'$$

ఎప్పుడయితే S' చట్రం యొక్క వేగం (v), S పరంగా తక్కువయితే లారెంజ్ రూపాంతరీకరణము అనేది గెలీలియన్ రూపాంతరీకరణముగా మారుతాయి.

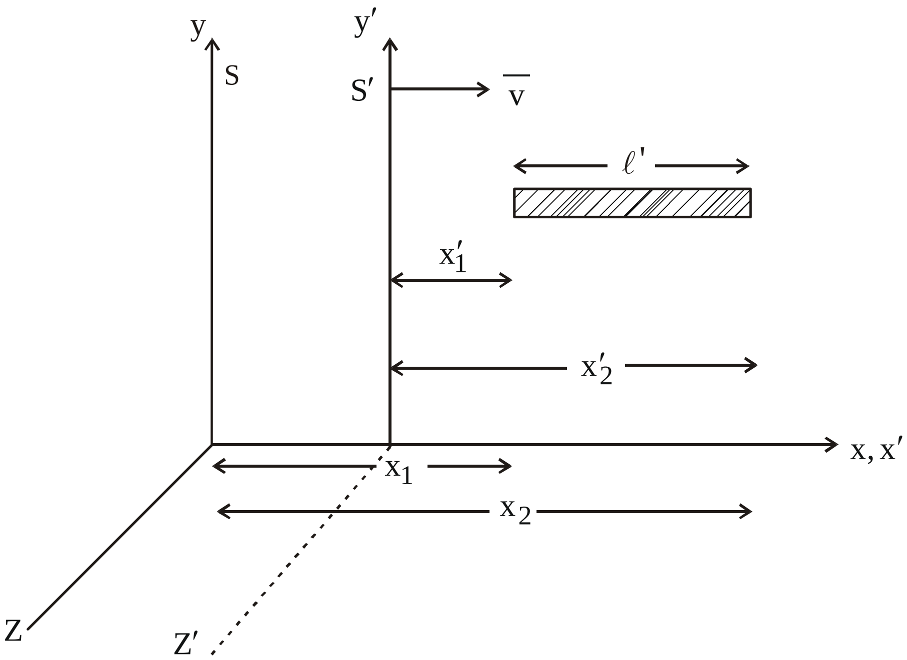
ఎప్పుడయితే $v = \frac{v^2}{c} < c < 1$

$$\therefore x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ (Lorentz) } \Rightarrow x' = x - vt \text{ (Galilean)}$$

దైర్ఘ్య సంకోచము

$S \& S'$ అను రెండు చట్రాలు తీసుకుందాం. S' చట్రం S పరంగా $x-$ అక్షం దిశగా స్థిర వేగం V తో కదులుతున్నది. S' చట్రంలో ఒక కడ్డీ $x-$ అక్షంకి సమాంతరముగా ఉందని అనుకుందాము. S' చట్రంలో $'t'$ సమయంలో కడ్డీ యొక్క రెండు చివర బిందువుల స్థానాలలో $x_1' \;\&\; x_2'$ లు అయితే ఆ కడ్డీ యొక్క పొడవును ఈ క్రింది విధముగా వ్రాస్తాము.

$$\ell' = x_2' - x_1' \text{ --------- (1)}$$



చిత్రపటము 6.5

S చట్రంలో ఉన్న పరిశీలకునికి అదే సమయంలో కడ్డీ యొక్క పొడవుని కొలుస్తారు. ఆ కడ్డీ చివరలు బిందువులు స్థానాలు x_1 , x_2 లు కాగా ఆ కడ్డీ పొడవును ఈ క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును.

$$\ell = x_2 - x_1$$

x_1', x_2' మరియు x_1, x_2 ల మధ్య గల సంబంధాన్ని లారెంట్జ్ రూపాంతరీకరణము ఈ క్రింది విధముగా సూచిస్తుంది.

$$x_2' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

(1)వ సమీకరణములో పై విలువలను ప్రతిక్షేపిస్తే

$$\ell' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\ell' = \frac{\ell}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \ell = \ell' \sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}$$

పరిశీలకునికి సాపేక్షంగా దండం కదులుతూ ఉన్నప్పుడు దాని పొడవు $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ కారకం చేత సంకుచితం అయినట్లు అగుపిస్తుంది. దీనినే "లారెంట్జ్ - ఫిట్జ్‌రలాండ్" సంకోచం అంటారు.

పై సమీకరణానికి ఫలితములు ఈ క్రింది విధముగా ఉంటాయి.

1. 'c'తో పోల్చినప్పుడు 'v' చిన్నదైతే, $\frac{v^2}{c^2}$ అనునది 1 పోల్చినప్పుడు ఉపేక్షణీయము. అపుడు $\ell = \ell'$

2. 'v' విలువ 'c'తో పోల్చదగినంతదైతే $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ అనునది 1 కంటే తక్కువ కాబట్టి $\ell < \ell'$.

3. 'v' విలువ 'c'కి సమానం కాని, ఎక్కువ కాని అయితే, $\frac{v^2}{c^2}$ విలువ 1కి కాని అంతకంటే ఎక్కువ కాని ఉంటుంది.

ఆ సందర్భంలో $\ell =$ సున్నా లేక ఊహాత్మకము అగును. కాని అది అసాధ్యము. కాబట్టి కాంతి వేగమునకు సమానమైన వేగము గల వస్తువు లేదు.

$S \& S'$ చట్రములో రెండు కడ్డీలు ఒక్కొక్క చట్రములో ఒకటి ఉన్నట్లుగా ఒక చట్రంలో నున్న పరిశీలకుడు వేరొక చట్రంలో నున్న కడ్డీని పరిశీలించినట్లయితే అది తను ఉన్న చట్రంలోని కడ్డీతో పోలిస్తే చిన్నదిగా ఉన్నట్లు గమనించును.

6.8 కాలవ్యాకోచము

S, S' అను రెండు చట్రాలు ఉన్నవి అనుకుందాం. Sతో సాపేక్షంగా S' చట్రం V వేగంతో కదులుచున్నది. X అక్షంలో S చట్రం వద్ద ఒక గడియారము స్థిర కాల వ్యవధిలో Δt సంకేతాలు ఇస్తుంది.

అప్పుడు $\Delta t = t_2 - t_1$

t_1, t_2 అనునవి ఆ సమయంలో వరుసగా వచ్చు సంకేతాలు కాబట్టి పైన చెప్పిన కాలవ్యవధి S' చట్రంలోనిది $\Delta t'$ కావచ్చు. అప్పుడు $\Delta t' = t_2' - t_1'$

లారెంజ్ రూపాంతరీకరణం ప్రకారం

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t_2' = \frac{t_2 - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

t_1', t_2' విలువలను Δt^1లో ప్రతిక్షేపిస్తే మనకు $\Delta t'$ & Δt మధ్య గల సంబంధం తెలుస్తుంది.

$$\Delta t' = t_2' - t_1' \Rightarrow \Delta t' = \frac{t_2 - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{t_1 - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Delta t' = \frac{(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ఈ విధముగా S' చట్రములో పరిశీలించిన కాలవ్యవధి $\Delta t'$ అనునది S చట్రంలో Δt కన్నా ఎక్కువ. అందుకే దీన్ని కాల వ్యాకోచము అన్నారు.

పై సమీకరణాల ఫలితాలు కొన్ని ప్రత్యేక సందర్భాలలో ఈ క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

1. 'c'తో పోలిస్తే 'v' చిన్నదైతే అప్పుడు $\frac{v^2}{c^2}$ అనునది 1తో పోలిస్తే ఉపేక్షయతాము. అప్పుడు $\Delta t' = \Delta t$

   ఒక గిడియారము కదులుచున్నప్పుడు, నిశ్చలంగా ఉన్నప్పుడు ఒకటే కాల వ్యవధిని సూచిస్తుంది.

2. v విలువ 'c'కి పోల్చదగిన $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ అనునది 1 కంటే తక్కువ మరియు $\Delta t' > \Delta t$

3. v విలువ 'c' కంటే ఎక్కువైతే లేక సమానమైన $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ విలువ సున్నా కాని ఊహాత్మక విలువని కాని కలిగి ఉంటుంది. కావున $\Delta t'$ అనునది అనంతము లేక ఊహాత్మక విలువగా కలిగి ఉంటుంది.

కాని ఈ కల్పన అర్థరహితము. దీనిద్వారా మనకు తెలిసిన విషయం ఏమిటంటే ఎక్కడైనా, ఏదైనా ఒక వస్తువు వేగం, కాంతి వేగం కంటే ఎక్కువ కాని ఉండదు.

6.8.1 కాలవ్యాకోచము నిరూపించుటకు ఒక ప్రయోగము : π - మెసాన్ అనేది μ - మెసాన్ మరియు న్యూటన్‌గా క్షీణిస్తుంది. వాటిలో 1.8×10^{-8} sec కాలంలో వాటిలో సగం(అర్థజీవిత కాలం) నశించును. ఒక దూలము నుండి π - మెసాన్ $0.99\,c$ వేగంతో ఏర్పడుతున్నాయి అనుకుందాము. π - మెసాన్ అభివాహము రెండు స్థలాల్లో 30మీ॥ దూరంలో ఉన్నాయి అనుకుందాము.

30మీ॥ దూరాన్ని ప్రయాణించటానికి పట్టే కాలవ్యవధి $= \frac{30m}{0.99c} = \frac{30}{0.99\times3\times10^{+8}\,mts^{-1}} = 10.1\times10^{-8}\,sec.$

ఈ విలువ π - మెసాన్‌ల అర్థ జీవితమునకు 5.6 రెట్లు ఉంటుంది. ఈ విధముగా అభివాహము $2^{-5.6}$ తగ్గుతుంది. లేదా అసలు అభివాహము కంటే 2% తక్కువ 30మీ॥ దూరంలో వాస్తవంగా కొలతలు తీసుకొన్నట్లయితే అసలు అభివాహమునకు 60% తగ్గును.

ఈ తేడాను మనం కాల వ్యాకోచముగా చెప్పవచ్చు.

$$\Delta t = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$= 10\times10^{-8}\sqrt{1-\frac{0.99c}{c}}\quad v = 1.4\times10^{-8}\ sec$$

ఈ విలువ అర్థ జీవితకాలానికి 0.78 రెట్లు ఎక్కువగా ఉంది. కాబట్టి అభివాహము $2^{-0.78} = 60\%$కు పడిపోతుంది. ఈ విలువ ప్రయోగ పూర్వకంగా తెలుసుకున్న విలువలకు సరిపోవచ్చు.

ఈ విధముగా కాలవ్యాకోచమును నిరూపించవచ్చు.

6.9 వేగాల సంకలనము

$S \& S'$ అను రెండు చట్రములు ఉన్నవి అనుకుందాము. S చట్రముతో సాపేక్షంగా S' చట్రం 'v' వేగంతో $x-$ అక్షము వైపు కదులుతున్నవి అనుకొందాం.

S చట్రంకి సాపేక్షంగా ఒక వస్తువు యొక్క వేగం $u = \dfrac{dx}{dt}$

dx అనునది స్థానభ్రంశము మరియు dt అనునది S కి సాపేక్షంగా ఉన్న సమయము.

అదే విధముగా S' సాపేక్షముగా ఒక వస్తువు వేగం, $u' = \dfrac{dx'}{dt}$

లారెంట్జ్ రూపాంతరీకరణము ద్వారా

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = k\left(x' + vt'\right)$$

$$t = k\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \quad \text{ఇక్కడ} \quad k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

పై సమీకరణాన్ని అవకలనం చేయగా

$$dx = k\left(dx' + vdt'\right)$$

$$dt = k\left(dt' + v\frac{dx'}{c^2}\right)$$

అప్పుడు $$\frac{dx}{dt} = \frac{k\left(dx' + vdt'\right)}{k\left(dt' + v\frac{dx'}{c^2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}$$

$$\Rightarrow u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

ఇది సాపేక్షతా పూర్వక వేగాంశముల రూపాంతరీకరణము. సాంప్రదాయక సంబంధము ఈ క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును.

$$u = u' + v$$

కొన్ని ప్రత్యేక సందర్భాలలో ఈ క్రింది ఫలితాలను రాబట్టవచ్చును.

1. c తో పోల్చినప్పుడు u' మరియు v చిన్నవైతే అప్పుడు $\frac{u'v}{c^2}$ విలువ '1' తో పోల్చినప్పుడు ఉపేక్షియణము.అప్పుడు

$$u = u' + v$$

పై సమీకరణం సాంప్రదాయక సంబంధ సమీకరణం లాగానే ఉంది.

2. $u' = c$ అయితే అప్పుడు

$$u = \frac{c + v}{1 + \frac{cv}{c^2}} = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c}} = \frac{c + v}{c + v} \cdot c = c$$

3. $v = c$ అయితే అప్పుడు

$$u = \frac{u' + c}{1 + \frac{u'c}{c^2}} = \frac{u' + c}{u' + c} \cdot c = c$$

4. $u' = v = c$ అయితే అప్పుడు

$$u = \frac{c + c}{1 + \frac{c \cdot c}{c^2}} = \frac{2c}{2} = c$$

6.10 ఐన్‌స్టీన్ యొక్క ద్రవ్యరాశి మరియు శక్తుల మధ్య సంబంధము

ఒక సమీకరణాన్ని తీసుకుందాము

$$F = \frac{d}{dt}(mv)$$

సాపేక్షతా సిద్ధాంతం ప్రకారం, ద్రవ్యరాశి, వేగము చరములు

$$\therefore F = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}$$

$x-$ అక్షం దిశలోనే 'F' బలము వలన 'dx' స్థానభ్రంశం జరిగితే అప్పుడు గతిజశక్తి $dk = Fdx$
(2)వ సమీకరణము F విలవను ప్రతిక్షేపిస్తే

$$dk = m\frac{dv}{dt}dx + v\frac{dm}{dt}dx$$

$$\Rightarrow dk = m\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dv + v\frac{dx}{dt}dm$$

$$\Rightarrow dk = mvdv + v^2dm \qquad \left(\because \frac{dx}{dt} = v\right) \text{----------- (3)}$$

వేగముతో ద్రవ్యరాశి మార్పుని ఈ క్రింది విధముగా సూచించవచ్చు.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$ కావున

$$m^2 = \frac{m_0^2}{1-v^2/c^2} = \frac{m_0^2 c^2}{c^2 - v^2}$$

$$\Rightarrow m^2c^2 - m^2v^2 = m_0^2c^2$$

పై సమీకరణాన్ని అవకలనం చేయగా

$$c^2\cdot 2m\cdot dm - v^2\cdot 2m\,dm - m^2\cdot 2v\cdot dv = 0$$

$$\Rightarrow c^2dm - v^2dm - mv\,dv = 0$$

$$\Rightarrow c^2dm = mvdv + v^2dm \text{ ----------- (4)}$$

(3), (4) సమీకరణాలను పోలిస్తే

$$dk = c^2dm$$

తొలిగా ఒక వస్తువు విరామంలో ఉంది అనుకుందాం. బలము ప్రయోగిస్తే, దానికి 'v' వేగము వచ్చినది. అప్పుడు ఆ వస్తువు యొక్క ద్రవ్యరాశి m_0 నుంచి m కి మారుతుంది.

ఒక వస్తువు యొక్క మొత్తము గతిజశక్తి

$$\int dk = \int_{m_0}^{m} c^2\, dm$$

$$\Rightarrow k = c^2 \left(m - m_0\right)$$

$$\Rightarrow mc^2 = m_0c^2 + K \cdot E$$

ఆ వస్తువు విరామంలో ఉంటే దాని గతిజ శక్తి సున్నా మరియు ఆ వస్తువు యొక్క విరామ శక్తి m_0c^2

K అనునది ద్రవ్యరాశి పెరగటం వలన గతిజ శక్తి పెరిగిన దానికి సూచిక. అప్పుడు ఒక కదిలే వస్తువు యొక్క మొత్తము శక్తి కదులుతున్నప్పుడు ఉన్న గతిజ శక్తికి మరియు విరామంలో ఉన్నప్పుడు శక్తి.

అప్పుడు మొత్తము శక్తి,

$$E = k + m_0c^2$$

$$= c^2 \left(m - m_0\right) + m_0c^2$$

$$E = mc^2$$

శక్తికి, ద్రవ్యరాశికి మధ్య గల సార్వత్రిక తుల్యతని ఈ సమీకరణం సూచిస్తుంది.

6.11 చతుస్పదిశా రూపము

$S \& S'$ అను రెండు చట్రాలు ఉన్నవి అనుకుందాము. X- అక్షము దిశగా S చట్రంతో సాపేక్షంగా S' చట్రం 'v' వేగముతో పోవుచున్నది. S చట్రంలో జరిగిన ఒక సంఘటనను (x, y, z, t) నిరూపకాలతో అదే సంఘటన S' చట్రంలో (x', y', z', t') అని నిరూపకాలతో సూచిద్దాము. $S \& S'$ చట్రంలో ఉన్న నిరూపకాలు లారెంట్జ్ రూపాంతరీకరణముతో సంబంధము కలిగి ఉంటాయి. సంఘటనకు నాలుగు నిరూపకాలు ఉండటం వలన "చతుస్పదిశ" లేక చతుస్పదిశమితులని అందురు.

ఒక బల్బుని వెలిగించినప్పుడు దాని నుంచి జనించిన విద్యుదయస్కాంత తరంగాలు, S చట్రంలో, అన్ని దిశలలోను 'c' వేగంతో ప్రయాణిస్తే, ఆ తరంగాలు S' చట్రంలో కూడా అన్ని దిశలలోను అంతే 'c' వేగంతో ప్రయాణించాలి. ఈ గోళాకార తరంగాల పురోగామి తరంగాలయితే, ఈ గోళం వ్యాసార్థం 'c' వేగంతో పెరుగుతూ ఉంటుంది. అనగా

$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$ ----------- (1) మరియు

$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$ -------- (2) కావాలి.

కావున $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2$

పై సమీకరణము

$S \& S'$ చట్రాలలో $\left(x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2\right)$ ఒకే విలువ ఉండటాన్ని సూచిస్తుంది. దీనినే లారెంట్జ్ అచరము అందురు.

ఈ రాశిని x_μ^2తో సూచిద్దాము.

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x_\mu^2$$

ఏ విధముగా అయితే r^2 ని త్రిమాత్రిక సదిశ యొక్క పొడవు అని అందురో ఆ విధముగా x_μ^2ని చతుస్సదిశ మాత్రిక యొక్క పొడవు యొక్క వర్గము.

కాబట్టి మనము 't' అనే నిరూపకాన్ని ఊహాత్మక నాల్గవ చరరాశిగా (ict)ప్రతిపాదన చేద్దాము. అది (ict) పొడవు యొక్క మితులను కలిగి ఉంటుంది.

ఇక్కడ మనం కాలానికి ఒక నిరూపకం యొక్క అభిలక్షణాలను ఆపాదిస్తున్నాము. పర్యవసానముగా నాల్గు మితులు గల్గిన అంతరాళంలో ఒకానొక సదిశ యొక్క నాలుగు అంశాలుగాను మనం యీ $x_1, x_2, x_3,\ x_4\ [ict]$ నిరూపకాలను భావించవచ్చు. ఈ సదిశ యొక్క పొడవు వర్గము

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + x_4{}^2 = \sum_{\mu=1}^{4} x_\mu{}^2$$

ఇక్కడ $x_1 = x;\ y = x_2;\ x_3 = z;\ x_4 = ict$

లారెంట్జ్ రూపాంతరీకరణ సమీకరణాల నుంచి ఈ క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చు.

$$x' = \frac{x - vt}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}};\ \ y' = y;\ z' = z$$

$$\&\ \ t' = \frac{t - \left(vx/c^2\right)}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}}$$

లేక $$x' = \frac{x - v\left(\frac{x_4}{ic}\right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}};\ \ y' = y;\ z' = z$$

$$\& \quad ict' = ic\left[\frac{t-\left({vx}/{c^2}\right)}{\left(1-{v^2}/{c^2}\right)^{1/2}}\right] = \frac{ict-\left(\frac{ivx}{c}\right)}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

వీటిని మరలా ఈ క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చు.

$$x_1' = \frac{x_1 + i\left(\frac{vx_4}{c}\right)}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}};\ x_2' = x_2;\ x_3' = x_3$$

$$\& \qquad x_4' = \frac{x_4 - i\left(\frac{vx_4}{c}\right)}{\left(1-{v^2}/{c^2}\right)^{1/2}}$$

సౌలభ్యం కోసం $\frac{v}{c}=\beta$ అని వ్రాద్దాం

మరియు $\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \gamma$

లారెంజ్ రూపాంతరీకరణముతో పై నాలుగు సమీకరణాలు ఈ క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చు.

$$x_1' = \gamma\left[x_1 + i\beta x_4\right] = \gamma x_1 + 0 + 0 + i\beta\gamma x_4$$

$$x_2' = x_2 \qquad\qquad = 0 + 1\cdot x_2 + 0 + 0$$

$$x_3' = x_3 \qquad\qquad = 0 + 0 + 1\cdot x_3 + 0$$

$$x_4' = \gamma\left[x_4 - i\beta x_1\right] = -i\beta\gamma x_1 + 0 + 0 + \gamma x_4$$

ఇప్పుడు మాత్రికా విధానంలో ఈ సమీకరణాలను ఈ క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును.

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

ఇది చతుస్సదిశా రూపమును ఇస్తుంది.

6.12 సాధించిన సమస్యలు

1. $x = 100\text{km},\ y = 10\text{km}$, z = 1 km మరియు $t = 5\times10^{-6}$ సెకన్ల వద్ద S చట్రంలో ఒక సంఘటన జరిగిందని అనుకుందాము. ఉమ్మడి $x - x'$ అక్షము మీదుగా S' చట్రము S చట్రముతో సాపేక్షముగా 0.92c వేగముతో కదులుచున్నదని అనుకుందాము. రెండు అక్షముల మూల బిందువులు $t' = t = 0$ వద్ద ఏకీభవించినవని అనుకుందాము. ఈ సంఘటనకు S' చట్రములో x', y', z' మరియు t' నిరూపకాలు ఏమిటి? (ఇచ్చిన విలువలు రాబట్టుటకు విలోమ రూపాంతరీకరణమును ఉపయోగించి వచ్చిన విలువలను నిరూపించుము).

పరిష్కారము : ఇచ్చిన విలువలు

$$x = 100\text{km};\quad y = 10\text{km};\quad z = 1\text{km};\quad t = 5\times10^{-6}\,\text{sec}$$

$$x = 100\times10^3\,\text{m};\quad y = 10\times10^3\,\text{m};\quad z = 1\times10^3\,\text{m}$$

$$v = 0.92c \quad c = 3\times10^8\,\text{m}$$

లారెంజ్ రూపాంతరీకరణము నుండి,

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}};\ y' - y;\ z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ఇప్పుడు

$$x' = \frac{100\times10^3 - 0.92\times3\times10^8\times5\times10^{-6}}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.92\times c}{c}\right)^2}} = \frac{986.2}{0.3919}\times10^2 = 2516.4\times10^2$$

$$= 251.64\times10^3$$

$$x' = 251.64\text{km}$$

$$t' = \frac{5\times10^{-6} - \dfrac{0.92\times c\times100\times10^{3}}{c^{2}}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{0.92\times c}{c}\right)^{2}}} = \frac{0.005\times10^{-3} - 0.3066\times10^{-3}}{0.3919}$$

$$= \frac{-0.3016}{0.3919}\times10^{-3} = -7.7\times10^{-4}\,\text{sec}$$

అలాగే $x' = 251.64\text{km}$ $y' = 251.64\text{km},\ y' = 10\text{kmz} = 1\text{km},\ t' = -7.7\times10^{-4}\,\text{sec}$

విలోమ రూపాంతరీకరణమును ఉపయోగించి నిరూపణ చేయుట :-

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\dfrac{v^{2}}{c^{2}}}} = \frac{251.64\times10^{3} + 0.92\times3\times10^{8}\times -7.7\times10^{-4}}{0.3919}$$

$$= 99.82\times10^{3} \simeq 100\,\text{Km}$$

$$t = \frac{t' + {vx'}/{c^{2}}}{\sqrt{1-{v^{2}}/{c^{2}}}} = \frac{-7.7\times10^{-4} + \dfrac{0.92\times c\times251.64\times10^{3}}{c^{2}}}{0.3919}$$

$$= 0.0432\times10^{-4}$$

$$= 4.32\times10^{-4}$$

$$= 5\times10^{-6}\,\text{sec}$$

2. ఒక ప్రయోగశాల చట్రానికి సాపేక్షంగా $0.6\,c$ వేగంతో ఒక దండము ప్రయాణిస్తుంది. ప్రయోగశాల నుండి పరిశీలిస్తే దండం పొడవు 1 మీ॥గా కనిపించింది. ఆ దండము యొక్క సక్రమమయిన పొడవు ఎంత?

పరిష్కారం : దండము యొక్క సక్రమమయిన పొడవు ℓ' అనుకుందాం. దండానికి సాపేక్షంగా V వేగంతో చలించే పరిశీలకుడు గమనించే దండం పొడవు $\ell = \ell'\sqrt{1-\dfrac{v^{2}}{c^{2}}}$ అవుతుంది.

మన సమస్యతో, $\ell = 1$ మీ॥, $v = 0.6\,c$

$$\therefore \quad \ell = \ell'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Rightarrow 1 = \ell'\sqrt{1-\left(\frac{0.6\ c}{C}\right)^2}$$

$$= \ell'\sqrt{1-0.36}$$

$$= \ell'\,(0.8)$$

$$\Rightarrow \ell' = \frac{1}{0.8} = 1.25\ m.$$

దండంతో పాటు అదే వేగంతో చలిస్తున్న పరిశీలకునకు కనిపించే దండం యొక్క సక్రమయిన పొడవు $l_0 = 1.25$ మీ॥ కానీ, దండానికి సాపేక్షంగా చలనంలో నున్న ప్రయోగశాలలో ఉండి పరిశీలించినపుడు దాని పొడవు 1 మీ॥గా మాత్రమే కనిపించును. ఇదియే దైర్ఘ్య సంకోచము.

3. చలన వ్యవస్థలో ఉన్న ఒక సదిశరాశిని $8i + 2j$తో సూచిస్తాము. ఆ సదిశరాశి $1.8\times10^8\,m/s$ వేగంతో కదులుతున్నట్లయితే S చట్రములో ఉన్న పరిశీలకుడు ఆ సదిశరాశినే ఎలా సూచించగలడు?

పరిష్కారం :-

x - అక్షము మీద ఉన్నపుడు ఇచ్చిన సదిశరాశి యొక్క ప్రక్షేపము = 8

మరియు

y - అక్షము మీద ఉన్నపుడు ప్రక్షేపము = 2

చట్రము x - అక్షము వెంబడే ప్రయాణిస్తున్నట్లయితే x - అంశము మాత్రమే సంకోచిస్తుంది.

అప్పుడు $$x' = x\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 8\sqrt{1-\left(\frac{1.8}{3.0}\right)^2}$$

$$= 8\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

$$= 8\sqrt{1-\frac{9}{25}}$$

$$= 8\times\frac{4}{5} = \frac{32}{5} = 6.4$$

కాబట్టి ప్రస్తుత సదిశరాశి = $6.4i + 2j$

4. ప్రయోగశాల వద్ద నిశ్చల స్థితిలో నున్న పరమాణువులో ఒక ప్రక్రియ జరుగుటకు అవసరమైన కాలము 10^{-6} సెకను. ఒక వేళ పరమాణువు $5\times10^7\,m/sec$ వేగంతో ప్రయాణిస్తున్నపుడు ప్రయోగశాలలో ఉన్న పరిశీలకునికి ఈ ప్రక్రియ జరుగుటకు

ఎంత సమయం అవసరమవుతుంది.

పరిష్కారము :-

లారెంజ్ రూపాంతరీకరణము నుండి,

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

ఇచ్చిన విలువలు $\Delta t = 10^{-6}\,\text{sec}$ మరియు $v = 5\times10^{9}\,\text{cm/sec}$

$$\therefore \Delta t' = \frac{10^{-6}}{\sqrt{1-\left(\frac{5\times10^{9}}{3\times10^{10}}\right)^2}}$$

$$= \frac{10^{-6}}{\sqrt{1-\frac{25}{900}}} = 1.013\times10^{-9}\,\text{sec}$$

5. ఒక μ -మెసాన్ పుంజం $v = 0.8\,c$ వేగంతో ప్రయాణిస్తుంది. ప్రయోగశాలలో పరిశీలించగా వాటి అర్ధాయువు 2.9×10^{-6} సెకను. అది నిశ్చలతలో క్షయిస్తే వాటి అర్ధాయువెంత?

పరిష్కారం :-

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$\Delta t' = 2.9\times10^{-6}$ సెకను, $v = 0.8c$

$$\Delta t = \Delta t'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$= 2.9\times10^{-6}\sqrt{1-\left(\frac{0.8c}{c}\right)^2}$$

$\Delta t = 1.74\times10^{-6}$ సెకను.

6. ప్రయోగశాలలో ఉన్న లెడ్ ఫలకములో నిశ్చలముగా ఉన్న μ - మిసాన్‌ల అర్ధ జీవిత కాలము 2.3×10^{-6} సెకనుగా గమనింపబడిరి. కాస్మిక్ కిరణములు విచ్ఛిన్నంగా అయినపుడు అధిక వేగము కలిగిన μ - మీసాన్‌లను భూమి మీద

నుంచి పరిశీలించినపుడు వాటి అర్థ జీవిత కాలము 1.6×10^{-5} సెకనుగా గమనించిరి. కాస్మిక్ కిరణ మీసాన్‌ల వేగమును కనుగొనుము?

పరిష్కారము :

$$\Delta t' = 1.6 \times 10^{-5} \text{ sec}$$

$$\Delta t = 2.3 \times 10^{-6} \text{ sec}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$1.6 \times 10^{-5} = \frac{2.3 \times 10^{-6}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{1.6 \times 10^{-5}}{2.3 \times 10^{-6}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$6.9565 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా,

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{(6.9565)^2}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - 0.02066$$

$$v = 0.989c$$

6.13 సారాంశము

1. ఒక వస్తువు యొక్క చలనమును వివరించుటకు "నిర్దేశ చట్రము" అనబడే ఒక నిర్దుష్ట నిరూపక వ్యవస్థ అవసరము.

2. చలనమును ఏ వ్యవస్థ పరంగా వివరిస్తున్నామో దానినే "నిర్దేశ చట్రము" అందుము.

3. నిర్దేశ చట్రములు రెండు విధములు (1) జడత్వ, (2) అజడత్వ.

4. జడత్వ నిర్దేశ చట్రములో న్యూటన్ జడత్వ (మొదటి) సూత్రము వర్తించును.

5. జడత్వ చట్రపరంగా సమ వేగముతో చలించే ఏ చట్రమైనా జడత్వ చట్రమే అగును.

6. జడత్వ చట్రము కాని చట్రము అజడత్వ చట్రము.

7. వివరించుటకు ఉపయోగించే నిర్దేశ చట్రము పై ఆధారపడని దానిని "సంఘటన" అందురు.

8. ఒకే చట్రములో వేరు వేరు ప్రదేశములలో జరిగిన రెండు సంఘటనలను, ఆయా ప్రదేశములలోనున్న రెండు గడియారములను ఏక కాలీన సంఘటనలు అనవచ్చును.

   సంఘటన కాలమును సంఘటన జరిగిన ప్రదేశములోనే ఉన్న గడియారముతో కొలవబడును.

9. సంఘటనల ఏక కాలీనత ఆ సంఘటనలను వివరించుటకు ఉపయోగించిన నిర్దేశ చట్రము నుండి స్వతంత్రము కాదు. ఒక నిర్దేశ చట్ర పరంగా ఏక కాలీనమైన సంఘటనలు ఏవరొక చట్ర పరంగా ఏక కాలీనములు కాకపోవచ్చును.

10. ఒక సంఘటనను వివరించుటకు ఒక నిర్దేశ చట్ర పరమైన నాలుగు నిరూపకములు అవసరము (x, y, z, t)

11. అన్ని జడత్వ చట్రములలోను మూల భౌతిక శాస్త్ర సూత్రములు సర్వ సమానత్వము కలిగి యుండుటను గెలీలియన్ అచరము అందురు.

12. S' అను నిర్దేశ చట్రము ఏదైనా దిశలో కదులుచూ, O', O పరంగా V అను వేగముతో కదులుచుంటే,

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_2 \hat{k}$$ అని తెలియజేస్తే,

t కాలము తరువాత

$$x' = x - v_x t$$

$$y' = y - v_y t$$

$$z' = z - v_z t$$

u_x, u_y, u_z అనునవి S చట్ర పరంగా P బిందువు యొక్క వేగములు మరియు u'_x, u'_y, u'_z అనునవి S' చట్రపరంగా P బిందువు యొక్క వేగములు అయిన

$$u'_x \hat{i} + u'_{y'} \hat{j} + u'_z \hat{k} = u_x i + u_y j + u_z k - v_x i - v_y j - v_z k$$

లేదా $u' = u - v$

$$\frac{du'}{dt'} = \frac{du}{dt} - 0 \qquad (\because v \text{ స్థిరము కనుక})$$

$$dt' = dt$$

ఇది వేగమునకు సంబంధించిన గెలీలియన్ రూపాంతరీకరణ అవకలనము చేసిన $a' = a$ అని చూపవచ్చును.

14. **సాపేక్ష సిద్ధాంత ప్రతిపాదనలు :-**

1. భౌతిక సూత్రాలన్నీ, అన్ని జడత్వ నిర్దేశ చట్రాలలో ఒకే విధంగా ఉంటాయి.

2. స్వేచ్ఛా అంతరాళంలో కాంతి యొక్క వేగము అందరు పరిశీలకులకు వారు ఏ విధంగా చలిస్తున్నప్పటికి, ఒకే విలువను కలిగి ఉంటుంది.

15. గెలీలియన్ రూపాంతరీకరణములలో కేవలము న్యూటను సూత్రములే అచరములు. కానీ ఇతర గతి శాస్త్ర సూత్రములు మాక్స్‌వెల్ సమీకరణములు అచరములు కావు. కనుక వేరు వేరు వేగములను కలిగియున్న వివిధ జడత్వ చట్రములలో కాంతి వేగము వేరు వేరుగా నుండును.

16. మాక్స్‌వెల్ సమీకరణముల ద్వారా రాబట్టిన కాంతి వేగము $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \in_0}}$ $c = 3 \times 10^8 \, m/s$ విలువయే నిర్దేశ చట్రములో రాబట్ట గలమో దానినే "నిరపేక్ష చట్రము" అనబడును.

17. భౌతిక శాస్త్ర సూత్రములన్నియూ అచరముగా నుండు రూపాంతరీకరణములను లారెంజ్ ఏర్పరచెను. చతుస్పదిశా రూపములలో భౌతిక శాస్త్ర సూత్రములన్నియూ అచరములే మరియూ నిరపేక్ష చట్రమనునది లేదు.

18. $$x = \frac{x' + vt'}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

$$y = y', \quad z = z'$$

$$t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

19. నిశ్చల స్థితిలోనున్న పరిశీలకుడు కొలచిన పొడవును సక్రమ పొడవు అందురు.

20. దైర్ఘ్య సంకోచమును తెలుపు సమీకరణము - $L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

'v' అనునదిద ండము యొక్క వేగము (పరిశీలకుని పరంగా)

L_0 దండము యొక్క సక్రమ పొడవు

21. పరిశీలకుని పరంగా నిశ్చల స్థితిలో నున్న గడియారము తెలియజేయు కాల వ్యవధిని 'సక్రమ కాల వ్యవధి' అంటారు.

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

22. గడియారము పరంగా పరిశీలకుడు చలిస్తుంటే అతడు కొలిచే కాల వ్యవధి నిశ్చలముగానున్న పరిశీలకుడు కొలుచు దాని కంటే ఎక్కువ.

23. ద్రవ్యరాశి వేగముతో మారును. v వేగముతో కదులుచున్న వస్తువు ద్రవ్యరాశి m, నిశ్చల స్థితిలోనున్న అదే వస్తువు ద్రవ్యరాశి m_0తో కలిగి యుండు సంబంధము

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

6.14 కీలక పదాలు

నిర్దేశ చట్రము, సంఘటనల ఏకకాలీనత, గెలీలియన్ రూపాంతరీకరణములు, లారెంజ్ రూపాంతరీకరణములు, ప్రత్యేక సాపేక్ష సిద్ధాంతము, నిరపేక్ష చట్రము, దైర్ఘ్య సంకోచము, కాలవృద్ధి, ద్రవ్యరాశి-శక్తి తుల్యత, చతుస్పదిశారూపము.

6.15 స్వయం సమీక్షా ప్రశ్నలు

వ్యాసరూప ప్రశ్నలు

1. మైకేల్‌సన్, మార్లే ప్రయోగమును వివరించుము. పట్టీ స్థానభ్రంశమునకు సమీకరణము రాబట్టుము. ప్రయోగ ప్రాముఖ్యత ఏమిటీ?
2. ప్రత్యేక సాపేక్ష సిద్ధాంతపు ప్రతిపాదనలను వివరించుము. లారెంజ్ రూపాంతరీకరణములను రాబట్టుము.
3. జడత్వ, జడరహిత చట్రములను వివరించుము. లారెంజ్ రూపాంతరీకరణములను వ్రాసి వాటి ఆధారంగా కాలవృద్ధి, దైర్ఘ్య సంకోచములను వివరించండి.
4. వేగాల సంకలనమును లారెంజ్ రూపాంతరీకరణముల ద్వారా వివరించుము.
5. ఐన్‌స్టీన్ ద్రవ్యరాశి - శక్తి సంబంధమును రాబట్టుము.

లఘు ప్రశ్నలు

1. గెలీలియన్ రూపాంతరీకరణములను వివరించుము.
2. ఐన్‌స్టీన్ ప్రత్యేక సాపేక్షితా సిద్ధాంత ప్రతిపాదనలను వివరించుము.
3. లారెంజ్ - ఫిట్జ్‌రాల్డ్ సంకోచమును వివరించుము.
4. లారెంజ్ రూపాంతరీకరణములను రాబట్టుము.
5. లారెంజ్ - గెలీలియన్ రూపాంతరీకరణములను పోల్చుము.

Exercise :

1. నిశ్చల స్థితిలో ఉన్న ఒక వస్తువు రెండు భాగములుగా విచ్ఛిన్నమైనవి. 1 కేజీ విరామ ద్రవ్యరాశి గలిగిన ఒక్కొక్క భాగము మూల వస్తువు నుండి సాపేక్షముగా $0.6\ c$ వేగముతో చలిస్తున్నవి. మూల వస్తువు యొక్క ద్రవ్యరాశిని కనుగొనుము?

[Ans : $m_0 = 2.5\text{Kg}$]

సూచన :- $$m_0c^2 = \frac{m_{0_1}c^2}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{m_{0_2}c^2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}$$

2. నిశ్చల స్థితిలో ఉన్న మ్యూయాన్‌ల అర్థ జీవిత కాలమును $2.2\,\mu s$ గా గమనింపబడుతుంది. కాస్మిక్ కిరణములు విచ్ఛిన్నము అయినప్పుడు అధిక వేగము కలిగిన మీసాన్‌లను భూమి మీద నుంచి పరిశీలించినపుడు వీటి అర్థ జీవిత కాలము $16\,\mu s$ గా గమనించిరి. భూమితో సాపేక్షంగా ఉన్న కాస్మిక్ కిరణ మ్యూయాన్‌ల వేగమును కనుగొనుము?

[Ans : $2.97\times10^8\ m/s$]

సూచన :- $$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.\ \text{Let } \frac{v}{c} = \beta \quad \Delta t' = 16\mu s\ \Delta t = 2.2\mu s$$

అపుడు $\beta = \sqrt{1-\left(\frac{\Delta t}{\Delta t'}\right)^2}$

మ్యూయాన్‌ల వేగము $v = \beta c$]

3. S చట్రములో x - అక్షమునకు సమాంతరముగా ఒక దండము ఉన్నది. ఆ అక్షము వెంబడి ఆ దండము 0.630c వేగముతో చలిస్తున్నది. దాని విరామ పొడవు 1.70m. S' చట్రములోఉన్నప్పుడు దాని పొడవు ఎంత?

[Ans : 1.32m]

సూచన :- $$\ell = \ell'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$ v = 0.630 c, ℓ' = 1.70m

4. 130 m పొడవు కలిగిన ఒక స్పేస్ షిప్ $0.740\ c$ వేగముతో ట్రైమింగ్ స్టేషనును దాటనున్నది.

(ఎ) ట్రైమింగ్ స్టేషన్ చేత గమనింపబడిన స్పేస్ షిప్ యొక్క పొడవు ఎంత?

(బి) స్పేస్ షిప్ స్టేషను నుంచి మొదటి భాగము దాటునప్పటి నుండి చివరి భాగము దాటునప్పుడు పట్టు కాల వ్యవధి?

[Ans : a) 8.74m b) $3.94\times10^{-7}s$]

సూచన :-

(ఎ) $\ell = \ell'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ $\ell' = 130m$

(బి) స్పేస్ షిప్ దాటుటకు పట్టు కాల వ్యవధి

$$\Delta t = \frac{\ell}{v} \qquad v = 0.740C = 0.740\times3\times10^8$$

5. అంతరాళ ప్రయాణికురాలు "వెగాస్టార్ వైపునకు $0.99\ c$ వేగముతో భూమి నుండి పైకి వెళ్ళుచుండెను. వెగాస్టార్ 26 కాంతి సంవత్సరముల దూరములో ఉన్నది. భూమి మీద ఉన్న గడియారములు ఈ దిగువ సందర్భమునకు ఎంత సమయము సూచించును.

(ఎ) ప్రయాణికుడు "వెగా" నక్షత్రము చేరినపుడు?

(బి) వెగాను చేరిన ప్రయాణికుడు తను చేరినట్లుగా ఇచ్చిన సందేశము భూమి పై నున్న పరిశీలకునికి చేరునప్పటికి?

(సి) ప్రయాణికురాల భూమి పై యాత్ర ప్రారంభించునప్పటికి, మెగా నక్షత్రము చేరునప్పటికి మధ్య ఆమె వయస్సులోని వృద్ధిని భూమి పై నున్న పరిశీలకులు ఎంత తేడాను లెక్కకట్టుదురు?

[Ans : a) 26.3y b) 52.3y c) 3.7y].

సూచన :-

(ఎ) ప్రయాణికురాలి వేగము v =0.99c

ప్రయాణించిన దూరము d = 26 కాంతి సంవత్సరాలు / సంవత్సరాలు

$$\Delta t = \frac{d}{v} = \frac{26 \text{ కాంతి సంవత్సరాలు}}{\left(\frac{0.99 \text{ కాంతి సంవత్సరాలు}}{\text{సంవత్సరాలు}}\right)}$$

(బి) ఆ సంకేతము, రేడియో తరంగము c వేగము ప్రయాణిస్తుంది. కాబట్టి భూమిని చేరుటకు 26 సంవత్సరాలు పట్టును.

భూమి చట్రము నుండి గమనించినపుడు, గడిచిన మొత్తము సమయము = 26.3 సం॥ + 26.0 సం॥

(సి) $\Delta t' = \dfrac{\Delta t}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ $v = 0.99c$

6. ఒక దండము దాని పొడవు వెంబడి వేగముతో ప్రయాణించినట్లయితే, సంకోచించిన శాతాన్ని లెక్కకట్టుము.

(జు॥ 80%)

సూచన :- $\dfrac{\ell}{\ell'} = \sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$

సంకోచ శాతము $\dfrac{\ell}{\ell'} \times 100$

7. x = 100 km, y = 10 km & z = 1 km వద్ద $t = 2\times10^{-4}$ sec. S చట్రములో ఒక సంఘటన జరిగినది. S' చట్రము S చట్రముతో 0.95c వేగముతో X - x^1 అక్షము వెంబడి కదులుచున్నది. S' చట్రములో ఉన్నప్పుడు x', y', z' & t' యొక్క నిరూపకాలను కనుగొనుము.

[Ans : $x' = 137.8\text{km}$ $y' = 10\text{km}$ $z' = 1\text{km}$ & $t' = 3.74\times10^{-4}\text{S}$]

సూచన :-

$$x' = \frac{x\text{-}vt}{\sqrt{1\text{-}\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

$$t' \quad \frac{t - \dfrac{vx}{c^2}}{\sqrt{1\text{-}\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} = \frac{\left(2\times10^{-4} - \dfrac{100\times0.93}{3\times10^5}\right)}{\sqrt{1\text{-}(0.95)^2}}$$

8. π^+ మీసాన్ యొక్క అర్థ జీవిత కాలము 2.5×10^{-8} Sec 2.4×10^{10} cm/s వేగముతో ప్రయాణించుచున్నది. విఘటనము చెందక ముందు ఎంత దూరము ప్రయాణించగలదు. మరియు సాపేక్షత ప్రభావము లేకపోతే అది ఎంత దూరము ప్రయాణించగలదు. [A: -1000 cm, 600 cm]

సూచన :-

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1\text{-}\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{2.5\times10^{-8}\ \text{s}}{\sqrt{\left\{1\text{-}\left(\dfrac{2.4\times10^{-10}}{3\times10^{-10}}\right)^2\right\}}} = 4.17\times10^{-8}\,\text{sec}$$

ప్రయాణించిన దూరము = వేగము × కాలము

$$= 2.4 \times 10^{10} \ {cm}/_{sec} \times 4.17 \times 10^{-8}$$

సాపేక్షత లేకపోయినట్లయితే, ప్రయాణించిన దూరము

$$= \left(2.4 \times 10^{10} \text{ cm / sec}\right)\left(2.5 \times 10^{-8} \text{ sec}\right)$$

9. 1×10^{10} cm / sec వేగముతో ప్రయాణించుచ ఎలక్ట్రాను యొక్క ద్రవ్యరాశిని కనుగొనుము? ఎలక్ట్రాను యొక్క విరామ ద్రవ్యరాశి 9.1×10^{-31} kg.

[Ans : 9.639×10^{-31} kg]

సూచన :-

$m_0 = 9.1 \times 10^{-31}$ kg $v = 1 \times 10^8$ m / sec

$c = 3 \times 10^8$ m / sec $m = ?$]

10. పాజిట్రాన్, ఎలక్ట్రాన్ లయము చెందినపుడు, విడుదలైన రెండు ఫోటానుల తరంగ దైర్ఘ్యము ఎంత?

[Ans : 2.482×10^{-12} m]

సూచన :-

$$E = mc^2 + mc^2 = 2mc^2 = 2h\upsilon = \frac{2hc}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{h}{mc} = \frac{6.62 \times 10^{-34}}{\left(9.1 \times 10^{-31}\right)\left(3 \times 10^8\right)}$$

6.16 చదువదగిన గ్రంథాలు

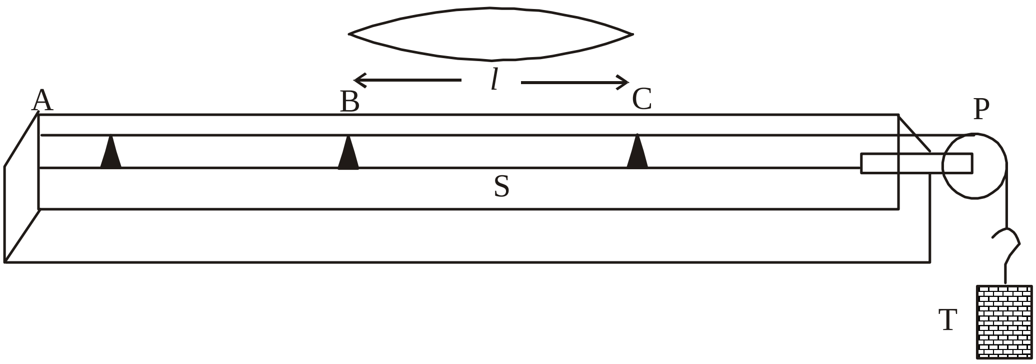
1. Fundamentals of Physics : Halliday, Robert Resnick and Walker - Weiley Eastern
2. Mechanics, Waves and Oscillations : S.L. Gupta & Sanjiv Gupta - Jai prakashnath and Company.
3. Introduction to Special Relativity : Robert Resnick - Wieley Eastern Pvt. Ltd.,
4. An Introduction to Special Theory of Relativity : Robert Katz - East West Press
5. Concepts of Modern Physics : Arthur Beiser - McGraw-Hill

ప్రయోగము సంఖ్య - 6

సోనోమీటరు – తిర్యక్ కంపన నియమాల ఋజువు

ఉద్దేశము : సోనోమీటరును ఉపయోగించి సాగదీసిన తీగపై తిర్యక్ కంపన నియమాలను ఋజువు చేయుట.

పరికరాలు : సోనోమీటరు, శృతిదండాలు, రబ్బరుసుత్తి, కొంకీ బరువులు.



వర్ణన : సోనోమీటరు ఒక దీర్ఘచతురస్రాకారపు బోలు చెక్కపెట్టె. సుమారుగా దీని పొడవు 1 మీటరు ఉంటుంది. దీనిలో గాలి స్వేచ్ఛగా కంపించడం కోసం దీని ప్రక్కతలకు రంధ్రం చేస్తారు. దీనికి ఒక చివర ఏదైనా ఒక తీగను మర సహాయంతో బిగించి రెండవ చివరను ఒక కప్పీ ద్వారా కొంకీ బరువును వ్రేలాడదీస్తారు. ఈ తీగ క్రింద రెండు కత్తి మొనలు ఉంటాయి. A కత్తి మొనను స్థిరంగా ఉంచుతారు. B కత్తిమొనను ఉపయోగించి, కంపిస్తున్న తీగ పొడవును మార్చుకోవచ్చు. '$\wedge$' ఆకారంలో వున్న పేపరు రైడర్‌ను కంపిస్తున్న తీగపై ఉంచుతారు.

ప్రయోగపద్ధతి :

మొదటి నియమము : తీగలో తిర్యక్ తరంగాల మొదటి నియమము ప్రకారము తీగలోని తన్యత T, దైర్ఘ్య సాంద్రత m లు స్థిరంగా వున్నప్పుడు $n \propto \frac{1}{\ell}$ లేక $n\ell =$ స్థిరాంకము.

n - తీగ పౌనఃపున్యము

ℓ - తీగ పొడవు

తగినంత బరువులు కొంకీకి తగిలించి తీగలో నిర్దిష్ట తన్యతను ఏర్పరచవలెను. ప్రయోగము ఒకే తీగపై చేయవలెను. ఇప్పుడు తెలిసిన పౌనఃపున్యము n గల శృతిదండాన్ని ఉత్తేజపరచి, దాని కాడను చెక్కపెట్టెపై ఉంచవలెను. ఇపుడు తీగ బలాత్కృత కంపనాలు చేస్తుంది. కత్తి మొనలు మధ్య దూరము అతి తక్కువ నుండి పెంచుతూ పోతే ఒక నిర్దిష్ట స్థితిలో, కత్తిమొనల మధ్య గల తీగ పొడవుకు శృతి దండముతో అనునాదం ఏర్పడి, తీగ గరిష్ట కంపన పరిమితితో కంపిస్తుంది. దీని వలన తీగపై ఉంచిన పేపరు రైడర్ క్రింద పడిపోతుంది. ఈ స్థితిలో కత్తి మొనల మధ్య అనునాద తీగ పొడవు ℓ గుర్తించవలెను.

ప్రయోగాన్ని వివిధ పౌనఃపున్యాలు గల శృతి దండాలతో పునరావృతం చేసి ప్రతిసారి అనువాద తీగ పొడవు ℓ గుర్తించి విలువలు పట్టికలో పొందుపరచాలి. అన్ని శృతిదండాలకు $n \times \ell$ = స్థిరాంకము అయివుండాలి.

పరిశీలనలు :

క్రమసంఖ్య	శృతిదండము పౌనఃపున్యము (n)	అనునాద తీగ పొడవు 1వసారి ℓ_1	2వసారి ℓ_2	3వసారి $\ell = \frac{\ell_1 + \ell_2}{2}$	$n \times \ell$ స్థిరాంకము

రెండవ నియమము : తిర్యక్ తరంగాల రెండో నియమాన్ని ఋజువు చేయటానికి దైర్ఘ్య సాంద్రత స్థిరంగా వున్నప్పుడు $\frac{\sqrt{T}}{\ell}$ స్థిరము అని చూపవలెను.

ఈ ప్రయోగములో నిర్దిష్ట పౌనఃపున్యము గల ఒకే శృతిదండాన్ని వాడవలెను. మరియు ఒకే తీగపై ప్రయోగాన్ని చేయవలెను. తీగలో వివిధ తన్యతలను ప్రయోగించి ఇచ్చిన శృతిదండముతో అనునాద తీగ పొడవు ℓ గుర్తించవలెను. ఇపుడు కొంకీ బరువులు పెంచుతూ, ప్రతి తన్యత వద్ద, అనునాద తీగ పొడవు ℓ గుర్తించి రీడింగులు పట్టికలో పొందుపరచవలెను. అన్ని తన్యతలకు విలువలు స్థిరంగా $\frac{\sqrt{T}}{\ell}$ వుండాలి.

పరిశీలనలు :

క్రమసంఖ్య	పౌనఃపున్యము (n)	తీగలో తన్యత (mg)	అనునాద తీగ పొడవు 1వసారి ℓ_1	2వసారి ℓ_2	3వసారి $\ell = \frac{\ell_1 + \ell_2}{2}$	$\frac{\sqrt{T}}{\ell}$

మూడవ నియమము : తిర్యక్ తరంగాల మూడవ నియమాన్ని ఋజువు చేయడానికి $\sqrt{m} \times \ell$ విలువ స్థిరమని చూపవలెను. దీని కొరకు శృతిదండము పౌనఃపున్యము తీగలోని తన్యతలను స్థిరంగా ఉంచి, వేరు వేరు తీగలలో అనునాద తీగ పొడవులు గుర్తించవలెను. విలువలను పట్టికలో పొందుపరచవలెను. ప్రయోగంలో అన్ని తీగలకు $\sqrt{n} \times \ell$ విలువ స్థిరాంకము అవుతుంది.

పరిశీలనలు :

క్రమసంఖ్య	తీగ పదార్థము	తీగ రేఖీయ సాంద్రత (m)	అనునాద తీగ పొడవు			$\sqrt{m} \times \ell$ స్థిరాంకము
			1వసారి ℓ_1	2వసారి ℓ_2	3వసారి $\ell = \frac{\ell_1 + \ell_2}{2}$	
1.	రాగి					
2.	స్టీలు					
3.	ఇత్తడి					

తీసుకోవలసిన జాగ్రత్తలు :

1. పేపర్ రైడర్‌ను కత్తిమొనల మధ్య కంపిస్తున్న తీగ మధ్యలో మాత్రమే ఉంచవలెను.
2. ప్రయోగబల్లను బరువులతో కూడిన కొంకీ తగలరాదు.
3. తీగ మందము సమంగా ఉండాలి.

ఫలితము :

యూనిట్ - 3

పాఠము -7

కంపనాలు - ప్రాథమిక విశ్లేషణ

ఉద్దేశాలు

- సరళ హరాత్మక చలనమననేమో తెలిసికొనుట
- సరళ హరాత్మక చలనము వర్ణించే సమీకరణముల రూపొందించి, సాధించుట
- ఆ సమీకరణముల వ్యవస్థలకు (భార స్ప్రింగు - ద్రవ్యరాశి) అను వర్తించుట

విషయసూచిక

7.1 ఉపోద్ఘాతము

దైనందిన జీవితములో అనేక రకములయిన చలనములు పరిశీలించెదము. వాటిలో స్థానాంతర గమనము (బల్ల పై ఒక అంచున గల పుస్తకమును వేరొక అంచుకు జరుపుట), భ్రమణ గమనము (బావి గిలక (కప్పి) గమనము), కంపన గమనము (వీణ తీగ కంపనము)లు ముఖ్యమయినవి. ధ్వని తరంగములు, కాంతి తరంగములు, రేడియో తరంగములు, నీటి పై తరంగాలు కంపన గమనములకు ఉదాహరణ. కంపన గమనములన్నియు ఆవర్తన గమనములే. ఆవర్తన గమనములన్నియూ సరళ హరాత్మక చలనములు లేక అనేక సరళ హరాత్మక చలనముల సంయోగములు అయిఉండవలెను.

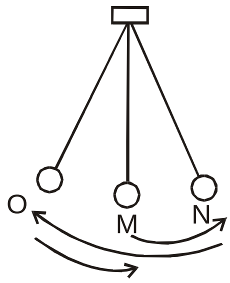
7.2 సరళ హరాత్మక చలనము - అభిలక్షణములు

ఏదైనా వస్తువు ఒక స్థిర బిందువుకు ఒకే మార్గములో రెండు వైపులా అటు, ఇటు చలిస్తూ ఉండే చలనములను కంపన చలనములు అంటారు. ఒక స్ప్రింగు చివర వ్రేలాడదీసిన వస్తువును క్రిందికి లాగి వదిలిన ఆ వస్తు చలనము, గోడ గడియారములోని లోలకము చలనము, గడియారము నందు తూగు చక్రము చేసే చలనము, కంపన చలనములకు ఉదాహరణ. ఈ కంపన

చలనములన్నియూ సరళ హరాత్మక చలనములే. కాని వీణ, సన్నాయి వంటి వాద్యాల సంశ్లిష్టమైన కంపనాలు అనేక సరళ హరాత్మక చలనముల సంయోగమే.

సరళ హరాత్మక చలనము యొక్క అభిలక్షణములను తెలిసికొని కొన్ని సులభమయిన దృష్టాంతాలకు అన్వయించి అవగాహన చేసికొందాము.

సరళ హరాత్మక చలనము అభిలక్షణములు తెలిపే పర్యాయ పదములను లఘు లోలకము పరముగా తెలిసికొందము. పటము 7.1లో వలే లఘు లోలకము గోళము స్థిర బిందువు M నుండి N కి లాగి వదిలిన అది డోలనములు లేక కంపనములు చేయును గదా!



పటము 7.1

డోలనము :- స్థిర బిందువు (M) నుండి బయలు దేరి, ఒక వైపుకు అంత్య బిందువు (N) ను చేరి, వెనుతిరిగి స్థిర బిందువు గుండా ప్రయాణిస్తూ రెండవ వైపు అంత్య బిందువు (O) ను చేరి తిరిగి స్థిర బిందువు M ను అదే తొలి దిశలో ప్రయాణిస్తూ దాటిన ఒక డోలనము చేసినది అందురు.

డోలనావర్తన కాలము :- ఒక డోలనము చేయుటకు పట్టు కాలమును డోలనావర్తన కాలము (T) అందురు.

పౌనః పున్యము :- ఒక సెకనులో చేయు డోలనముల సంఖ్యను పౌనః పున్యము (n) అందురు.

$$n = \frac{1}{T}$$

స్థాన భ్రంశము :- ఒక క్షణములో స్థిర బిందువు (M) నుండి కణము ఎంత దూరములో యుండునో, నిర్ణీత దిశలో ఆ క్షణములో ఆ దూరము (x) స్థాన భ్రంశమును సూచించును.

కంపన పరిమితి :- స్థిర బిందువు నుండి కంపన కణము చేసే గరిష్ట స్థాన భ్రంశము (MN లేక MO) ను కంపన పరిమితి అందురు.

కంపన దశ :- ఏదైనా ఒక క్షణములో కంపించే కణము (గోళము) స్థానము. గమన దిశ, పరముగా వర్ణించే కంపన స్థితిని ఆ క్షణములో కంపన దశ అందురు.

సరళ హరాత్మక చలనములో ఒక కణము యొక్క కంపన దశ నిశ్చల స్థానము దాటిన తరువాత గడిచిన కాలము (t), ఆవర్తన కాలము (T) లో భాగమును $\left(t/T\right)$ కంపనదశగా నిర్వచిస్తారు. కణ స్థానభ్రంశము (x), కంపన పరిమితి (A), నిష్పత్తి $\left(x/A\right)$ తరంగ దశను సూచించును.

సరళ హరాత్మక చలనము : త్వరణముతో ఒక మార్గములోప్రయాణిస్తున్న కణము యొక్క త్వరణము మార్గములోని స్థిర బిందువు వైపుగా యుండి, త్వరణము పరిమాణము, స్థిర బిందువు, కణమునకు మధ్య గల దూరమునకు అనులోమానుపాతముగా యున్న ఆ కణ చలనమును సరళ హరాత్మక చలనము అందురు.

వివరణ :

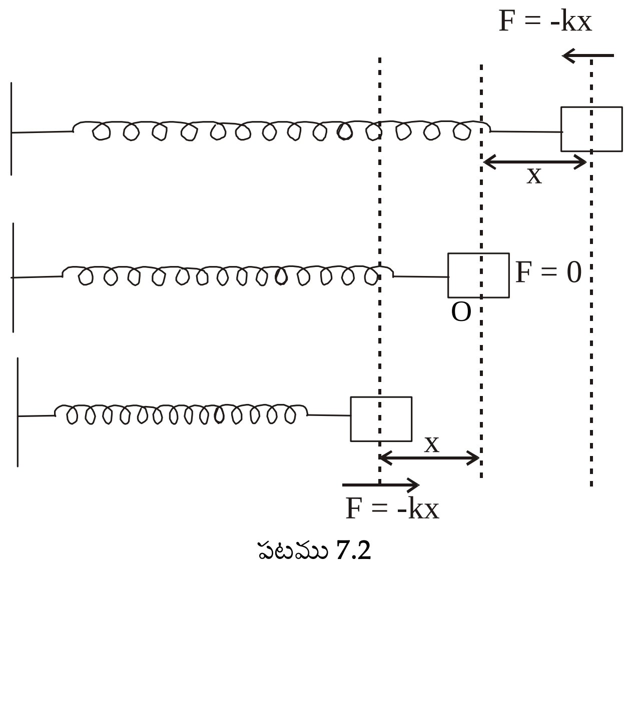
1. లఘు లోలకము గోళము త్వరణముతో ప్రయాణించును.
2. ఆ త్వరణము ఎల్లప్పుడూ స్థిర బిందువు (M) వైపుగా యుండును.
3. ఆ త్వరణము పరిమాణము స్థిర బిందువు గోళముల మధ్య దూరము (x) కు అనులోమానుపాతముగా యుండును.

$$a \propto x$$

4. అనగా త్వరణము అంత్య బిందువుల వద్ద (N, O) గరిష్టముగా యుంది. స్థిర బిందువు M వద్ద శూన్యముగా యుండును.

7.3 సరళ హరాత్మక డోలకము - అవకలన సమీకరణ సాధన

స్వల్ప ద్రవ్యరాశి గల స్ప్రింగ్ ఒక చివర స్థిరముగా బిగించి, రెండవ చివర ఘర్షణ లేని బల్ల పై పటము 7.2లో వలే 'm' ద్రవ్యరాశిని కట్టి అమర్చిన వ్యవస్థను సరళ హరాత్మక డోలకము అందురు. స్ప్రింగ్ ద్రవ్యరాశి అత్యల్పముగా యుండును. సమతా స్థితి నుండి x వ్యాపకానికి అవసరమయ్యే బలము వ్యాపకానికి అనులోమానుపాతంగా యుండును. m ద్రవ్యరాశి x స్థాన భ్రంశము చెందినపుడు స్ప్రింగులో ఏర్పడే పునః స్థాపక బలము F అయిన



పటము 7.2

$$F \propto x \text{ or } F = -kx \text{ ....}(1)$$

ఋణ సంజ్ఞ వ్యాపకానికి వ్యతిరేకతను సూచించును. అనులోమానుపాత స్థిరాంకము 'k' స్ప్రింగు బల స్థిరాంకము అందురు. (ఒక స్ప్రింగు పొడవులో ప్రమాణ వ్యాపకానికి అవసరమయ్యే బలము $\left(k = \left|\frac{F}{x}\right|\right)$.

ద్రవ్యరాశిని వదలిన పునః స్థాపక బలము F వలన అది m త్వరణముతో సమతాస్థితిని చేరును. కాని జడత్వము వలన ఆ ద్రవ్యరాశి స్ప్రింగును నెట్టుతూ (సంకోచము) ఎడమ వైపుకు 'x' స్థానభ్రంశము చెందును. పునః స్థాపక బలము వలన స్థిర బిందువు 'O' కు అటు ఇటు సరళ హరాత్మకముగా కంపించును.

సరళ హరాత్మక డోలకము చలన సమీకరణము :-

పునః స్థాపక బలము (F) వలన 'm' లో కలిగే త్వరణము 'a' అయిన న్యూటన్ రెండవ గమన సూత్రముననుసరించి

F = ma

$$= m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$\because$ వేగము $v = \frac{dx}{dt}$

త్వరణము $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$

కాని (1)వ సమీకరణము నుండి $F = -kx$

$$\therefore m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \text{....................}(2)$$

ఇది ద్విఘాత అవకలన సమీకరణము సూచించును.

(2)వ సమీకరణమును క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \text{....................}(3)$$

ఈ సమీకరణములో 'x' ప్రమేయము, t పరముగా x యొక్క రెండవ అవకలనము ఋణ సంజ్ఞతో x కు అనులోమానుపాతముగా యున్నది. కాని అవకలన గణితముననుసరించి ఈ ధర్మము సైను, కోసైను ప్రమేయములకు మాత్రమే ఉండును.

$$\frac{d}{dt}(\sin t) = \cos t$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\sin t) = \frac{d}{dt}(\cos t) = -\sin t$$

ఒక స్థిరాంకముతో సైను విలువ పెంచిన, 't' ని ఒక స్థిరాంకముతో గుణించి, ఇంకొక స్థిరాంకమును కలిపిన ఈ ధర్మము మారదు. కావున (3)వ సమీకరణము పరిష్కారము.

$$x = A \sin\left(\omega_0 t + \delta\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

స్థిరాంకములు A, ω_0, δ విలువలను, లక్షణములను నిర్ణయించిన సమీకరణము పరిష్కారము చేసినట్లగును.

(4)వ సమీకరణము నుండి

$$\frac{dx}{dt} = A\,\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \delta\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \sin\left(\omega_0 t + \delta\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

(3), (4), (5) సమీకరణముల నుండి

$$-A\,\omega_0^2 \sin\left(\omega_0 t + \delta\right) = -\frac{k}{m} A \sin\left(\omega_0 t + \delta\right)$$

$$\therefore \omega_0^2 = -\frac{k}{m}$$

కావున (4)వ సమీకరణము పరిష్కారము

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

A, δ విలువలు ఎటువంటివయిన (4)వ సమీకరణమును తృప్తిపరుచును.

A, δ విలువల లక్షణములు కూడా తెలిసికొనిన సరళ హరాత్మక చలనమును పూర్తిగా పరిష్కారము సాధించనట్లగును.

ω_0 **లక్షణములు :** (4)వ సమీకరణములో 'x' విలువలను $\frac{2\pi}{\omega_0}$ పెంచిన

$$x = A \sin\left[\omega_0\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right) + \delta\right]$$

$$= A \sin\left[\omega_0 t + 2\pi + \delta\right] = A \sin\left(\omega_0 t + \delta\right)$$

అనగా t విలువను $\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right)$ కాలము పెంచిన స్థానభ్రంశము x తొలి విలువను పొందును. అనగా $\frac{2\pi}{\omega_0}$ ఆవర్తన కాలము T సూచించును.

కావున ఆవర్తన కాలము $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$

డోలనావర్తన కాలము ద్రవ్యరాశి 'm', స్ప్రింగు బల స్థిరాంకము k పై ఆధారపడి యుండును.

పౌనః పున్యము (n) :- పౌనః పున్యము (n), ఆవర్తన కాలము T ల మధ్య సంబంధము.

$$n = \frac{1}{T}$$ కావున (7)వ సమీకరణము నుండి

$$n = \frac{\omega_0}{2\pi} \text{ (or) } \omega_0 = 2\pi n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

కావున ω_0 కోణీయ పౌనః పున్యమును సూచించును.

కంపన పరిమితి (A) : సైను, కొసైను, గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు +1 మరియు -1. క ఆవున (4)వ సమీకరణములోస్థానభ్రంశము గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు $+A$ మరియు $-A$. అనగా (4)వ సమీకరణములో A సరళ హరాత్మక చలనము యొక్క కంపన పరిమితి సూచించును. కంపన పరిమితి విలువను (4)వ సమీకరణము నిర్ణయించలేదు. కాబట్టి వివిధ కంపన పరిమితులు గల చలనాలకు ఒకే ఆవర్తన కాలము, పౌనః పున్యము ఉండవచ్చు. అనగా సరళ హరాత్మక చలనము కంపన పరిమితి, ఆవర్తన కాలము, పౌనః పున్యముల పై ఆధారపడదు.

దశా స్థిరాంకము (δ) :- (4)వ సమీకరణములో $(\omega_0 t + \delta)$ పదము చలన దశను సూచించును. 'δ'ని దశా స్థిరాంకము అందురు. దీని విలువ డోలకము ఆరంభ స్థానము, పై ఆధారపడి యుండును.

సరళ హరాత్మక చలనములో కణము స్థాన భ్రంశము, వేగము, త్వరణముల మధ్య సంబంధము :-

సరళ హరాత్మకములో ఏ క్షణములోనైన కణ స్థాన భ్రంశము x అయిన

$$x = A \sin(\omega_0 t + \delta) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$A =$ కంపన పరిమితి, $\omega_0 =$ కోణీయ పౌనః పున్యము, $\delta =$ దశా స్థిరాంకమును సూచించును.

వేగము :

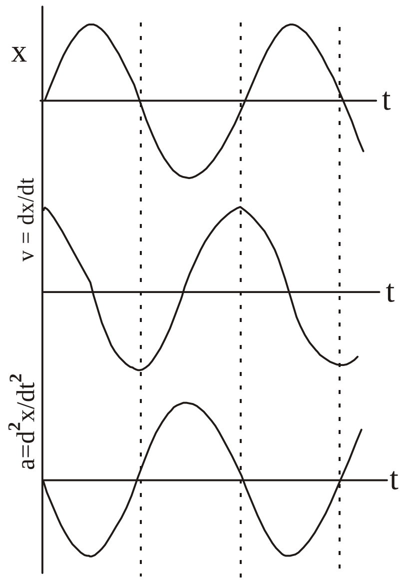
$$v = \frac{dx}{dt} = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \delta) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

త్వరణము $a = \dfrac{dv}{dt} = -\omega_0^2 A \sin(\omega_0 t + \delta) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

వివిధ సమయముల వద్ద స్థాన భ్రంశము, వేగము మరియు త్వరణముల విలువలను వరుసగా (1), (2), (3) సమీకరణముల నుండి పొందవచ్చును. వాటి విలువలు పట్టీలో పొందుపరచియున్నవి.

కాలము t =	O	$T/4$	$T/2$	$3T/4$	T
స్థాన భ్రంశము x	O	A	O	$-A$	O
వేగము $\frac{dx}{dt}$	ωA	O	$-\omega A$	O	ωA
త్వరణము $\frac{d^2x}{dt^2}$	O	$-\omega^2 A$	O	$\omega^2 A$	O

స్థాన భ్రంశము x, వేగము $\frac{dx}{dt}$, త్వరణము $\frac{d^2x}{dt^2}$ కాలము పరముగా గీచిన వరుసగా స్థానభ్రంశము, వేగము, త్వరణముల వక్రములు పటము **7.3**లో వలే వచ్చును.



పటము - **7.3**

ఉదాహరణ : గ్రాఫు నుండి స్థాన భ్రంశము శూన్యమయినపుడు వేగము (v) గరిష్టము, త్వరణము (a) శూన్యము. స్థాన భ్రంశము (x), గరిష్టమయినపుడు వేగము (v) శూన్యము. ఈ స్థితిలో త్వరణము గరిష్టముగా స్థానభ్రంశ దిశకు వ్యతిరేక దిశలో యుండును. సరళ హరాత్మక చలనములో గల కణము యొక్క x, v, a ల విలువలు వివిధ క్షణాలలో గ్రాపు నుండి తెలిసికొనవచ్చును.

7.4 సరళహరాత్మక డోలకము శక్తి

ఏ సమయములోనైనా సరళహరాత్మక డోలకము (లేక సరళహరాత్మక చలనములో గల కణము) యొక్క శక్తి దాని స్థితిశక్తి, గతి శక్తుల మొత్తమునకు సమానము. ఘర్షణ వలన శక్తి వృథా కాని యెడల మొత్తము శక్తి స్థిరము. స్ప్రింగులో వ్యాపక సంకోచము వలన కలిగే వికృతి వలన జరిగిన పని స్థితి శక్తిగా మారును. ద్రవ్యరాశి m గమనము వలన గతిశక్తి యుండును. గతిశక్తి, స్థితిశక్తుల పరిమాణములు అను క్షణము మారుచున్నప్పటికి మొత్తము శక్తి స్థిరము.

స్థితిశక్తి :- ద్రవ్యరాశి 'x' స్థాన భ్రంశము చెందినపుడు పునఃస్థాపక బల పరిమాణము $|F = kx|$, k బల స్థిరాంకము. ఈ స్థితిలో ద్రవ్యరాశి ఇంకనూ dx స్థానభ్రంశము చెందిన జరుగుపని $du = F \cdot dx = kxdx$, అయిన 'O' నుండి x స్థాన భ్రంశమునకు ఏర్పడే స్థితిశక్తి.

$$U = \int dU = \int_0^x kxdx = \frac{1}{2}kx^2$$

కాని, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ లేక $k = \omega_0^2 m$

$$\therefore U = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2$$

$$= \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \delta) \text{..................}(1)$$

గరిష్ట స్థితిశక్తి $U_M = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2$................$(2)$($\because$ సైను ప్రమేయము గరిష్ట విలువ $=1$)

గతిశక్తి :- కణ స్థానభ్రంశము $x = A \sin(\omega_0 t + \delta)$

వేగము $v = \frac{dx}{dt} = A\ \omega_0 \cos(\omega_0 t + \delta)$

గతిశక్తి $k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mA^2\omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \delta) \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

గతిశక్తి గరిష్ట విలువ $K_M = \frac{1}{2} mA^2\omega_0^2 \cdots\cdots\cdots (4)$ ($\because$ కోసైను ప్రమేయము గరిష్ట విలువ $= 1$)

ఏ క్షణములో అయిన వ్యవస్థ మొత్తము శక్తి ఆ క్షణములో గతి, స్థితి శక్తుల మొత్తమునకు సమానము

$$E = k + U = \frac{1}{2} mA^2\omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \delta) + \frac{1}{2} mA^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \delta)$$

$$= \frac{1}{2} m^2A^2\omega_0^2 \left\{\cos^2(\omega_0 t + \delta) + \sin^2(\omega_0 t + \delta)\right\}$$

$$E = \frac{1}{2} mA^2\omega_0^2$$

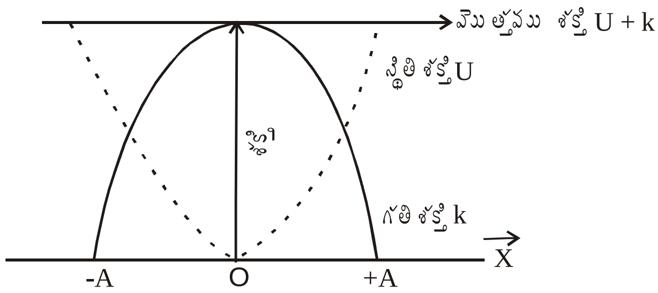
$= \frac{1}{2} mA^2 (2\pi n)^2 = 2\pi^2 n^2 A^2 m$ ....(4) ($\because \omega_0 = 2\pi n$, n పౌనః పున్యము)

(4)వ సమీకరణము నుండి మొత్తము శక్తి

(1) కంపన పరిమితి వర్గమునకు అనులోమానుపాతము

(2) పౌనఃపున్యము వర్గమునకు అనులోమానుపాతము

గతి, స్థితి శక్తుల వితరణ స్థాన భ్రంశము పరముగా పటములో చూపబడినది.



పటము - 7.4

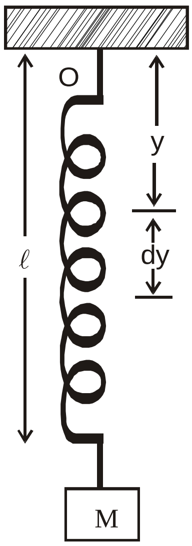
పటము 7.4 నుండి గరిష్ట గతిశక్తి, గరిష్ట స్థితిశక్తి ఏ డోలకము మొత్తము శక్తికి సమానము. (2), (4) సమీకరణముల నుండి ~~ఈ~~ విషయము తెలియును.

7.5 స్ప్రింగు భారము లెక్కలోనికి తీసికొని దాని చివర వ్రేలాడదీసిన ద్రవ్యరాశి M కంపన పౌనః పున్యము

స్ప్రింగు ద్రవ్యరాశి (m) అత్యల్పమయిన $(m << M)$, దాని చివర ద్రవ్యరాశి M ఆవర్తన కాలము $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$ (సరళ హరాత్మక డోలకము పాఠ్యాంశము నుండి) ఆ ద్రవ్యరాశి పౌనః పున్యము $n = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}}$ అని తెలియును.

స్ప్రింగు ద్రవ్యరాశి (m) లెక్కలోనికి తీసుకొని, స్ప్రింగు చివరయున్న ద్రవ్యరాశి (M) యొక్క కంపన పౌనః పున్యమును క్రింది విధముగా లెక్కించవచ్చును.

ℓ పొడవు m ద్రవ్యరాశి గల చదునైన సర్పిలాకారపు స్ప్రింగు ఒక చివర స్థిరముగా బిగించి, రెండవ చివర 'M' ద్రవ్యరాశి స్థిరముగా పటము 7.5లో వలే బిగించబడియున్నది $M > m$ అయిన స్ప్రింగు ఏకరీతిగా వ్యాపకము నుండును.



పటము 7.5

ప్రమాణ పొడవు స్ప్రింగు ద్రవ్యరాశి = $\frac{m}{\ell}$ .... (1)

స్ప్రింగ్‌లో స్థిరముగా బిగించిన చివర 'O' నుండి 'Y' దూరములో dy పొడవు గల మూలకమును పరిశీలించుము. ఆ మూలకము ద్రవ్యరాశి $= \left(\frac{m}{\ell}\right) dy$ .... (2)

ఏదైనా ఒక క్షణములో స్ప్రింగులో స్వేచ్ఛగా కదులుచున్నప్పుడు దాని చివర వేగము v అనుకొనుము. (M ద్రవ్యరాశి వేగము) స్థిరముగా యున్న బిందువు O వద్ద ఎల్లప్పుడు వేగము శూన్యము. ఒక క్షణములో స్ప్రింగు రెండవ చివర వేగము 'v' అనుకొనుము. O నుండి M వరకు స్ప్రింగు మూలకము వేగము దూరము (y)కి అనులోమానుపాతముగా యుండును. స్ప్రింగు వెంబడి వేగ ప్రవణత $= \frac{v - o}{\ell} = \frac{v}{\ell}$ .... (3)

Hè=@# O, నుండి y దూరములో గల dy మూలకము వేగము $= \left(\frac{v}{\ell}\right) y$ ....(4)

dy మూలకము గతిశక్తి $= \left(\frac{1}{2}\right)$ (మూలకము ద్రవ్యరాశి) (వేగము)^2

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{m}{\ell} dy\right)\left(\frac{v}{\ell} y\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{mv^2 y^2 dy}{\ell^3} \text{ .... (5)}$$

పై సమీకరణమును O నుండి ℓ అవధుల మధ్య సమాకలనము చేసిన స్ప్రింగు ఆ క్షణములో మొత్తము గతిశక్తి సూచించును.

$$= \int_0^{\ell} \frac{1}{2} \frac{mv^2}{\ell^3} y^2 dy$$

$$= \frac{1}{2} \frac{mv^2}{\ell^3} \int_0^{\ell} y^2 dy$$

$$= \frac{1}{2} \frac{mv^2}{\ell^3} \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{\ell}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{mv^2}{\ell^3} \cdot \frac{\ell^3}{3}$$

$$= \frac{1}{6} mv^2 \text{ ....(6)}$$

స్ప్రింగు చివర వ్రేలాడదీసిన ద్రవ్యరాశి గతిశక్తి $= \frac{1}{2} Mv^2$ ················(7)

స్ప్రింగు వ్యవస్థ మొత్తము గతిశక్తి $= \frac{1}{6} mv^2 + \frac{1}{2} Mv^2$

$$E_k = \frac{1}{2} v^2 \left\{ \frac{m}{3} + M \right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

ఆ క్షణములో (M) ద్రవ్యరాశి స్థానభ్రంశము 'x' అయిన దాని

వేగము $v = \frac{dx}{dt}$

కావున వ్యవస్థ మొత్తము గతిశక్తి $E_K = \frac{1}{2} \left\{ M + \frac{m}{3} \right\} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$ ··············(9)

ఆ క్షణములో స్ప్రింగులో ఏర్పడిన వికారము వలన వ్యవస్థ స్థితిశక్తి

$$E_P = \frac{1}{2} kx^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

$k -$ స్ప్రింగు బల స్థిరాంకమును సూచించును.

స్ప్రింగు - ద్రవ్యరాశి వ్యవస్థ మొత్తము శక్తి (E)

$$E = E_k + E_p$$

9 మరియు 10 సమీకరణముల నుండి E_k , E_p లను ప్రతిక్షేపించిన

$$E = \frac{1}{2} \left(M + \frac{m}{3} \right) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

వ్యవస్థ మొత్తము శక్తి స్థిరము కాబట్టి

$$\frac{1}{2} \left(M + \frac{m}{3} \right) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \text{స్థిర రాశి}$$

కాలము పరముగా అవకలనము చేసిన

$$\frac{1}{2} \left(M + \frac{m}{3} \right) 2 \left(\frac{dx}{dt} \right) \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{2} k 2x \frac{dx}{dt} = 0$$

పై సమీకరణమునంతటిని $\left(\frac{dx}{dt} \right)$ తో భాగించిన

$$\left(M + \frac{m}{3} \right) \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

లేక $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\left[\dfrac{k}{M+\dfrac{m}{3}}\right]$ --------- (12)

పై సమీకరణము సరళ హరాత్మక చలనము అవకలన సమీకరణమును పోలియున్నది.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\,\omega^2 x \;............(13)$$

కావున స్ప్రింగు వ్యవస్థ సరళ హరాత్మకముగా చలించుటను సూచించును.

(12), (13) సమీకరణముల పోల్చి కోణీయ పౌనఃపున్యము కనుగొనవచ్చును.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M+\frac{m}{3}}} \text{ కాని } \omega = 2\pi n$$

వ్యవస్థ పౌనః పున్యము $n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{M+\dfrac{m}{3}}}$. కాని ఆవర్తన కాలము $T = \dfrac{1}{n}$

వ్యవస్థ ఆవర్తన కాలము $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M+\dfrac{m}{3}}{k}}$

స్ప్రింగు ద్రవ్యరాశి తగినంతయున్నప్పుడు, స్ప్రింగు ద్రవ్యరాశిలో మూడవ వంతు $\left(\dfrac{m}{3}\right)$ ప్రభావ ద్రవ్యరాశిని, వ్రేలాడదీసిన ద్రవ్యరాశి (M) కి కలిపి పౌనః పున్యము నిర్ణయించవలెను. కావున పౌనః పున్యము తగ్గును. ఆవర్తన కాలము పెరుగును.

7.6 సాధించిన సమస్యలు

1. ఏదైనా ఒక క్షణములో సరళ హరాత్మక చలనములో గల కణము స్థాన భ్రంశమును $x = 0.035 \sin 20\pi(t+0.003)$ సమీకరణము సూచించిన ఆ చలనము యొక్క కంపన పరిమితి, ఆవర్తన కాలము, గరిష్ట వేగము, గరిష్ట త్వరణము, ఆరంభములో $(t=0)$ స్థాన భ్రంశమును లెక్కించుము.

సాధన : సరళ హరాత్మక చలనము స్థాన భ్రంశమునకు సామాన్య సమీకరణము.

$$x = A \sin(\omega_0 t + \delta)$$

లెక్కలో స్థాన భ్రంశమునకు సమీకరణము $x = 0.035 \sin 20\pi\,(t + 0.003)$

పోల్చిన కంపన పరిమితి $A = 0.035$ మీ॥

కోణీయ పౌనః పున్యము $\omega_0 = 20\pi$

ఆవర్తన కాలము $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{20\pi} = 0.1$ సెకను.

వేగమునకు సమీకరణము $v = A\,\omega_0 \cos(\omega_0 t + \delta)$

వేగము గరిష్ట విలువ $v = A\omega_0 = 0.035 \times 20\pi$

$= 0.7 \times \pi = 2.199$ మీ/సెకను

త్వరణమునకు సమీకరణము $a = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \delta)$

త్వరణము గరిష్ట విలువ $a_m = -A\omega_0^2 = -0.035 \times (20\pi^2)$

$= -138$ మీ/సెకను²

ఋణ సంజ్ఞ స్థాన భ్రంశము, త్వరణము వ్యతిరేక దిశలో యుండుటను సూచించును.

ఆరంభంలో స్థానభ్రంశము = 0.035 $\sin(2\pi \times 0.003) = 6.5 \times 10^{-4}$ మీ.

2. సరళ హరాత్మక చలనములో గల ఒక కణము గరిష్ట వేగము 0.2 మీ/సె మరియు గరిష్ట త్వరణము 0.4 మీ/సె^{2} అయిన కంపన పరిమితి, కోణీయ పౌనః పున్యమును లెక్కింపుము.

సాధన : వేగమునకు సమీకరణము $v = A\,\omega_0 \cos(\omega_0 t + \delta)$, గరిష్ట వేగము $v_m = A\,\omega_0$

త్వరణమునకు సమీకరణము $a = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \delta)$, గరిష్ఠ త్వరణము $a_m = -A\omega_0^2$

(సైను, కొసైను ప్రమేయముల గరిష్ఠ విలువ 1)

కావున $\frac{a_m}{v_m} = -\omega_0 = \omega_0$ (పరిమాణములో) కాని $v_m =$ 0.2 మీ/సె.

a_m = 0.4 మీ/సె^{2}

$\therefore \omega_0 = \frac{0.4}{0.2} = 2$ మీ/సె.

$v_m = A\omega_0$, కావున కంపన పరిమితి $A = \frac{v_m}{\omega_0} = \frac{0.2}{2} = 0.1\,\text{m}$

3. 0.05 కి॥గ్రా॥ ద్రవ్యరాశిని తేలికైన స్ప్రింగు చివర వ్రేలాడదీసి కంపింప చేసినపుడు ఆవర్తన కాలమెంత? స్ప్రింగు స్థిరాంకము $K = 126.3$ న్యూ/మీ॥

సాధన : ఆవర్తన కాలము $\left.\begin{array}{r} T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \\ m = 0.05\,;\ k = 126.3 \end{array}\right\} T = 2\pi\sqrt{\frac{0.05}{126.3}} = 0.125$ సెకన్లు

4. సరళ హరాత్మక చలనములో గల కణము స్థానభ్రంశము కంపన పరిమితిలో సగమయినపుడు దాని స్థితిశక్తి, గతిశక్తుల నిష్పత్తి ఎంత?

సాధన : కణము గతిశక్తి $E_k = \frac{1}{2} mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \delta)$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 \left(A^2 - x^2\right)$$

$$\left[\begin{array}{l} \because x = A \sin(\omega t + \delta) \\ \cos^2(\omega t + \delta) = 1 - \sin^2(\omega t + \delta) \\ \qquad = 1 - \frac{x^2}{A^2} \end{array}\right]$$

కణము స్థితి శక్తి $E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

$x = \frac{A}{2}$ అయిన $E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 \frac{A^2}{4} \cdots\cdots\cdots(1)$

$$E_k = \frac{1}{2} m\omega^2 \left(A^2 - \frac{A^2}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 \left(\frac{3A^2}{4}\right) \cdots\cdots\cdots(2)$$

$$(1)/(2) \Rightarrow \frac{E_p}{E_k} = \frac{1}{2} m\omega^2 \frac{A^2}{4} \times \frac{2 \times 4}{m\omega^2 3A^{23}} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore E_p/E_k = \frac{1}{3}$$

5. సరళ హరాత్మక చలనములో గల కణము స్థాన భ్రంశము కంపన పరిమితిలో 3వ వంతు యున్నప్పుడు మొత్తము శక్తిలో గతిశక్తి ఎన్నో వంతు యుండును.

సాధన : కణము మొత్తము శక్తి $E_T = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cdots\cdots\cdots(1)$

కణము గతిశక్తి $E_k = \frac{1}{2} m\omega^2 \left(A^2 - x^2\right)$

కాని $x = \frac{A}{3}$ అయిన $E_k = \frac{1}{2} m\omega^2 \left(A^2 - \frac{A^2}{9}\right)$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 \left(\frac{\delta A^2}{9}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} \quad \frac{E_k}{E_T} = \frac{1}{2} m\omega^2 \left(\frac{\delta A^2}{9}\right) \times \frac{2}{m\omega^2 A^2} = \frac{8}{9}$$

$$\frac{E_k}{E_T} = \frac{8}{9}$$

6. 0.01 కి॥గ్రా॥ ద్రవ్యరాశి గల కణము సరళ హరాత్మక చలనములో గలదు. దాని పౌనః పున్యము 100 హెర్జ్‌లు. కంపన పరిమితి 0.01 మీ॥ అయిన స్థిర బిందువు వద్ద గతిశక్తిని కనుగొనుము.

సాధన : సరళ హరాత్మక చలనములో గతిశక్తి

$$E_k = \frac{1}{2} m\omega^2 \left(A^2 - x^2\right)$$

కాని $x = 0$; $E_k = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$

$$m = 0.01 \text{ Kg}, \; A = 0.01 \text{ m}, \; n = 20\text{Hz}$$

$$\therefore \omega = 2\pi n = 2\pi \times 20 = 100\pi$$

$$E_k = \frac{1}{2} \times 0.01 \times (0.01)^2 \times (100\pi)^2 = 0.049 \text{ జౌల్స్}$$

7. 5×10^{-3} Kg ద్రవ్యరాశి గల కణము, 0.08 మీ॥ కంపన పరిమితితో సరళ హరాత్మకముగా కంపనములు చేయుచున్నది. పౌనః పున్యము 16 హెర్జ్‌లు అయిన దాని గరిష్ట త్వరణము చివరి బిందువు వద్ద స్థితిశక్తి లెక్కింపుము.

సాధన : $E_P = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$ కాని $x = A = 0.08$ m

$$m = 5 \times 10^{-3}$$

$$\omega = 2\pi n = 2\pi \times 16$$

$$E_P = \frac{1}{2} 5 \times 10^{-3} \times (32\pi)^2 (0.08)^2 = 0.16 \text{ జౌళ్లు}$$

మరియు త్వరణము $a = \left|A\omega^2\right| = 0.08(3 \times \pi)^2 = 808.5$ మీ./సె^{2}

8. ఒక స్ప్రింగు బల స్థిరాంకము 1.38×10^3 న్యూ/మీ॥ దాని కంపన పరిమితి 0.085 మీ॥ అయిన ఆ వ్యవస్థ మొత్తము శక్తి ఎంత?

సాధన : $E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$ కాని $\omega^2 = \frac{k}{m}$

$$\therefore E = \frac{1}{2}kA^2 \quad \text{కాని} \quad k = 1.38\times10^3 \text{ , } A = 0.085 \text{ మీ॥}$$

$$\therefore E = \frac{1}{2}\times1.38\times10^3\times\left(0.085\right)^2 = 4.985 \text{ జౌళ్లు}$$

9. 0.1 కి॥గ్రా॥ ద్రవ్యరాశి గల స్ప్రింగు చివర 0.5 కి॥గ్రా॥ ద్రవ్యరాశిని వ్రేలాడదీసి కంపింప చేసిన ఆవర్తన కాలము ఎంత? స్ప్రింగు స్థిరాంకము 120 న్యూ/మీ॥

సాధన : స్ప్రింగు ద్రవ్యరాశిని లెక్కలోనికి తీసికొనిన ఆవర్తన కాలము

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M+\frac{m}{3}}{k}}$$

m స్ప్రింగు ద్రవ్యరాశి = 0.1 కి॥గ్రా॥

M వ్రేలాడదీసిన ద్రవ్యరాశి = 0.5 కి॥గ్రా॥

k స్ప్రింగు స్థిరాంకము = 120 న్యూ/మీ॥

$$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{0.5+\frac{0.1}{3}}{120}}$$

= 0.418 సెకన్లు

10. k_1 , k_2 స్ప్రింగు స్థిరాంకములు గల రెండు స్ప్రింగులను ఒక దాని చివర వేరొకటి తగిలించి వాటి చివర M ద్రవ్యరాశిని యుంచినపుడు ఆ వ్యవస్థ స్ప్రింగు స్థిరాంకము ఎంత? ఆవర్తన కాలమెంత?

సాధన : పటములో వలే స్ప్రింగులు అమరియున్నపుడు k_1 స్ప్రింగులో సాగుదల x_1 మరియు k_2 స్ప్రింగులో సాగుదల x_2 అయిన,

మొత్తము సాగుదల $x = x_1 + x_2$

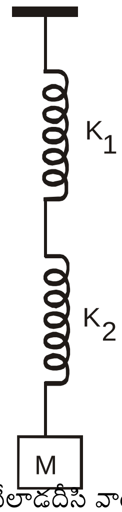
బలము $F = Mg = -k_1x_1 = -k_2x_2$

(ప్రతి స్ప్రింగు పై చర్య జరిపే బలము $F = mg$ సమానము)

$$\therefore x_1 = \frac{-F}{k_1} \text{ మరియు } x_2 = \frac{-F}{k_2}$$

స్ప్రింగు వ్యవస్థకు అనువర్తించిన

$$F = -kx \quad \text{or} \quad x = -\frac{F}{k}$$



కాని $x = x_1 + x_2$ కాబట్టి $-\frac{F}{k} = \frac{-F}{k_1} - \frac{F}{k_2}$

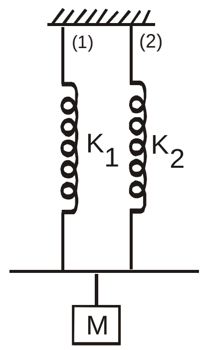
$$\therefore \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad \text{or} \quad k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

పై వ్యవస్థలో ఫలిత స్ప్రింగు స్థిరాంకము $\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$ గా వర్తించును.

ఆవర్తన కాలము $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}}$

11. k_1, k_2 స్ప్రింగు స్థిరాంకములు గల రెండు స్ప్రింగులను సమాంతరముగా ఒక ఆధారము నుండి వ్రేలాడదీసి వాటి చివర M ద్రవ్యరాశిని వ్రేలాడదీసిన ఆ స్ప్రింగు వ్యవస్థ స్థిరాంకము లెక్కించుము. ఆవర్తన కాలమెంత?

సాధన : స్ప్రింగు వ్యవస్థ సౌష్ఠవముగా యుండుటచే ప్రతి స్ప్రింగు పై చర్య జరిపే బలము $\left(\frac{F}{2}\right)$. రెండింటి యందు సాగుదల 'x' సమానము. k వ్యవస్థ స్ప్రింగు స్థిరాంకము అయిన



మొదటి స్ప్రింగు వ్యాకోచమునకు జరిగిన పని $= \frac{1}{2} k_1 x^2$

రెండవ స్ప్రింగు వ్యాకోచమునకు జరిగిన పని $= \frac{1}{2} k_2 x^2$

మొత్తము వ్యవస్థలో జరిగిన పని $= \frac{1}{2} kx^2$

$$\therefore \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{2} k_2 x^2$$

లేక $k = k_1 + k_2$

పై వ్యవస్థ స్ప్రింగు స్థిరాంకము $k = k_1 + k_2$ గా వర్తించును.

ఆవర్తన కాలము $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k_1 + k_2}}$

7.7 సారాంశము

ఈ అధ్యాయము పఠనము పూర్తి అయిన పిమ్మట

- సరళ హరాత్మక చలనములో పర్యాయ పదములు డోలనము, డోలనావర్తన కాలము, పౌనః పున్యము, స్థానభ్రంశము, కంపన పరిమితి, కంపన దశ అను విశదీకరించగలరు.
- సరళ హరాత్మక డోలకముపరముగా స్థానభ్రంశము, వేగము, త్వరణము, కోణీయ పౌనఃపున్యములకు సమీకరణము

రాబట్టగలరు.

$$x = A \sin(\omega_0 t + \delta)$$

$$v = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \delta)$$

$a = -\omega_0{}^2 A \sin(\omega_0 t + \delta)$, x, v, a ల మధ్య సంబంధము విశదీకరించగలరు.

- సరళ హరాత్మక చలనము మొత్తము శక్తి, స్థిరము, గతి శక్తి, స్థితి శక్తులు మారుచున్నప్పటికి మొత్తము శక్తి స్థిరము అని చూపగలరు.

$$E_T = \frac{1}{2} m \omega_0{}^2 A^2 = \frac{1}{2} KA^2$$

$$E_P = \frac{1}{2} m \omega_0{}^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \delta) = \frac{1}{2} KA^2 \sin^2(\omega_0 t + \delta)$$

$$E_K = \frac{1}{2} m \omega_0{}^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \delta) = \frac{1}{2} KA^2 \cos^2(\omega_0 t + \delta)$$

- భార స్ప్రింగు వ్యవస్థ డోలనావర్తన కాలము $T = 2\pi\sqrt{\frac{M + \frac{m}{3}}{K}}$ సెకన్లు అని చూపగలరు.

7.8 కీలక పదాలు

సరళ హరాత్మక చలనము , డోలనము, డోలనావర్తన కాలము, స్థాన భ్రంశము, కంపన పరిమితి, కంపన దశ, కోణీయ పౌనః పున్యము, పౌనః పున్యము

7.9 స్వయం సమీక్షా ప్రశ్నలు

వ్యాసరూప ప్రశ్నలు :

1. సరళ హరాత్మక చలనమును నిర్వచింపుము.

   సరళ హరాత్మక చలనము అభిలక్షణము లేవి?

   సరళ హరాత్మక డోలకము చలనము వివరించే అవకలన సమీకరణమును రాబట్టి, ఆ సమీకరణమును పరిష్కరింపుము.

2. సరళ హరాత్మక చలనమును సోదాహరణముగా వివరింపుము. సరళ హరాత్మక డోలకము మొత్తము శక్తికి సమీకరణము రాబట్టుము.

3. భార స్ప్రింగు చివర వ్రేలాడదీసిన ద్రవ్యరాశి వ్యవస్థ చేసే డోలనముల పౌనః పున్యమునకు సమీకరణము రాబట్టుము.

4. సరళ హరాత్మక డోలకము మొత్తము శక్తికి సమీకరణము రాబట్టుము.

   దాని మొత్తము శక్తి కాలము, స్థానభ్రంశము, పై ఆధారపడదని, కంపన పరిమితి వర్గమునకు పౌనః పున్యము వర్గములకు అనులోమానుపాతముగా యుండునని చూపుము.

సంక్షిప్త ప్రశ్నలు

1. సరళ హరాత్మక చలనమును నిర్వచించి, అభిలక్షణములు వ్రాయుము.
2. సరళ హరాత్మక డోలకము శక్తికి సమీకరణము రాబట్టుము.
3. సరళ హరాత్మక డోలకము డోలనములు చేయునపుడు దాని గతిశక్తి, స్థితి శక్తి ఏ విధముగా మారునో తెలుపుము.
4. స్ప్రింగు స్థిరాంకమును నిర్వచించి, కోణీయ పౌనః పున్యము, స్ప్రింగు స్థిరాంకము ఆవర్తన కాలముల మధ్య సంబంధము సూచించే సమీకరణము రాబట్టుము.

అభ్యాసము

1. సరళ హరాత్మక చలనములో గల ఒక కణము గరిష్ఠ వేగము 0.4 మీ॥/సె॥ మరియు గరిష్ఠ త్వరణము 0.8 మీ॥/సె^{2} అయిన కంపన పరిమితి, ఆవర్తన కాలమును లెక్కింపుము.

   (జ॥ $T = 3.14$ సె॥, $A = 0.2$ మీ॥)

2. సరళ హరాత్మక చలనము ఆవర్తన కాలము 10 సెకన్లు, గరిష్ఠ వేగము 0.5 మీ॥/సె॥ అయిన కంపన పరిమితి లెక్కింపుము.

   (జ॥ $A = 0.16$ మీ॥)

3. సరళ హరాత్మక చలనములో గల కణము గరిష్ఠ వేగము 0.5 మీ॥/సె॥, పౌనః పున్యము 1.66 హెర్జ్‌లు అయిన దాని కంపన పరిమితి, గరిష్ఠ త్వరణమును లెక్కింపుము. (జ॥ $A = 0.048$ మీ॥ $a_m = 5.21$ మీ॥/సె^{2})

4. 2 కి॥గ్రా॥ ద్రవ్యరాశి గల వస్తువు చేసే సరళ హరాత్మక చలనము స్థానభ్రంశమునకు సమీకరణము $x = 0.05 \sin\left(5t - \frac{\pi}{6}\right)$, x మీటర్లు, t సెకనులలో సూచించినపుడు (ఎ) $t = 0$ అయిన కణము వేగమెంత?, (బి) $t = \frac{4\pi}{3}$ సెకన్లు అయినపుడు పనిచేసే బలమెంత? (సూచన - త్వరణము 'a' అయిన బలము $F = ma$)

   (జ॥ (ఎ) 0.21 మీ॥/సె॥, (బి) $F = -2.5$ న్యూ)

5. సరళ హరాత్మక చలనములో గల కణము కంపన పరిమితి 0.15 మీ॥ మరియు పౌనః పున్యము 4 హెర్జ్ అయిన గరిష్ఠ త్వరణము, మరియు స్థాన భ్రంశము 0.1మీటర్లు అయినపుడు వేగమును లెక్కింపుము.

   (జ॥ $a_m = 94.75$ మీ॥/సె^{2}, $u = 2.81$ మీ॥/సె॥)

6. స్వల్ప ద్రవ్యరాశి గల ఒక వస్తువును స్ప్రింగుకు వ్రేలాడదీసిన 0.12 మీ॥ సాగినది. ఆ వస్తువును తొలగించి 0.75 కి॥గ్రా॥ వస్తువును కట్టి కంపింప చేసిన ఆవర్తన కాలమెంత ?

   (జ॥ $T = 0.347$ సె॥)

7. 0.05 కి॥గ్రా॥ వస్తువును తేలికైన స్ప్రింగుకు వ్రేలాడదీసి కంపింప చేసిన దాని పౌనః పున్యము 0.8 హెర్జ్‌లు. అయిన స్ప్రింగు స్థిరాంకము ఎంత? (జ॥ $k = 12.63$ న్యూ/మీ॥)

8. 5 గ్రాముల ద్రవ్యరాశి గల ఒక కణము 8 సెం॥మీ॥ కంపన పరిమితితో సెకనుకు 16 మార్లు కంపనములు చేయును. అయిన ఆ కణము గరిష్ఠ వేగమును, సమతా బిందువు వద్ద గతిశక్తిని లెక్కించుము.

(జ॥ $v_m = 8.038$ మీ॥/సె॥, $E = 0.16$ జౌళ్లు)

9. సరళ హరాత్మక చలనములో గల కణము స్థాన భ్రంశము కంపన పరిమితిలో 3వ వంతు యున్నపుడు దాని (1) స్థితి శక్తి, మొత్తము శక్తి, (2) గతిశక్తి మొత్తము శక్తి , (3) స్థితిశక్తి, గతిశక్తుల నిష్పత్తి ఎంత?

(జ॥ (1) 8 : 9, (2) 1 : 9, (3) 1 : 8)

10. సరళ హరాత్మక చలనములో గల కణము స్థానభ్రంశము, కంపన పరిమితిలో సగమయినపుడు

(1) మొత్తము శక్తిలో గతిశక్తి భాగము, (2) మొత్తము శక్తిలో స్థితి శక్తి భాగమును లెక్కించుము

(జ॥ $\frac{E_k}{E_p} = \frac{3}{4}$, $\frac{E_p}{E_T} = \frac{1}{4}$)

11. సరళ హరాత్మక చలనములో గల కణము స్థాన భ్రంశము కంపన పరిమితిలో సగమయినపుడు గతిశక్తి, స్థితిశక్తి సమానముగాయున్న స్థాన భ్రంశము కంపన పరిమితిలో ఎన్నో వంతు యుండును.

(జ॥ $X = \frac{\text{కంపన పరిమితి}}{\sqrt{2}}$)

12. సరళ హరాత్మకముగా చలిస్తున్న స్ప్రింగు వ్యవస్థ మొత్తము శక్తి 9.97 జౌళ్లు స్ప్రింగు బల స్థిరాంకము 1.38×10^3 న్యూ/మీ అయిన కంపన పరిమితి లెక్కించుము.

(జ॥ $A = 0.12$ మీ॥)

13. ఒక స్ప్రింగులో 0.02 మీ॥ సంపీడనము కలుగ చేయుటకు అవసరమయ్యే శక్తి 0.14 జౌళ్లు. అయిన బల స్థిరాంకము ఎంత?

(జ॥ $k = 700$ న్యూ /మీ॥)

14. స్వల్ప ద్రవ్యరాశి గల స్ప్రింగునకు 2 కి॥గ్రా॥ ద్రవ్యరాశి గల వస్తువును వ్రేలాడదీసిన 0.1 మీ॥ సాగినది. ఆ వస్తువును ఇంకనూ క్రిందికి లాగి వదిలిన ఆ వస్తు డోలనా వర్తన కాలమెంత?

(జ॥ $T = 0.634$ సె॥)

15. సరళ హరాత్మక చలనము ఆవర్తన కాలము 2.5 సెకన్లు, గరిష్ఠ వేగము 25 సెం॥మీ॥/సె॥ అయిన, కంపన పరిమితి ఎంత?

(జ॥ $A = 9.94$ సెం॥మీ॥)

16. భార రహిత స్ప్రింగు చివర 5 కి॥ గ్రా॥ వ్రేలాడదీసిన 0.3 మీ॥ సాగినది. 5 కి॥గ్రా॥ ద్రవ్యరాశిని తొలగించి 2 కి॥గ్రా॥ వ్రేలాడదీసిన కంపింప చేసిన పౌనః పున్యము ఎంత?

(జ॥ $n = 1.44$ Hz)

17. k_1, k_2 స్ప్రింగులను శ్రేణిలో అమర్చిన వ్యవస్థ ఫలిత స్ప్రింగు స్థిరాంకమును లెక్కించుము.

(జ॥ $k = \left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right)$)

18. k_1 , k_2 స్ప్రింగు స్థిరాంకములు గల స్ప్రింగులను సమాంతరముగా అమర్చినపుడు ఆ వ్యవస్థ ప్రభావ స్ప్రింగు స్థిరాంకమును లెక్కింపుము.

(జ॥ $k = k_1 + k_2$)

19. సరళ హరాత్మక చలనములో గల కణము స్థిర బిందువు వద్ద వేగము 1 మీ/సె మరియు అంత్య బిందువు వద్ద త్వరణము 10 మీ/సె^{2}. అయిన ఆ చలనము పౌనః పున్యము ఎంత?

(జ॥ $n = \frac{5}{\pi}$ Hz)

20. సరళ హరాత్మక చలనములో గల కణ పౌనః పున్యము 0.5 Hz కంపన పరిమితి 5 సెం॥మీ॥ అయిన తుల్య బిందువు నుండి 4 సెం॥మీ॥ దూరములో ఆ కణము త్వరణము ఎంత?

(జ॥ 39.47 సెం॥/సె^{2})

21. స్ప్రింగు త్రాసు 10 కి॥గ్రా॥ వరకు తూచగలదు. త్రాసు పై గల స్కేలు పొడవు 0.25 మీ॥ ఒక బిందువును వ్రేలాడదీసినపుడు $\frac{\pi}{10}$ సెకన్ల ఆవర్తన కాలముతో కంపనము చేయును. అయిన ద్రవ్యరాశి ఎంత?

(జ॥ $m = 0.98$ Kg)

22. ఒక స్ప్రింగు చివర 5 కి॥ గ్రా॥ ద్రవ్యరాశి వ్రేలాడదీసిన 0.2 మీ॥ సాగినది. స్ప్రింగు చివర 0.5 కి॥గ్రా॥ ద్రవ్యరాశి వ్రేలాడదీసి కంపనములు చేయించిన, ఆవర్తన కాలము ఎంత?

(జ॥ $T = 0.898$ సె॥)

7.10 చదువవలసిన గ్రంథాలు

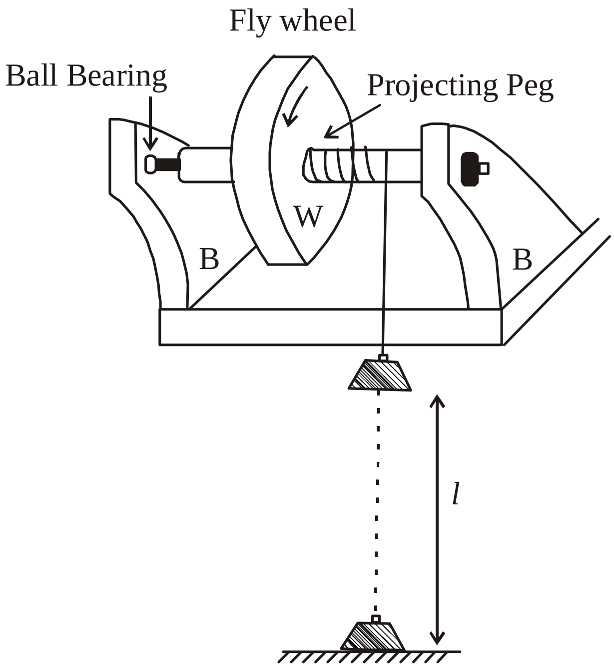
1.	Introduction to Physics for Scientists and Engineers	:	F.J. Ruche (M.C. Graw Hill)
2.	భౌతికశాస్త్రము మొదటి సంవత్సరము	:	తెలుగు అకాడమి పబ్లికేషన్స్
3.	Waves and Oscillations	:	S. Badani, V. Balasubramanian and K. Ramireddy
4.	B.Sc. Physics Vol. 2	:	C. Murali Mohan Sastry, Prof. Jaidevanand

ప్రయోగము సంఖ్య - 7

గతిపాలక చక్రము యొక్క జడత్వ భ్రామకము

ఉద్దేశము : గతిపాలక చక్రము యొక్క జడత్వ భ్రామకము, దాని భ్రమణాక్షం పరంగా కనుక్కోవడం.

పరికరాలు : గతిపాలక చక్రము, మీటరు స్కేలు, వెర్నియర్‌కాలిపర్స్, ఆపు గడియారం, కొంకీలు గల భారములు ఆ భారాలు తెలిసినవై ఉండాలి.



వర్ణన : భారమైన వృత్తాకారపు దిమ్మె గతిపాలక చక్రంగా పనిచేస్తుంది. బ్రాకెట్‌లో వున్న బాల్ బేరింగులపైన దాని భ్రమణ ఇరుసు అమరి వుంటుంది. ఈ ఇరుసు క్షితిజ సమాంతరంగా ఉంటుంది. బ్రాకెట్ ఆధార పీఠము ధృఢమైన టేబుల్‌పై బిగించబడి వుంటుంది. ఇరుసుపై ఒక కీలము ఉంటుంది. ఒక దారము చివర (m) ద్రవ్యరాశి గల వస్తువును కట్టి దారం రెండవ చివర ఒక ఉచ్చు ఏర్పరచి, ఆ ఉచ్చును ఇరుసు కీలముపై అమర్చాలి ఈ దారాన్ని ఇరుసు చుట్టూ చుట్టాలి. వస్తువు నేలను తాకేసరికి దారం కీలం నుండి విడిపోయేటట్లు దారం పొడవు తీసుకోవాలి. ఇరుసుపై చుట్లు ఒకదానిపై ఒకటి అతిపాతం లేనట్లు చుట్టాలి.

ప్రయోగపద్ధతి : దారం చివర కొంకీ ద్రవ్యరాశి వ్రేలాడదీసి, రెండవ చివర ఒక ఉచ్చు చేసి దానిని చక్రము ఇరుసుపై ఉన్న కీలము తగిలించాలి. ఆ ఇరుసు చుట్టూ దారాన్ని చుట్టితే, ఆ వస్తువు నేల నుండి కొంత ఎత్తులో (h) ఉంటుంది. అప్పుడు బరువుని వదలాలి చక్రము తిరుగుట ప్రారంభిస్తుంది. బరువు నేలను తాకుసరికి చక్రము ఎన్ని భ్రమణాలు చేసిందో (n_1) కనుగొనాలి. వెంటనే ఆపు గడియారము

పనిచేయునట్లు చేసి, చక్రము ఆగుటకు అది ఇంకా ఎన్ని భ్రమణాలు చేసిందో (n_2) కనుగొనాలి. చక్రము ఆగుటకు పట్టుకాలం కనుగొనాలి. వేరు వేరు ద్రవ్యరాశులు గల వస్తువులతో ప్రయోగమును తిరిగి చేయవలెను. వెర్నియర్ కాలిపర్స్ ఉపయోగించి ఇరుసు వ్యాసార్థము (r) కనుగొనాలి. క్రింది సూత్రమును ఉపయోగించి చక్రము జడత్వ భ్రామకమును లెక్కకట్టాలి.

$$I = \frac{n_2 m}{n_1 + n_2}\left(\frac{2gh}{\omega^2} - r^2\right)$$

ఇక్కడ $\omega = \frac{4\pi n_2}{t}$

రీడింగులను పట్టికలో వేయవలెను.

పరిశీలనలు :

దారమునకు తగిల్చిన వస్తువు ద్రవ్యరాశి (m) = ... gms.

ఇరుసు వ్యాసార్థాము(r) = ... cms.

I సగటు విలువ = ... గ్రా-సెంమీ^{2}.

చక్రము వ్యాసార్థము (R) = ... cms.

చక్రము ద్రవ్యరాశి (m) = ...

క్రమ సంఖ్య	n_1	నేల నుంచి వస్తువు ఎత్తు(h)	భ్రమణాల సంఖ్య (n_2) కాలము 1వసారి (N_1)	కాలము 2వసారి (N_2)	సరాసరి $n_2 = \frac{N_1+N_2}{2}$	కాలము 1వసారి (t_1)	2వసారి (t_2)	సరాసరి $t = \frac{t_1+t_2}{2}$	$\omega = \frac{4\pi n_2}{t}$	$I = \frac{n_2 m}{n_1+n_2}\left(\frac{2gh}{\omega^2} - r^2\right)$

గతిపాలక చక్రము జడత్వ భ్రామకము = $\frac{mR^2}{2}$. ఈ విధంగా కనుగొన్న విలువపైన సగటు కనుగొనిన సగటు విలువకి సమానమవ్వాలి.

తీసుకోవలసిన జాగ్రత్తలు :

1. పెగ్ చుట్టూ ఉంచిన లూప్ వస్తువు నేలను తాకిన వెంటనే, దాని నుండి తొలగునట్లు దారము పొడవును సర్దవలెను.
2. ఇరుసు చుట్టూ దాన్ని అతిపాతం లేకుండా చుట్టాలి.
3. చక్రముపై ఏ విధమైన బలప్రయోగము లేకుండా, వస్తువు క్రిందికి దిగుట మొదలిడిన వెంటనే చక్రము తిరుగుట మొదలిడాలి.

ఫలితము :

యూనిట్ - 3

పాఠం - 8 తరంగాల ఆధ్యారోపణ - అనువర్తనములు - లిస్సజాన్ చిత్రములు

8.0 ఉద్దేశ్యము

తరంగముల ఆధ్యారోపణ నియమములను వివరించి, కొన్ని దృగ్విషయములు అనువర్తించుట.

విషయసూచిక

8.1 ఉపోద్ఘాతము

ధ్వని, కాంతి తరంగ రూపములో ప్రసారము చెందును కదా! తలుపుకు గల చిన్న రంధ్రము ద్వారా ఆవరణలో గల వివిధ వస్తువులను చూడగలము కదా! వివిధ వస్తువులు నుండి, వివిధ స్థానముల నుండి వచ్చు తరంగములన్నియూ ఆ చిన్న రంధ్రము గుండా ప్రయాణించి కంటిని చేరినవి కాని ఆ తరంగము లేవియు వికృతి చెందలేదు. ఇదే ధర్మమును ధ్వని తరంగములు కూడా ప్రదర్శించును. కావున ఈ తరంగములన్నియూ ఆ రంధ్రము వద్ద కలసినప్పటికి వాటి దర్మములు మారలేదు. కాని వివిధ తరంగములు కలసిన బిందువు వద్ద తరంగ లక్షణములను ఆధ్యారోపణ నియమముతో విశ్లేషణ చేయవచ్చును.

8.2 తరంగాల ఆధ్యారోపణ నియమము

తరంగ స్వభావాన్ని నిర్ణయించే నియమాలలో ఆధ్యారోపణ నియమము ముఖ్యమయినది. అనేక తరంగములు ప్రసరిస్తూ ఒక బిందువు వద్ద కలసినపుడు (ఆధ్యారోపణ) ఆ బిందువు స్థానభ్రంశము వివిధ తరంగముల వలన విడివిడిగా కలిగే స్థానభ్రంశముల సదిశ మొత్తమునకు సమానము. ఉదాహరణకు A, B, C, D తరంగాల వలన ఒక కణము వద్ద విడివిడిగా కలిగే స్థానభ్రంశములు Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 అయిన ఆ తరంగాలన్ని ఆ బిందువు వద్ద ఆధ్యారోపణ చెందిన కలిగే ఫలిత స్థానభ్రంశము $\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{Y_1} + \overrightarrow{Y_2} + \overrightarrow{Y_3} + \overrightarrow{Y_4}$ ఆ బిందువును దాటిన పిమ్మట ఆ తరంగాలు ఏ మాత్రము విరూపణ చెందకుండా ముందుకు ప్రసారము చెందును.

వాద్య సమ్మేళనములో వివిధ సంగీత వాద్యాల నుండి వెలువడే ధ్వనుల స్వచ్ఛముగా వినగలుగుటకు కారణమిదే. వివిధ రేడియో కేంద్రాల నుండి వెలువడే తరంగములన్నియు రేడియో 'ఆంటెనా' వద్ద ఆధ్యారోపణ చెందినను ట్యూన్ చేసి మనకు కావలసిన రేడియో కేంద్రము నుండి వెలువడే కార్యక్రమము వినగలుగుచున్నాము.

స్థితిస్థాపక యానకాలలో వికృతి, స్థితిస్థాపక బలము సరళ సంబంధములో యున్నపుడు (ధ్వని తరంగాలు) మాత్రము ఈ ఆధ్యారోపణ నియమము వర్తించును. విద్యుత్, అయస్కాంత క్షేత్రాలకి గల గణిత సంబంధము సరళము కావున విద్యుదయస్కాంత తరంగాలకు ఆధ్యారోపణ నియమము ఎప్పుడు వర్తించును.

ఆధ్యారోపణ నియమము వలన కలిగే ముఖ్యమయిన దృగ్విషయములు.

1. సమాన పౌనఃపున్యము గల తరంగములు ఒకే దిశలో ప్రయాణిస్తూ ఆధ్యారోపణ చెందుట వలన వ్యతికరణమును దృగ్విషయము ఏర్పడును.
2. పౌనఃపున్యములో స్వల్ప వ్యత్యాసము గల రెండు తరంగములు ఒకే దిశలో ప్రయాణము చేస్తూ ఆధ్యారోపణ చెందుట వల్ల 'విస్పందనల'ను దృగ్విషయము ఏర్పడును.
3. సమాన పౌనఃపున్యము కలిగే వ్యతిరేక దిశలో ప్రయాణించే తరంగాల ఆధ్యారోపణ వలన "స్థిర తరంగములు" ఏర్పడును.
4. లంబదిశలలో ప్రయాణిస్తూ ఒక బిందువు వద్ద కలసి జరిపే చర్య వలన 'లిస్సజాస్' చిత్రాల దృగ్విషయము ఏర్పడును. **ఈ దృగ్విషయమేమన పాఠ్యాంశము.**

8.3 పరస్పర లంబ దిశలలో సమాన పౌనఃపున్యము గల రెండు సరళ హరాత్మక చలనముల సమ్మేళనము

సమాన పౌనఃపున్యము గల రెండు సరళ హరాత్మక చలనములు ఒకే కణము పై లంబ దిశలలో చర్య జరుపుచున్నవి అనుకొనుము. x అక్షము, y అక్షము వెంబడి చర్య జరిపే ఆ తరంగముల స్థాన భ్రంశములను సమీకరణములు సూచించును.

$$x = A_1 \cos \omega t \quad \text{.........................(1)}$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \delta) \quad \text{......................... (2)}$$

x, y లు ఆ దిశలలో $'t'$ కాలము వద్ద స్థాన భ్రంశములను సూచించును. A_1 , A_2 లు x, y అక్షములోని సరళ హరాత్మక చలనముల కంపన పరిమితి సూచించును. δ దశా భేదమును సూచించును.

(1), (2) సమీకరణముల నుండి కాల ప్రమేయమును తొలగించిన ఆ కణము గమన మార్గము తెలియును.

(1) నుండి $\dfrac{x}{A_1} = \cos \omega t$ ....(3) $\left(\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\right)$

$$\sin \omega t = \sqrt{1 - \cos^2 \omega t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \quad \text{............ (4)}$$

(2) నుండి $\frac{y}{A_2} = \text{Cos}\left(\omega t + \delta\right)$

$= \text{Cos } \omega t \text{ Cos } \delta - \text{Sin } \omega t \text{ Sin } \delta$ .... (5)

$\left(\because \text{Cos}\left(A+B\right) = \text{Cos A Cos B} - \text{Sin A Sin B}\right)$

(3) నుండి $\text{Cos}\,\omega t$ విలువను (4) నుండి $\text{Sin}\,\omega t$ విలువను (5)లో ప్రతిక్షేపించిన

$$\frac{y}{A_2} = \frac{x}{A_1} \text{ Cos } \delta - \sqrt{1-\frac{x^2}{A_1^2}} \text{ Sin } \delta$$

$$\left(\frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1}\text{Cos } \delta\right) = -\sqrt{1-\frac{x^2}{A_1^2}} \text{ Sin } \delta$$

రెండు వైపులా వర్గము చేసిన

$$\left(\frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1} \text{ Cos } \delta\right)^2 = \left(1-\frac{x^2}{A_1^2}\right) \text{Sin}^2 \delta$$

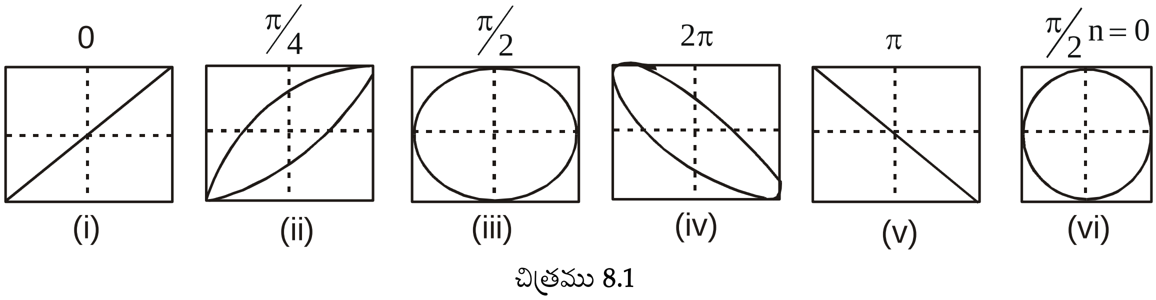
$$\Rightarrow \frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} \text{Cos}^2 \delta - \frac{2yx \text{ Cos } \delta}{A_2 A_1} = \text{Sin}^2 \delta - \frac{x^2 \text{Sin}^2 \delta}{A_1^2}$$

$$\frac{x^2}{A_1^2}\left(\text{Sin}^2 \delta + \text{Cos}^2 \delta\right) + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \text{Cos}\delta = \text{Sin}^2\delta$$

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \text{Cos } \delta = \text{Sin}^2 \delta \text{ .... (6)}$$

ఈ సమీకరణము దీర్ఘవృత్త సమీకరణమును సూచించును. కావున కణము దీర్ఘ వృత్త పథము వెంబడి గమనము చెందును. వివిధ 'δ' విలువలకు కణ పథమును క్రింది విధముగా చర్చించవచ్చును.

Case i : రెండు స॥హా॥చ॥ల దశా భేదము $\delta = 0$ అయిన $\text{Cos}\,\delta = 1\,;\text{Sin } \delta = 0$ (6) సమీకరణము నుండి



చిత్రము 8.1

$$\frac{x^2}{{A_1}^2}+\frac{y^2}{{A_2}^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}=0$$

$$\Rightarrow\left(\frac{x}{A_1}-\frac{y}{A_2}\right)^2=0$$

$$\Rightarrow\frac{x}{A_1}-\frac{y}{A_2}=0$$

లేక $y=\frac{A_2}{A_1}x$ ....(7)

ఈ సమీకరణము, $y=mx+c$ సరళరేఖా సమీకరణమును పోలియున్నది.

x అక్షానికి $\left(\theta=\tan^{-1}\frac{A_2}{A_1}\right)$ కోణము వాలియున్న సరళరేఖ వెంబడి కణము సరళహరాత్మకముగా చిత్రము 8.1(I)లో వలే చలించును.

Case ii : దశా భేదము $\delta=\frac{\pi}{4}$, $\text{Cos}\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\text{Sin}\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

(6)వ సమీకరణము నుండి

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{Y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\frac{x^2}{A_2^2}+\frac{Y^2}{A_1^2}-\frac{\sqrt{2}xy}{A_1A_2}=\frac{1}{2}$$

ఇది దీర్ఘ వృత్తము సమీకరణము. దీర్ఘ వృత్తము అక్షము చిత్రము 8.1(II)లో వలే వాలి యుండును.

Case iii : దశాభేదము $\delta=\frac{\pi}{2}$ అయిన $\text{Cos}\frac{\pi}{2}=0$; $\text{Sin}\frac{\pi}{2}=1$ (6)వ సమీకరణము నుండి

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$$

ఇది సౌష్ఠవ దీర్ఘ వృత్తము. దీర్ఘ వృత్తము అక్షములు. x, y అక్షములతో ఏకీభవించును. కణ గమనము చిత్రము 8.1(III)లో వలే యుండును.

Case iv : దశా భేదము $\delta=\frac{3\pi}{4}$ అయిన, $\text{Cos}\frac{3\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\text{Sin}\frac{3\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

(6)వ సమీకరణము

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}+\frac{\sqrt{2}xy}{A_1A_2}=\frac{1}{2}$$

కణ గమనము చిత్రము 8.1(IV)లోవలే వాలి యున్న దీర్ఘ వృత్తాకార పథమును సూచించును.

Case V : దశాభేదము $\delta = \pi$ అయిన $\text{Cos }\pi = -1$; $\text{Sin }\pi = 0$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}+\frac{2xy}{A_1A_2}=0$$

లేక $$\left(\frac{x}{A_1}+\frac{y}{A_2}\right)^2 = 0$$

$$\frac{x}{A_1}=\frac{-y}{A_2}$$

$$y=-\frac{A_2}{A_1}x$$

ఋణవాలు $\left(\frac{A_2}{A_1}\right)$ గల సరళరేఖా సమీకరణమును సూచించును. కణము చిత్రము 8.1(V)లో వలే సరళ రేఖా మార్గములో ప్రయాణించును.

Case iv : దశాభేదము $\delta = \frac{\pi}{2}$, $A_1 = A_2 = A$ అయిన

$$\text{Cos }\frac{\pi}{2}=0;\ \text{Sin}\frac{\pi}{2}=1$$

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{A^2}=1$$

$$x^2+y^2=A^2$$

కణ గమనము A వ్యాసార్థము గల వృత్తాకార మార్గములో చిత్రము 8.1(VI)లో వలే యుండును. ఈ చిత్రములనే లిస్సజాన్ చిత్రములు అంటారు.

8.4 పరస్పర లంబ దిశలలో అసమాన (2 : 1) పౌనఃపున్యములు గల రెండు సరళ హరాత్మక చలనముల సమ్మేళనము

పౌనఃపున్యముల నిష్పత్తి 2:1 గల రెండు సరళ హరాత్మక చలనములలో మొదటిది X అక్షము వెంబడి, రెండవది Y అక్షము వెంబడి ఒక బిందువు పై చర్య జరుపుచున్నదనుకొనుము. ఆ రెండు సరళ హరాత్మక చలనములు క్రింది సమీకరణములలో సూచించవచ్చును.

$$x = A_x \text{ Sin } (2\omega t + \delta) \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$y = A_y \text{ sin } \omega t \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

X అక్షము పై చర్య జరిపే సరళ హరాత్మక చలనము కంపన పరిమితి A_x

Y అక్షము పై చర్య జరిపే సరళ హరాత్మక చలన కంపన పరిమితి A_y

ఆ రెండింటి మధ్య దశా భేదము δ. ఈ రెండు సరళ హరాత్మక చలనములు చర్య జరిపే కణము యొక్క ఫలిత చలనమును పై సమీకరణములలో 't'ని క్రింది విధముగా తొలగించి తెలసికొనవచ్చును.

(2)వ సమీకరణము నుండి $\dfrac{y}{A_y} = \text{Sin } \omega t \cdots\cdots\cdots (3)$

$$\text{అయిన} \quad \text{Cos } \omega t = \sqrt{1 - \frac{y^2}{{A_y}^2}} \cdots\cdots\cdots\cdots (4) \left\{\because \text{Sin}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1\right\}$$

(1)వ సమీకరణము నుండి $\dfrac{x}{A_x} = \text{Sin}(2\omega t + \delta)$

$$= \text{Sin } 2\omega t \text{ Cos } \delta + \text{Cos } 2\omega t \text{ Sin } \delta$$

$$\left\{\because \text{Sin}(A+B) = \text{Sin A Cos B} + \text{Cos A Sin B}\right\}$$

$$\frac{x}{A_x} = 2\text{Sin}\omega t\,\text{Cos}\omega t\,\text{Cos}\delta + \left(1 - 2\text{ Sin}^2\omega t\right)\text{Sin}\delta$$

$$\because \text{Sin } 2\theta = 2\text{Sin}\theta\text{Cos}\theta$$

$$\left\{\text{Cos } 2\theta = \text{Cos}^2\theta - \text{Sin}^2\theta = 2\text{Cos}^2\theta - 1 = 1 - 2\text{ Sin}^2\theta\right\}$$

పై సమీకరణములో (3) నుండి $\text{Sin } \omega t$ (4) నుండి $\text{Cos}\,\omega t$ విలువలను ప్రతిక్షేపించిన

$$\frac{x}{A_x} = \frac{2y}{A_y}\sqrt{1 - \frac{y^2}{{A_y}^2}}\text{Cos } \delta + \left(1 - \frac{2y^2}{{A_y}^2}\right)\text{Sin } \delta$$

లేక $$\left[\frac{x}{A_x}-\left(1-\frac{2y^2}{A_y^2}\right)\operatorname{Sin}\,\delta\right]=\frac{2y}{A_y}\operatorname{Cos}\delta\sqrt{1-\frac{y^2}{A_y^2}}$$

$$=\left[\left(\frac{x}{A_x}-\operatorname{Sin}\delta\right)+\frac{2y^2}{A_y^2}\operatorname{Sin}\delta\right]=\frac{2y}{A_y}\operatorname{Cos}\,\delta\sqrt{1-\frac{y^2}{A_y^2}}$$

రెండు వైపులా వర్గము చేసిన

$$\left(\frac{x}{A_x}-\operatorname{Sin}\delta\right)^2+\frac{4y^4}{A_y^4}\operatorname{Sin}^2\,\delta+\frac{4y^2}{A_y^2}\left(\frac{x}{A_x}-\operatorname{Sin}\,\delta\right)\operatorname{Sin}\delta=\frac{4y^2}{A_y^2}\operatorname{Cos}^2\,\delta\left(1-\frac{y^2}{A_y^2}\right)$$

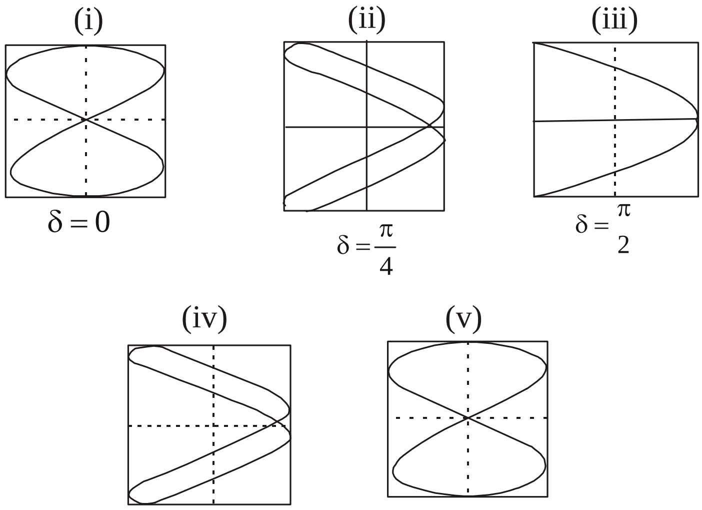
$$\left(\frac{x}{A_x}-\operatorname{Sin}\delta\right)^2+\frac{4y^4}{A_y^4}\left(\operatorname{Sin}^2\,\delta+\operatorname{Cos}^2\,\delta\right)-\frac{4y^2}{A_y^2}\left(\operatorname{Sin}^2\delta+\operatorname{Cos}^2\delta\right)+\frac{4y^2}{A_y^2}\,\frac{x}{A_x}\operatorname{Sin}\,\delta=0$$

$$\left(\frac{x}{A_x}-\operatorname{Sin}\,\delta\right)^2+\frac{4y^4}{A_y^4}-\frac{4y^2}{A_y^2}+\frac{4y^2}{A_y^2}\,\frac{x}{A_x}\operatorname{Sin}\,\delta=0$$

$$\left(\frac{x}{A_x}-\operatorname{Sin}\,\delta\right)^2+\frac{4y^2}{A_y^2}\left\{\frac{y^2}{A_y^2}+\frac{x}{A_x}\operatorname{Sin}\delta-1\right\}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

(5)వ సమీకరణము రెండు ఉచ్చులు గల సామాన్య సమీకరణము (General Equation) ను సూచించును. దశా భేదము δ వివిధ విలువలకు కణ పథము పటములో చూపిన విధముగా యుండును.

పటము 8.2



(i) $\delta=0$ (ii) $\delta=\frac{\pi}{4}$ (iii) $\delta=\frac{\pi}{2}$ (iv) $\phi=\frac{3\pi}{4}$ (v) $\phi=\pi$

Case i : $\delta = 0, \pi, 2\pi$........... అయిన

$$\mathrm{Sin}\ \delta = 0$$

(5)వ సమీకరణము నుండి

$$\frac{x^2}{A_x{}^2} + \frac{4y^2}{A_y{}^2}\left(\frac{y^2}{A_y{}^2} - 1\right) = 0$$

రెండు ఉచ్చులు చిత్రము 8.2 లోవలే '8' ఆకారములో గల పథమును సూచించును.

Case ii : $\delta = \frac{\pi}{4}$ అయిన $\mathrm{Sin}\ \delta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (5)వ సమీకరణము నుండి

$$\left(\frac{x}{A_x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{4y^2}{A_y{}^2}\left\{\frac{y^2}{A_y{}^2} + \frac{x}{A_x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right\} = 0$$

పైన సమీకరణము రెండు ఉచ్చులు గల పథము వెంబడి చిత్రము 8.2లో (ii) వలే చలించును.

Case iii : $\delta = \frac{\pi}{2}$ అయిన $\mathrm{Sin}\ \delta = 1$ (5)వ సమీకరణము నుండి

$$\left(\frac{x}{A_x} - 1\right)^2 + \frac{4y^2}{A_y{}^2}\left\{\frac{y^2}{A_y{}^2} + \frac{x}{A_x} - 1\right\} = 0$$

$$\left(\frac{x}{A_x} - 1\right)^2 + \frac{4y^4}{A_y{}^4} + \frac{4y^2}{A_y{}^2}\left(\frac{x}{A_x} - 1\right) = 0$$

$$\left\{\left(\frac{x}{A_x} - 1\right) + \frac{2y^2}{A_y{}^2}\right\}^2 = 0$$

పై సమీకరణము ఏకీభవించుచున్న రెండు పరావలయ సమీకరణములను సూచించును. ఒక్కొక్క పరావలయ సమీకరణమును క్రింది విధముగా రాబట్టవచ్చును.

$$\left(\frac{x}{A_x} - 1\right) + \frac{2y^2}{A_y{}^2} = 0 \text{ లేక } \frac{2y^2}{A_y{}^2} = -\left(\frac{x}{A_x} - 1\right)$$

లేక $$Y^2 = \frac{-{A_y}^2}{2A_x}\left(x - A_x\right)$$

ఏకీభవించు రెండు పరావలయముల పథము చిత్రము 8.2(iii) లో వలే యుండును.

Case iv : $\delta = \frac{3\pi}{4}$ అయిన $\mathrm{Sin}\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (5)వ సమీకరణము సందర్భము (iii)లో లాగ రెండు ఉచ్చులు గల పథము వలే ప్రయాణించును.

Case v : $\delta = \pi$ అయిన $\mathrm{Sin}\ \delta = 0$ (5)వ సమీకరణము సందర్భము (i)లో లాగ '8'ఆకారపు పథము వెంబడి పటము 8.2లో v వలే ప్రయాణించును. పటములోని ఈ చిత్రములనే లిస్సజాన్ చిత్రములు అంటారు.

8.5 లిస్సజాన్ చిత్రముల ఉపయోగములు

1. లిస్సజాన్ చిత్రముల సహాయముతో రెండు సరళ హరాత్మక చలనముల కంపన పరిమితి, పౌనఃపున్యము, దశా భేదములను విశ్లేషణ చేయవచ్చును.

2. క్యాలికో ప్రింటింగ్ డిజైనుల నేర్పరుచుటలో ఉపయోగపడును.

3. శృతిదండపు పౌనఃపున్యము నిర్ణయించవచ్చును.

4. లిస్సజోన్ చిత్రములనుపయోగించి వయలిన్ తంత్రుల కంపన విధానమును పరిక్షించెదరు.

5. ఒక చివర స్థిరముగా బిగించిన దండము పౌనఃపున్యము పొడవులో కలిగే మార్పును పరిశీలించుటకు ఈ చిత్రములు ఉపయోగపడును.

8.6 సాధించిన సమస్యలు

1. లిస్సజాన్ చిత్ర ప్రయోగములో $250\,\mathrm{Hz}$ పౌనఃపున్యము గల ఒక శృతి దండము మరొక శృతి దండమునుపయోగించినపుడు వృత్త పథము గల చిత్రము ప్రతి 5 సెకనుల కాలము వ్యవధిలో ఏర్పడును. అయిన రెండవ శృతి దండము పౌనఃపున్యము మొదటి శృతి దండము కంటే తక్కువయిన దాని పౌనఃపున్యము ఎంత ?

సాధన - మొదటి శృతిదండము పౌనఃపున్యము $= 250\,\mathrm{Hz}$

చక్రము పూర్తి అగుటకు పట్టు కాలము $= 5$ సెకన్లు

పౌనఃపున్యముల తేడా $= \frac{1}{5} = 0.2\,\mathrm{Hz}$

రెండవ శృతి దండము పౌనఃపున్యము తక్కువ కాబట్టి 250 - 0.2

$= 249.8\,\mathrm{Hz}$

2. A, B శృతి దండముల పౌనఃపున్యము దాదాపు సమానము. A పౌనఃపున్యము $250\,Hz$. రెండింటి నుపయోగించి లిస్సజోస్ చిత్రముల నేర్పరిచినపుడు చిత్ర మార్పుల చక్రము ప్రతి 10 సెకనులకు ఏర్పడును. B ని కొద్దిగా మైనముతో భారము పెంచిన చిత్ర మార్పుల చక్రము 12 సెకనులకు ఏర్పడిన B యొక్క అసలు పౌనఃపున్యము ఎంత ?

సాధన - A పౌనఃపున్యము $= 256\,Hz$

చక్రము పూర్తి అగుటకు పట్టు కాలము $=10$ సెకనులు

పౌనఃపున్యముల తేడా $=\dfrac{1}{10}=0.1$

B యొక్క పౌనఃపున్యము $= 256+0.1$ లేక **256 - 0.1** అగును.

కాని B యొక్క పౌనఃపున్యము బరువు పెంచి తగ్గినపుడు తేడా $\left(\dfrac{1}{12}\right)$ తగ్గినది.

కావున B పౌనఃపున్యము A కంటే ఎక్కువ యుండవలెను. అనగా B యొక్క తొలి పౌనఃపున్యము 256.1 Hz.

8.7 సారాంశము

పరస్పర లంబ దిశలలో ఒక బిందువు పై చర్య జరిపే సరళ హరాత్మక చలనములు వలన పథ మార్గము లిస్సజోస్ చిత్రములనేర్పరుచును. ఈ చిత్రములననుసరించి ఆ పౌనఃపున్యములను లెక్కించవచ్చును. ఈ చిత్రములు ఆధ్యారోపణ నియమముననుసరించి ఏర్పడును.

8.8 కీలక పదములు

ఆధ్యారోపణ, లిస్సజోస్ చిత్రములు, దశ

8.9 స్వయం సమీక్షా ప్రశ్నలు

1. లిస్సజాన్ చిత్రముల పై లఘుటీక వ్రాయుము.

2. పరస్పరము లంబ దిశలలో పని చేస్తున్న రెండు సరళ హరాత్మక చలనముల పౌనఃపున్యములు సమానంగా యున్నపుడు వాటి సమ్మేళనము వలన కలిగే ఫలిత చలనమును చర్చించండి.

3. పరస్పరము లంబ దిశలలో పని చేస్తున్న రెండు సరళ హరాత్మక చలనముల పౌనఃపున్యముల నిష్పత్తి 2 : 1 లో ఉండే ఒక బిందువు పై చర్య జరిపిన ఆ బిందు చలనమును వివరించండి.

అభ్యాసము

1. దాదాపు సమాన పౌనఃపున్యము గల రెండు శృతి దండములలో ఒక దాని (A) పౌనఃపున్యము 288.

రెండింటినుపయోగించి లిస్సజాన్ చిత్రములనేర్పరిచిన లిస్సజాన్ చిత్ర మార్పుల చక్రము 20 సెకనులలో పూర్తి అగును. రెండవ శృతి దండము B భారము మైనముతో పెంచిన మార్పుల చక్రము 10 సెకనులలో పూర్తి అగును. అయిన B పౌనఃపున్యము ఎంత ? (జ॥ 287.95)

2. A, B శృతిదండములనుపయోగించి లిస్సజాన్ చిత్రములేర్పరచబడినవి. చిత్ర మార్పుల చక్రము 10 సెకనులలో పూర్తి అగును. A యొక్క పౌనఃపున్యము B కంటే ఎక్కువ మరియు A పౌనఃపున్యము $200\,\text{Hz}$ అయిన B యొక్క పౌనఃపున్యము ఎంత ? (జ॥ 200.1)

8.11 చదువవలసిన గ్రంథాలు

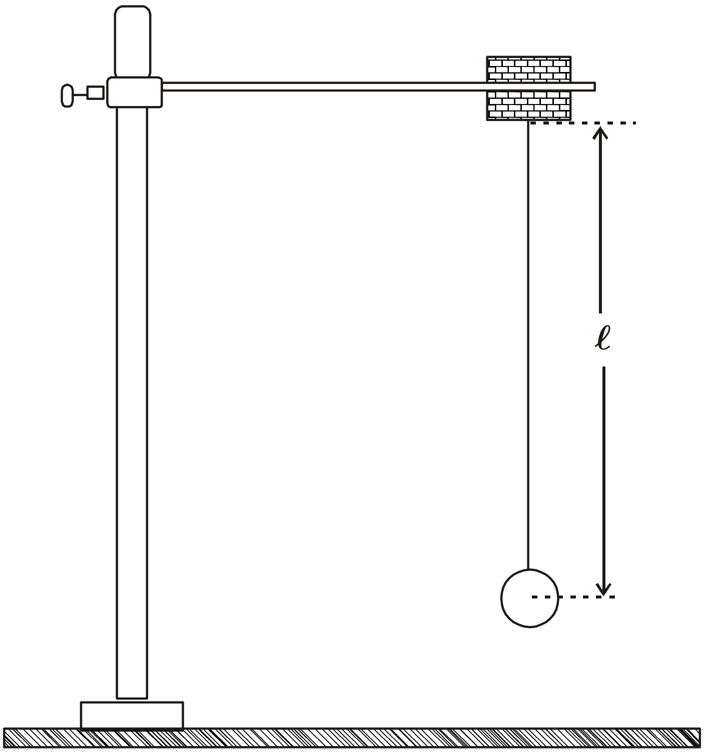
1. Introduction to Physics for Scientists and Engineers : F.J. Ruche (M.C. Graw Hill)
2. భౌతికశాస్త్రము మొదటి సంవత్సరము : తెలుగు అకాడమి పబ్లికేషన్స్
3. Waves and Oscillations : S. Badani, V. Balasubramanian and K. Ramireddy
4. B.Sc. Physics Vol. 2 : C. Murali Mohan Sastry, Prof. Jaidevanand

ప్రయోగము సంఖ్య - 8

లఘులోలకము - దోషములు

ఉద్దేశము : లఘులోలకముతో ప్రయోగము చేసి, పరిశీలనల నుంచి గరిష్ట సంభావ్యతా దోషమును కనుగొని, గురుత్వ త్వరణము నిర్ణయించడము.

పరికరములు : కుట్టుదారము, బాబ్, వెర్నియర్ కాలిపర్స్, మీటరు స్కేలు.



వర్ణన : లఘులోలకములో భారమైన బాబ్ వుంటుంది. ఇది గోళాకారముగా ఉంటుంది. దీనిని తేలికైనది, పురిలేనిది, సాగనటువంటిది అయిన దారంతో వ్రేలాడదీస్తారు. స్టాండుకు బిగించిన రెండుగా చీలిన బెండు ముక్కల మధ్య నుండి దారమును వ్రేలాడదీస్తారు. బెండు ముక్కల అడుగు తలాలు చదునుగాను, క్షితిజ సమాంతరముగాను ఉండాలి.

ప్రయోగపద్ధతి : వెర్నియర్ కాలిపర్స్ ఉపయోగించి బాబ్ వ్యాసార్థము (V) కనుగొనాలి. బాబ్ అడుగు భాగాన్ని తాకేటట్లు ఒక చదునైన రేకుని, క్షితిజ సమాంతరముగా ఉంచి దానిపై మీటరు స్కేలుని నిలువుగా భారానికి సమాంతరంగా ఉంచాలి. రేకు పై భాగం నుంచి రెండు ముక్కల అడుగు భాగము వరకు గల మధ్య దూరాన్ని కనుగొని(L), దాని నుండి బాబ్ వ్యాసార్థము తీసివేస్తే లఘులోలకము పొడవు (L - r) విలువ తెలుస్తుంది.

బాబ్‌ని ఒక వైపుకి లాగి వదలాలి. అది సరళహరాత్మక చలనంలో ఉంటుంది. బాబ్ మాధ్యమిక స్థానాన్ని దాటి ఒక వైపుకి పోవుచున్నప్పుడు ఆపు గడియారమును పనిచేయించవలెను. బాబ్ మరల మాధ్యమిక స్థానాన్ని అదే దిశలో దాటి పోవునపుడు డోలనము పూర్తి అవుతుంది. 20 డోలనాలకి పట్టు కాలము కనుగొనాలి. వేరు వేరు పొడవులకు ప్రయోగము చేసి రీడింగులను పట్టికలో పొందుపరచాలి.

పరిశీలనలు :

క్రమ సంఖ్య	డోలకం పొడవు (ℓ)	20 డోలనాలకి పట్టేకాలం			డోలనావర్తన కాలము $\left(T=\frac{t}{20}\right)$	T^2	ℓ/T^2
		1వసారి (t_1)	2వసారి (t_2)	సరాసరి $\left(t=\frac{t_1+t_2}{2}\right)$			

ℓ/T^2 సగటు విలువ =

ℓ/T^2 సగటు విలువని = ఖచ్చితమైన విలువగా భావించి, శేష విలువల యొక్క వర్గాలను కనుగొనాలి.

శేషదోషము = పరిశీలించిన విలువ - సగటు విలువ = x

అపుడు ప్రమాణ దోషం = $\sqrt{\frac{\Sigma X^2}{\sqrt{n(n-1)}}}$, ఇక్కడ మనము తీసుకొన్న పరిశీలనల సంఖ్య.

సంభావ్యతా దోషం = 0.6745 × ప్రమాణ దోషం

$\therefore \ell/T^2$ యొక్క క్రమ విలువ = పైన కనుగొనిన సగటు $\pm$ సంభావ్య దోషం, అయిన $g = 4\pi^2 \frac{\ell}{T^2}$ సమీకరణమిస్తుంది.

ఫలితము :

జాగ్రత్తలు : (1) కంపన పరిమితి వీలైనంత తక్కువగా ఉండవలెను.

(2) బెండుముక్క అడుగు భాగం క్షితిజ సమాంతరంగా ఉండవలెను.

యూనిట్ - 3

పాఠం - 9 అవరుద్ధ కంపనాలు - బలాత్కృత కంపనాలు

ఉద్దేశాలు

- డోలకము కంపనముల పై యానకము వల్ల ఘర్షణ ప్రభావము వలన శక్తి వికిరణ రేటు, కంపన పరిమితిలో మార్పు, ఆవర్తన కాలము పై ప్రభావములను విశ్లేషించుట.
- ఈ శక్తి నష్టమును పూరించుటకు చర్య జరిపే ఆవర్తన బల స్పంధ్యముల ప్రభావము.
- ఈ బలాత్కృత కంపనముల వలన శక్తి మార్పు గరిష్టముగా యుండుటకు గల నియమము అనువాదమును విశ్లేషణ చేయుట.
- అనునాదము అనువర్తనములను, వాటి లక్షణములను అవగాహన చేసికొనుట.

విషయసూచిక

9.1 పరిచయము

సరళ హరాత్మక డోలకము శక్తి స్థిరమని చదివితిమి. కంపనములు చేయుచున్నపుడు స్థితిశక్తి - గతిశక్తి గాను, గతిశక్తి - స్థితిశక్తి గాను మార్పు చెందుననని తెలిసికొంటిమి. కావున డోలనములు చేయుట ప్రారంభించిన డోలకము అనంత కాలము స్థిర కంపన పరిమితితో డోలనములు చేయవలెను. కాని మన అనుభవము వేరుగా యున్నది. డోలనములు చేయుచున్న లఘు లోలకమును పరిశీలించిన దాని కంపన పరిమితి క్రమముగా తగ్గుచూ నిశ్చల స్థితికి వచ్చును. ఇందులకు కారణము లఘు లోలకము గోళము చలనానికి యానకము (గాలి) వలన కలిగే ఘర్షణయే. ఈ ఘర్షణను లెక్కలోనికి తీసుకొనిన సరళ హరాత్మక డోలకము అవరుద్ధ హరాత్మక డోలకమగును. సరళ హరాత్మక డోలకము విశ్లేషణలో ఘర్షణను లెక్కలోనికి తీసికొనలేదు. ఈ ఘర్షణ పరిమాణము స్వల్పముగా యుంది. కంపన పరిమితి నెమ్మదిగా తగ్గుచూ డోలనములు చేసిన అల్ప అవరోధము గల డోలనము అందురు. ఘర్షణ అత్యధికముగా యున్న డోలకము స్థానభ్రంశము చెందించి వదిలిన డోలనములు చేయక సమతౌల్య బిందువును నెమ్మదిగా చేరును. ఈ స్థితిని అతి అవరోధితము అందురు. ఉదా॥ డోలకము గోళము తైలములో యుంచి డోలనములు చేయించుట. సమాతా స్థితికి అల్ప కాలములో చేరిన సందిగ్ధ అవరోధితము అందురు. ఈ అధ్యాయములో డోలకము కంపనాల పై అవరోధము (ఘర్షణ) ప్రభావమును విశ్లేషణ చేయుదుము.

ఘర్షణ వలన డోలకము శక్తిని కోల్పోవును. ఆవర్తనముగా బల స్పందనములను డోలకమునకు అందించి కంపన పరిమితి తగ్గకుండా డోలనములు చేయించవచ్చును. ఈ విధమైన కంపనములను బలాత్కృత కంపనములు అందురు. ఉదాహరణకు ఊయలను వూపుట, ఆవర్తన బల స్పందముల పౌనఃపున్యము, ఊయల పౌనఃపున్యమునకు సమానముగా యుండి ఊయల గమన దిశలో పని చేసిన కంపన పరిమితి గరిష్టమగునని మనకు తెలిసినదే. ఈ స్థితినే అనునాదము అందురు. ఈ అధ్యాయములో బలాత్కృత కంపనములను, అనునాదమును విశ్లేషణ చేయుదుము.

9.2 అవరుద్ధ హరాత్మక డోలకము అవకలన సమీకరణము - సాధన :-

అవరుద్ధ హరాత్మక డోలకము ద్రవ్యరాశి (m) కంపనములు చేయుచున్నపుడు స్థానభ్రంశము 'x' యున్నపుడు పునః స్థాపక బలము $-\mu x$ చర్య జరుపును. (సరళహరాత్మక డోలకములో వలే) 'μ' బల స్థిరాంకమును సూచించును.

యానకము ఘర్షణ వలన అదనముగా కలిగే బలము వేగమునకు $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ అనులోమానుపాతముగా యుండును. ఘర్షణ వలన కలిగే బలము $-r\frac{dx}{dt}$ సూచించును. r డోలకము ద్రవ్యరాశి ప్రమాణ వేగమునకు చర్య జరిపే ఘర్షణ బలము దీనిని యాంత్రిక నిరోధము అని అందురు. ఈ బలాల ఋణ సంజ్ఞ స్థానభ్రంశము దిశకు వ్యతిరేక దిశలో యుండుటను సూచించును.

ఈ స్థితిలో ద్రవ్యరాశి బలము $m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$, త్వరణము $\frac{d^2x}{dt^2}$, న్యూటను గమన సూత్రమునను సరించి ...

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x - r\frac{dx}{dt}$$

లేక $$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + \mu x = 0$$

లేక $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{\mu}{m}x = 0$$

లేక $$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$\frac{r}{m} = 2b$ మరియు $\omega^2 = \frac{\mu}{m}$

(1)వ సమీకరణము అవరుద్ధ డోలకము అవకలన సమీకరణమును సూచించును.

సాధన : అవరుద్ధ డోలకము అవకలన సమీకరణ (1) సాధనము క్రింది సమీకరణముతో సూచించవచ్చును.

$$x = Ae^{\alpha t} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

A, α లు స్థిర రాశులు. (2)వ సమీకరణమును 't' పరముగా అవకలనము చేసిన

$$\frac{dx}{dt} = A\,\alpha\, e^{\alpha t}$$

పై సమీకరణమును మరలా అవకలనము చేసినా

$$\frac{d^2x}{dt^2} = A\alpha^2 e^{\alpha t}$$

పై విలువలను (1)వ సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించిన

$$A\alpha^2 e^{\alpha t} + 2bA\,\alpha\, e^{\alpha t} + \omega^2 Ae^{\alpha t} = 0$$

$$Ae^{\alpha t}\left(\alpha^2 + 2b\alpha + \omega^2\right) = 0$$

$Ae^{\alpha t}$ శూన్యము కాదు కావున

$$\alpha^2 + 2b\alpha + \omega^2 = 0$$

మరియు $$\alpha = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}$$

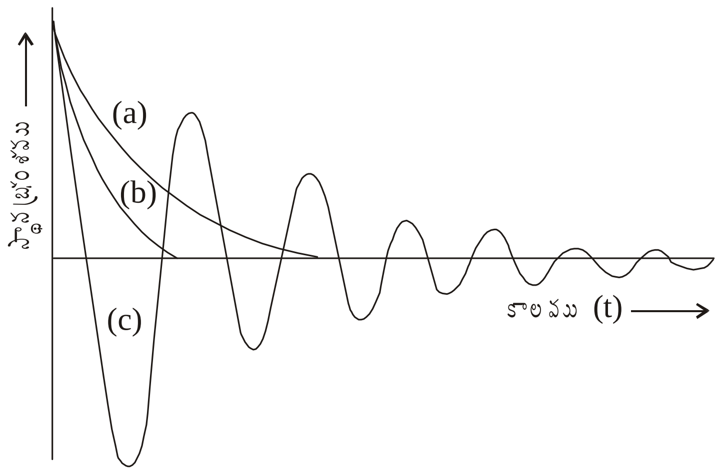
α విలువను (2)లో ప్రతిక్షేపించిన (1)వ సమీకరణము సాధన

$$x = A_1 e^{\left(-b+\sqrt{b^2-\omega^2}\right)t} + A_2 e^{\left(-b-\sqrt{b^2-\omega^2}\right)t} \cdots\cdots (3)$$

A_1, A_2 లు స్థిరాంకములు. b, ω విలువలననుసరించి మూడు స్థితులు ఏర్పడును.

case (i) **అతి అవరోధ గమనము** :- $b^2 > \omega^2$ అయిన $\sqrt{b^2-\omega^2}$ యధార్థము (real) అగును. మరియు $\sqrt{b^2-\omega^2}$ విలువ b కంటే తక్కువ. కావున (3)వ సమీకరణములో ఘాతాంక భాగములు $-b+\sqrt{b^2-\omega^2}$ మరియు $-b-\sqrt{b^2-\omega^2}$ లు ఋణాత్మకమగును. (3)వ సమీకరణములోని రెండు పదములు ఘాతాంకములు ఋణాత్మకమగుటచే తొందరగా శూన్యమగును. (3)వ సమీకరణములోని $A_2 e^{\left(-b-\sqrt{b^2-\omega^2}\right)t}$ వెంటనే శూన్యమగును. కావున స్థానభ్రంశము x విలువ $A_1 e^{\left(-b+\sqrt{b^2-\omega^2}\right)}$ పై ఆధారపడును. ఈ స్థితిలో స్థానభ్రంశము చెందించిన ద్రవ్యరాశి సాపేక్షముగా నెమ్మదిగా పటము 9.1(ఎ)లో వలే సమతా బిందువును చేరును. డోలనములు చేయదు. ఇది అతి అవరోధ స్థితిని సూచించును.

పటము 9.1



case (ii) **సందిగ్ధావరోధ స్థితి** :- $b^2 = \omega^2$ అయిన, (3)వ సమీకరణములో $b = \omega$ వ్రాసిన, ఈ సాధన (1)వ సమీకరణమును తృప్తిపరచదు. కావున $\sqrt{b^2-\omega^2}$ శూన్యము కాలేదు, కావున $\sqrt{b^2-\omega^2} = h$ $(h \to 0)$ అనుకొనిన (3)వ సమీకరణము

$$x = A_1 e^{(-b+h)t} + A_2 e^{(-b-h)t} \text{ అగును}$$

$$= e^{-bt}\left\{A_1 e^{ht} + A_2 e^{-ht}\right\}$$

$$= e^{-bt}\left\{A_1 (1+ht+\cdots\cdots) + A_2 (1-ht\cdots\cdots)\right\}$$

$$= e^{-bt}\left\{(A_1+A_2) + ht(A_1-A_2)\right\}$$

$$x = e^{-bt}\{p + qt\} \cdots\cdots\cdots (4)$$

ఇందులో $p = A_1 + A_2$ మరియు $q = h(A_1 - A_2)$

(4)వ సమీకరణము **(1)**వ సమీకరణము పరిష్కారమగును. కాలము 't' పెరిగిన $(p+qt)$ విలువ పెరుగును కాని e^{-bt} విలువ ఘాతాంకముగా తగ్గుటచే స్థానభ్రంశము అతి స్వల్ప కాలములో శూన్యమగును. దీనినే సందిగ్ధావరోధ స్థితి అందురు. కాలముతో x విలువలో మార్పును పటము **9.1** (b) వక్రము సూచించును.

case (iii) **అల్ప అవరోధ స్థితి (డోలనాత్మక స్థితి)** :- $b^2 << \omega^2$ అయిన $\sqrt{b^2 - \omega^2}$ ఊహారాశి అగును.

$\sqrt{b^2 - \omega^2} = i\sqrt{\omega^2 - b^2} = i\beta$ అని వ్రాయవచ్చును.

$i = \sqrt{-1}$ మరియు $\beta = \sqrt{\omega^2 - b^2}$ అయిన **(3)**వ సమీకరణము.

$x = A_1 e^{(-b+i\beta)t} + A_2 e^{(-b-i\beta)t}$ అగును

$$= e^{-bt}\left\{A_1 e^{i\beta t} + A_2 e^{-i\beta t}\right\}$$

$$= e^{-bt}\left\{A_1(\cos\beta t + i\sin\beta t) + A_2(\cos\beta t - i\sin\beta t)\right\}$$

$$= e^{-bt}\left\{(A_1 + A_2)\cos\beta t + i(A_1 - A_2)\sin\beta t\right\}$$

$$= e^{-bt}\left\{a\ \sin\phi\cos\beta t + i\,a\cos\ \phi\sin\beta t\right\}$$

$a\sin\phi = (A_1 + A_2)$ మరియు $a\ \cos\ \phi = (A_1 - A_2)$

$$= e^{-bt}\ a\ \sin\ (\beta t + \phi)$$

లేక $x = a\,e^{-bt}\sin\left\{(\omega^2 - b^2) + \phi\right\}$

పై సమీకరణములో x విలువ డోలనాత్మకముగా యుండుటను సూచించును. ఈ డోలన చలనము కంపన పరిమితి ae^{-bt} సూచించును.

కంపన పరిమితి ఘాతాంకముగా తగ్గుటను సూచించును.

ఆవర్తన కాలము $T = \dfrac{2\pi}{\beta} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - b^2}}$

సరళ హరాత్మక డోలకములో ఆవర్తన కాలము $T=\frac{2\pi}{\omega}$ కావున అవరోధము వలన డోలకము ఆవర్తన కాలము పెరుగును. ఈ ఆవర్తన కంపన గమనమును పటములో 9.1 (c) వక్రము సూచించును.

9.3 అవరుద్ధ డోలకము శక్తి - వ్యర్థమయ్యే సామర్థ్యము

అవరుద్ధ డోలకము కంపన పరిమితి కాలముతో తగ్గునని తెలియును. డోలనములు చేయుచున్నపుడు అవిచ్ఛిన్నముగా (continuous) శక్తి నష్టము జరుగుటను సూచించును. డోలకము పై యానకపు ఘర్షణ వలన శక్తి వ్యర్థమగును. ఈ శక్తి ఉష్ణశక్తిగా మారును. వ్యర్థమయ్యే శక్తి రేటును అనగా వ్యర్థమయ్యే సామర్థ్యమును లెక్కించవచ్చును. అల్ప అవరోధ స్థితిలో ఏ క్షణంలో అయినా అవరుద్ధ హరాత్మక డోలకము స్థానభ్రంశము (x)ను క్రింది సమీకరణముతో సూచించవచ్చును.

$$x=ae^{-bt}\ \sin(\beta t+\phi)$$

ఇందులో $\beta=\sqrt{\omega^2-b^2}$

ఏ క్షణములోనైన వేగము (క్షణిక వేగము - Instantaneous Velocity)

$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\left\{ae^{-bt}\ \sin(\beta t+\phi)\right\}$$

$$=-abe^{-bt}\sin(\beta t+\phi)+ae^{-bt}\beta\cos(\beta t+\phi)$$

$$=ae^{-bt}\left\{-b\ \sin(\beta t+\phi)+\beta\cos(\beta t+\phi)\right\}$$

క్షణిక గతిశక్తి $=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}ma^2e^{-2bt}\left\{-b\sin(\beta t+\phi)+\beta\cos(\beta t+\phi)\right\}^2$

$$=\frac{1}{2}ma^2e^{-2bt}\left\{b^2\sin^2(\beta t+\phi)+\beta^2\cos^2(\beta t+\phi)-2b\beta\sin(\beta t+\phi)\cos(\beta t+\phi)\right\}$$

పూర్తి ఆవర్తనమునకు $\sin(\beta t+\phi)\cos(\beta t+\phi)$ సగటు విలువ శూన్యమని తెలియును కావున అదే విధము పూర్తి ఆవర్తనమునకు $\sin^2(\beta t+\phi)$ సగటు విలువ $\frac{1}{2}$ మరియు $\cos^2(\beta t+\phi)$ సగటు విలువ $\frac{1}{2}$

అయిన ఆవర్తనమునకు సగటు గతిశక్తి

$$(K\cdot E)_{ave}=\frac{1}{2}ma^2e^{-2bt}\left\{\frac{b^2}{2}+\frac{\beta^2}{2}\right\}$$

$$(K\cdot E)_{ave}=\frac{1}{4}ma^2e^{-2bt}\left(b^2+\beta^2\right)$$

వాయువులలో అవరోధము చాలా తక్కువ కావున అవరోధ గుణకము $b^2 <<< \beta^2$ కావున b^2 గల పదమును పై సమీకరణములో వదిలివేయవచ్చును.

$$(K \cdot E)_{ave} = \frac{1}{4} m a^2 e^{-2bt} \beta^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

కాని ఏదైనా ఒక క్షణములో స్థితి శక్తి $= \frac{1}{2} \mu x^2$

$$= \frac{1}{2} \mu \left\{ a e^{-bt} \sin(\beta t + \phi) \right\}^2$$

$$= \frac{1}{2} \mu a^2 e^{-2bt} \sin^2(\beta t + \phi)$$

కాని $\omega^2 = \frac{\mu}{m}$ or $\mu = m\omega^2$ కాని అవరోధము అల్పంగా యుంటే $\omega^2 \simeq \beta^2$ అయిన $\mu = m\beta^2$

క్షణిక స్థితిశక్తి $= \frac{1}{2} m \beta^2 a^2 e^{-2bt} \sin^2(\beta t + \phi)$

పూర్తి ఆవర్తనమునకు $\sin^2(\beta t + \phi)$ సగటు విలువ $\frac{1}{2}$ కావున

$$(P \cdot E)_{ave} = \frac{1}{4} m \beta^2 a^2 e^{-2bt} \ldots\ldots (2)$$

మొత్తము సగటు శక్తి $E_{ave} = (K \cdot E)_{ave} + (P \cdot E)_{ave}$

$$= \frac{m}{4} a^2 e^{-2bt} \beta^2 \quad + \frac{m}{4} \beta^2 a^2 e^{-2bt}$$

$$= \frac{m}{2} a^2 e^{-2bt} \beta^2$$

$$E_{ave} = E_0 e^{-2bt} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \qquad \left[\because E_0 = \frac{m}{2} a^2 \beta^2 \right]$$

వ్యర్థమయ్యే సగటు సామర్థ్యము

రోధక (ఘర్షణ) వలన వ్యర్థమయ్యే శక్తి రేటు, సగటు సామర్థ్యమును (p) సూచించును. కాని

$$P_{ave} = -\frac{dE}{dt}$$

$$= -\frac{d}{dt}\left(E_0 e^{-2bt}\right)$$

$$= 2E_0 b e^{-2bt} \cdots\cdots\cdots (4)$$

$$P_{ave} = 2Eb$$

9.4 అవరుద్ధ హరాత్మక - సరళ హరాత్మక డోలకముల శక్తి పోలిక

సరళ హరాత్మక డోలకములో శక్తి వ్యర్థము గాదు. మొత్తము శక్తి స్థిరము. కాని కంపనములు చేయునపుడు స్థితిశక్తి - గతిశక్తి గాను, గతిశక్తి - స్థితిగాను రూపాంతరము చెందును. స్థిర బిందువు వద్ద గతిశక్తి గరిష్ఠము. అంత్య బిందువు (కంపన పరిమితి గరిష్టము) వద్ద స్థితి శక్తి గరిష్ఠము. ఏ స్థితిలోనైన సరళ హరాత్మక డోలకము శక్తికి సమీకరణము.

$$E = 2\pi^2 n^2 A^2 m$$

m ద్రవ్యరాశి, A కంపన పరిమితి, n పౌనఃపున్యము.

కావున శక్తి పౌనఃపున్యము వర్గమునకు, కంపన పరిమితి వర్గమునకు అనులోమానుపాతముగా యుండును.

అవరుద్ధ హరాత్మక డోలకములో ఘర్షణ వలన శక్తి నష్టమగును. శక్తి వ్యర్థమగుటచే కంపన పరిమితి క్రమముగా తగ్గుచూ చివరకు శూన్యమగును. అవరోధము వలన డోలకము ఆవర్తన కాలము పెరుగును. పౌనఃపున్యము తగ్గును. కాలముతో వ్యర్థమయ్యే శక్తి రేటుకు సమీకరణము.

$$P_{ave} = 2E_0 \; b \; e^{-2bt}$$

9.5 J =~¡°^ ȟe ì⊢~Œ ȩH›_ Ë• H⊱ò ÐJ ==°O^ Î# ‹ ≡~} **(Logarithmic Decrement) :-**

హరాత్మక డోలకము యొక్క కంపన పరిమితి తగ్గుదల రేటును అవమందన సవరణతో సూచించెదరు.

$t = 0$ క్షణమున కంపన పరిమితి $a_0 = ae^{-bt}$ అనుకొనుము.

$a_1, a_2, a_3 \cdots\cdots\cdots$లు, కాలము $t = T, 2T, 3T$ వద్ద కంపన పరిమితులను సూచించిన

$$a_1 = ae^{-bT}$$

$$a_2 = ae^{-b(2T)}$$

- - - - - - - - - -

- - - - - - - - - -

$$a_n = ae^{-b(2nT)}$$

పై సమీకరణముల నుండి

$$\frac{a_0}{a_1}=\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_3}{a_2}=\cdots\cdots\cdots\cdots=e^{bT}=e^{\lambda}$$

$(\because bT=\lambda)$ λని లాగరిధిమిక్ సవరణ అందురు.

పై సమీకరణముల సంవర్గమునమును తీసికొనిన ....

$$\lambda=\log_e\frac{a_0}{a_1}=\log_e\frac{a_1}{a_2}=\log_e\frac{a_2}{a_3}\cdots\cdots\cdots$$

ఒక ఆవర్తన కాలములోని వరుస కంపన పరిమితుల నిష్పత్తి సంవర్గమానమును అవమందన సవరణ లేక లాగరిధిమిక్ క్రిమెంట్ అందురు.

రిలాక్సేషన్ కాలము (Relaxation Time) :-

అవరుద్ధ డోలకము పై అవరోధము యొక్క ప్రభావమును కాలముపరంగా వివరించే పద్ధతి రిలాక్సేషన్ కాలము. అవరుద్ధ డోలకము తొలిశక్తిలో $\left(\frac{1}{e}\right)$ వంతు తగ్గుటకు పట్టు కాలమును రిలాక్సేషన్ కాలము అందురు.

కాలము పరముగా శక్తి సమీకరణము

$$E_t=E_0e^{-2bt}\cdots\cdots\cdots(1)$$

కాలము t వద్ద A_t కంపన పరిమితి $t=0$ అయినపుడు కంపన పరిమితి A_0

$$\left(\frac{E_t}{E_o}\right)=e^{-2bt}$$

కాని $\left(E_t/E_o\right)=\frac{1}{e}$ అయిన కాలమును 'రిలాక్సేషన్ కాలము' τ అందురు.

$$\frac{1}{e}=e^{-2b\tau} \text{ లేక } e^{-1}=e^{-2b\tau}$$

$$2b\tau=1 \text{ లేక } \tau=\frac{1}{2b}\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1), (2)ల నుండి $E_t=E_0\,e^{\frac{-t}{\tau}}$

రిలాక్సేషన్ కాలమును సామర్థ్యముపరముగా

$$P_{av}=\frac{E}{\tau}$$

గుణ భాజకము (Quality Factor)

2π రెట్లు, కంపన వ్యవస్థతో విలువ గల శక్తికి, ఒక ఆవర్తన కాలములో కోల్పోయే శక్తి నిష్పత్తిని గుణ భాజకముగా నిర్వచించెదరు. (Q)

$$Q = 2\pi \frac{\text{వ్యవస్థలో విలువ గల శక్తి}}{\text{ఆవర్తన కాలములో వ్యర్థమయ్యే శక్తి}}$$

$$= 2\pi \frac{E}{P\tau}$$

$\because P$ సామర్థ్యము, మరియు $P = \frac{E}{\tau}$

$$\therefore Q = 2\pi \cdot \frac{E}{\left(\frac{E}{\tau}\right)T} = 2\pi \frac{\tau}{T} = \omega\tau$$

$$Q = \omega\tau$$

9.6 బలాత్కృత కంపనములు (Forced Vibrations) అవకలన సమీకరణ సాధన

అవరుద్ధమైన, అవరుద్ధము కాని (డోలకము) కంపనముల విశ్లేషణ చేసితిమి. ఈ కంపన స్థితిలో గల డోలకము పై ఆవర్తన బాహ్య బలము చర్య జరిపిన ఏమగునో పరిశీలించెదము. ఈ ఆవర్తన బలమును చోదిత బలము అందురు. చోదిత బలము $'F \sin pt'$ అనుకొనుము.

డోలక వ్యవస్థ పై జరిగే పునఃస్థాపక బలము $(-\mu x)$. అవరోధన బలము $\left(-r\frac{dx}{dt}\right)$కు అదనముగా చోదిత బలము $(F \sin pt)$ చర్య జరుపును. ఈ బలాల ప్రభావమున డోలకము $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$ త్వరణము చెందిన న్యూటన్ గమన నియమముల నుండి

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x - r\frac{dx}{dt} + F\sin\ pt$$

(m డోలకము ద్రవ్యరాశి, బలము $m\frac{d^2x}{dt^2}$)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + \mu x = F\ \sin\ pt$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{r}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{\mu}{m}x=\frac{F}{m}\sin pt$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2b\frac{dx}{dt}+\omega^2x=f\ \sin\ pt\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

($2b=\frac{r}{m};\ \ \omega^2=\frac{\mu}{m}$ మరియు $f=\frac{F}{m}$ సూచించును)...................... (2)

చోదిత బలము చర్య జరిపేటపుడు డోలకము చలనము సూచించే అవకలన సమీకరణము (1)

సమతాస్థితిలో డోలకము చోదిత బల పౌనఃపున్యముతో కంపించును. కాని డోలకము సహజ పౌనఃపున్యముతో కాదు. అవకలన సమీకరణము (1) యొక్క పరిష్కారము.

$$x=A\ \sin\ (pt-\theta)\cdots\cdots\cdots(3)$$

A స్థిర కంపన పరిమితి సూచించును. θ, స్థాన భ్రంశము x, చోదిత బలమునకు ఎంత వెనుకబడి యుండునో సూచించును. అనగా x మరియు $F\sin\ pt$ ల మధ్య దశా భేదము సూచించును.

(3)వ సమీకరణమును అవకలనము చేసిన

$$\frac{dx}{dt}=Ap\ \cos\ (pt-\theta)\cdots\cdots\cdots(4)$$

't' పరముగా మరొకసారి అవకలనము చేసిన

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-Ap^2\sin(pt-\theta)\cdots\cdots\cdots(5)$$

$x,\ \frac{dx}{dt},\frac{d^2x}{dt^2}$ విలువలను (3), (4), (5) సమీకరణముల నుండి (1)లో ప్రతిక్షేపించిన

$$-Ap^2\ \sin(pt-\theta)+2bAP\cos(pt-\theta)+\omega^2A\sin(pt-\theta)=f\sin pt$$

$$=f\ \sin\{(pt-\theta)+\theta\}$$

$$A(\omega^2-p^2)\sin(pt-\theta)+2bAp\cos(pt-\theta)$$

$$=f\ \sin(pt-\theta)\cos\ \theta\ +\ f\ \cos\ (pt-\theta)\sin\ \theta\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

పై సమీకరణము కాలము 't' అన్ని విలువలకు తృప్తిపరిచిన పై సమీకరణములో $\sin(pt-\theta)$ మరియు $\cos(pt-\theta)$ గుణాంకములు విడివిడిగా సమానముగా యుండును. (6)వ సమీకరణములో $\sin(pt-\theta)$ గుణాంకములను పోల్చిన

$$A\left(\omega^2 - p^2\right) = f\cos\theta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

అదే విధముగా $\cos(pt-\theta)$ గుణాంకములను పోల్చిన

$$2bAp = f\sin\theta \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

(7) మరియు (8) సమీకరణములను వర్గము చేసి కలిపిన

$$A^2\left\{\left(\omega^2 - p^2\right) + 4b^2p^2\right\} = f^2$$

$$A^2 = \frac{f^2}{\left(\omega^2 - p^2\right)^2 + 4b^2p^2}$$

లేక
$$A = \frac{f}{\sqrt{\left(\omega^2 - p^2\right)^2 + 4b^2p^2}} \cdots\cdots\cdots(9)$$

(8)వ సమీకరణమును (7)తో భాగించిన

$$\tan\theta = \frac{2bp}{\left(\omega^2 - p^2\right)} \cdots\cdots\cdots(10)$$

(9) నుండి A విలువను (3)లో ప్రతిక్షేపించిన

$$x = \frac{f}{\sqrt{\left(\omega^2 - p^2\right) + 4b^2p^2}}\sin\left(pt-\theta\right) \cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

కంపన పరిమితి (A), p మరియు ωల సాపేక్ష విలువల పై ఆధారపడును. p, ωల సాపేక్ష విలువలు (3) విధములుగా యుండును.

case (i) :- $p << \omega$ అయిన (9) నుండి

$$A = \frac{f}{\sqrt{\left(\omega^2 - p^2\right)^2 + 4b^2p^2}}$$

$\simeq \dfrac{f}{\omega^2} =$ స్థిరరాశి మరియు (10) నుండి

$$\tan\theta = \frac{2bp}{\left(\omega^2 - p^2\right)} \simeq 0 \text{ or } \theta = 0$$

కంపన పరిమితి చోదిత బల పౌనఃపున్యము పై ఆధారపడదు. స్థిరముగా యుండును మరియు చోదిత బల కంపన పరిమితి మరియు బల స్థిరాంకము μ పై ఆధారపడును. స్థానభ్రంశము (x), చోదిత బలము ఒకే దిశలో యుండును.

case (ii) : $p >> \omega$ అయిన (9) నుండి

$$A = \frac{f}{\sqrt{p^4 + 4b^2p^2}} \simeq \frac{f}{p^2} = \frac{F}{mp^2}$$

కంపన పరిమితి కనిష్ఠమగును. మరియు (10) నుండి

$$\tan\theta = \frac{2bp}{\omega^2 - p^2} = -\frac{2b}{p}$$

$\frac{2b}{p} \to 0$ కావున

$$\theta = \pi$$

స్థానభ్రంశము x మరియు చోదిత బలము దాదాపు వ్యతిరేక దశలో యుండును.

case (iii) : $p = \omega$ (9) నుండి

$$A = \frac{f}{2bp} = \frac{F}{r\omega}$$

$$\left\{ \because f = \frac{F}{m}\ ;\ 2b = \frac{r}{m} \text{ మరియు } p = \omega \right\}$$

కావున కంపన పరిమితి గరిష్టముగా యుండును. కంపన పరిమితి రోధక బలము నియంత్రించును. మరియు (10) నుండి

$\tan\theta = \frac{bp}{0} = \alpha$ లేక $\theta = \frac{\pi}{2}$ కావున స్థానభ్రంశము, చోదిత బలమునకు $\frac{\pi}{2}$ కోణము వెనుకబడి (lags behind) యుండును. ఈ స్థితినే అనునాద స్థితి అందురు. అనునాద స్థితిలో డోలకము సహజ పౌనఃపున్యము చోదిత బల పౌనఃపున్యమునకు సమానము.

9.7 కంపన పరిమితి - అనునాదము

సరళ హరాత్మక డోలకము కంపన పరిమితి చోదిత బల పౌనఃపున్యము పై ఆధారపడి యుండి, ఒక పౌనఃపున్యము వద్ద కంపన పరిమితి గరిష్ఠమగును. ఆ దృగ్విషయమునే కంపన పరిమితి అనునాదము అందురు.

బలాత్కృత కంపనాలలో కంపన పరిమితి

$$A = \frac{f}{\sqrt{\left(\omega^2 - p^2\right)^2 + 4b^2p^2}} \cdots\cdots(1)$$ అని తెలియును.

కంపన పరిమితి గరిష్టమగుటకు హారము $\sqrt{\left(\omega^2-p^2\right)^2+4b^2p^2}$ కనిష్టము కావలెను. ఇది కనిష్టము కావలెనన్న మొదటి అవకలన గుణకము శూన్యమగును.

$$\frac{d}{dt}\left\{\left(\omega^2-p^2\right)^2+4b^2p^2\right\}=0$$

$$2\left(\omega^2-p^2\right)(-2p)+4b^2 2p=0$$

$$\left(\omega^2-p^2\right)-2b^2=0$$

$$\omega^2-p^2=2b^2$$

లేక $p=\sqrt{\omega^2-2b^2}\,\cdots\cdots\cdots(2)$

చోదిత పౌనఃపున్యము $\left(\frac{P}{2\pi}\right)$, $\sqrt{\frac{\omega^2-2b^2}{2\pi}}$ కి సమానమయినపుడు కంపన పరిమితి అనునాదము ఏర్పడును. అవరోధము కనిష్టమయిన $(b=0)$.

$P=\omega$ సమానమయినపుడు కంపన పరిమితి అనునాదము ఏర్పడును. అనగా చోదిత బల పౌనఃపున్యము, డోలకము సహజ పౌనఃపున్యమునకు సమానముగా యున్నపుడు కంపన పరిమితి అనునాదము ఏర్పడును. అనునాద స్థితిలో కంపన పరిమితి గరిష్ఠ విలువ (1), (2) సమీకరణముల నుండి

$$A_{max}=\frac{f}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega^2+2b^2\right)^2+4b^2\left(\omega^2-2b^2\right)}}$$

$$=\frac{f}{\sqrt{4b^2\omega^2-4b^4}}=\frac{f}{2b\sqrt{\omega^2-b^2}}$$

లేక $$A_{max}=\frac{f}{2b\sqrt{p^2+b^2}} \qquad \left(\because p^2=\omega^2-2b^2\right)$$

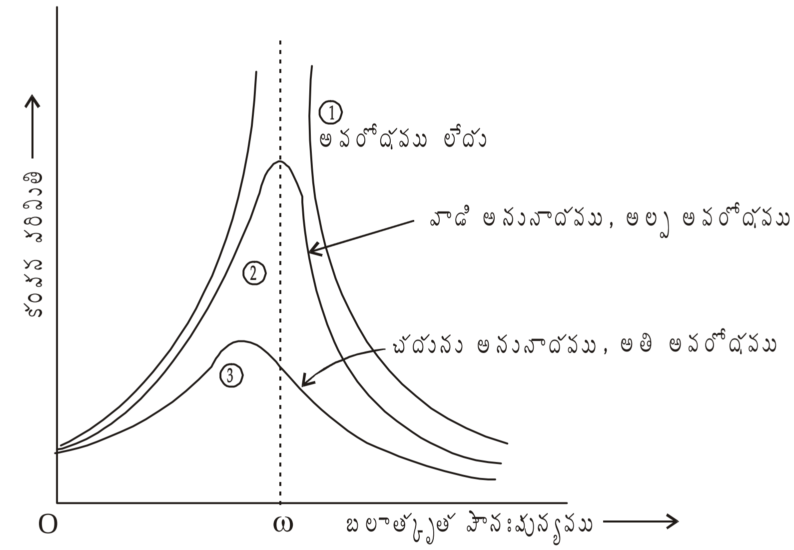
అవరోధము అతి తక్కువయిన

$$A_{max}=\frac{f}{2bp}$$

కావున $p\to 0$ అయిన కంపన పరిమితి A అనంతమగును.

9.8 అనునాద నైశిత్యము

చోదిత బలము కోణీయ పౌనఃపున్యమునకు, హరాత్మక డోలకము కంపన పరిమితికి గ్రాఫు గీచిన పటము9.2లో వలే అనువాద వక్రము ఏర్పడును.



పటము 9.2

అవరోధము శూన్యమయినపుడు అనునాద స్థితిలో కంపన పరిమితి అనంతమగును. చోదిత బల పౌనఃపున్యము $(\omega = \omega_0)$కి తక్కువయిన లేక ఎక్కువయిన కంపన పరిమితి తగ్గును. అవరోధము తక్కువగా యున్నపుడు చోదిత బల పౌనఃపున్య అనునాద పౌనఃపున్యమునకు కొంత తగ్గిన లేక పెరిగిన కంపన పరిమితి. వక్రము (2)లో వలే చాలా ఎక్కువగా యుండును. ఈ స్థితినే వాడి అనునాదము(Sharp Resonance) అందురు. చోదిత బలము ఎక్కువగా యున్నపుడు ఈ మార్పు చాలా తక్కువగా యుండి వక్రము (3)లో వలే చదునుగా యుండును. దీనిని చదును అనునాదము(Flat Resonance) అందురు.

9.9 వేగము-అనునాదము

బలాత్కృత కంపనాలలో డోలక వేగము పౌనఃపున్యముతో మారుతూ గరిష్ట విలువను పొందును. దీనినే వేగము అనునాదము అందురు. వేగ అనునాద స్థితిలో గరిష్ఠ వేగమునకు సమీకరణము రాబట్టవచ్చును. బలాత్కృత కంపనాలలో డోలక స్థానభ్రంశము

$$x = \frac{f}{\sqrt{\left(\omega^2 - p^2\right)^2 + 4b^2p^2}} \sin\left(pt - \theta\right) \text{ అని తెలుసు}$$

సహజ కోణీయ పౌనఃపున్యము ω, m ద్రవ్యరాశి గల డోలకము పై ఆవర్తన చోదిత బలము $F \sin pt$ చర్య జరుపు చున్నది.

వేగము $U = \frac{dx}{dt} = \frac{fP}{\sqrt{\left(\omega^2 - p^2\right)^2 + 4b^2p^2}} \cos\left(pt - \theta\right)$

$\cos\left(pt - \theta\right)$ గరిష్ఠమయినపుడు అనగా $\cos\left(pt - \theta\right) = 1$ వేగము గరిష్టముగా యుండును.

అనగా $U_{max} = \frac{fp}{\sqrt{\left(\omega^2 - p^2\right)^2 + 4b^2p^2}}$

$$U_{max} = \frac{f}{\sqrt{\left(\frac{\omega^2 - p^2}{p}\right)^2 + 4b^2}}$$

U_{max} విలువ పై సమీకరణములో హారము విలువ కనిష్టమయినపుడు గరిష్ఠమగును.

అనగా $\omega = p$ అనగా అనునాద స్థితిలో వేగము గరిష్ట విలువ అత్యధికముగా యుండి వేగము అనునాద స్థితిలో యుండును. అనునాద స్థితిలో గరిష్ట వేగము

$U_{max} = \frac{f}{\sqrt{4b^2}}$ అనగా అనునాద వేగము విలువ అవరోధము పై ఆధారపడును.

9.10 సారాంశము

అవరుద్ధ డోలకము కంపన పరిమితి క్రమముగా తగ్గును. అవరోధము తక్కువగా యున్నపుడు మాత్రమే డోలనములు చేయును. శక్తి నష్టము జరుగును. చోదిత బల ప్రయోగముతో అవరుద్ధ డోలకమును కంపనములు చేయవచ్చును. డోలకము యొక్క కంపన పరిమితి బల పౌనఃపున్యము డోలక సహజ పౌనఃపున్యమునకు సమానమయినపుడు కంపన పరిమితి గరిష్టముగా యుండును. దీనినే అనునాద స్థితి అందురు. అనునాద స్థితిలో కంపన పరిమితి కేవలము అవరోధ బలము నియంత్రించును. అనునాద స్థితిలో చోదిత బలము నుండి డోలకమునకు శక్తి మార్పిడి గరిష్టముగా యుండును.

9.11 కీలక పదములు

అవరుద్ధ హరాత్మక డోలకము, అవరోధము, సందిగ్ధ అవరోధము, అవమందన సవరణ, రిలాక్సేషన్ కాలము, గుణ భాజకము, అనునాదము, బలాత్కృత కంపనాలు, కంపన పరిమితి, అనునాదము, వేగము - అనునాదము, అనునాద వక్రము, అనునాద నైశిత్యము, వాడి అనునాదము, చదును అనునాదము.

9.12 సాధించిన సమస్యలు

1. ఒక సెకన్ల లోలకము కంపన పరిమితి 150 సెకనులలో సగమునకు తగ్గెను. అయిన Q గుణకమును లెక్కింపుము.

సాధన $\frac{a}{a_0}=\frac{1}{2}$; $T=2$ సెకనులు, $t=150$ సె॥

కాని $a=a_0e^{-bt}$ లేక $\frac{a_0}{2}=a_0e^{-bt}$

లేక $+2^{-1}=e^{-bt}$

$\log_e 2=bt$

$$b=\frac{\log_e 2}{t}=\frac{0.6931}{150}=0.00462$$

కాని Q గుణకము $=\tau\omega$

కాని రిలాక్సేషన్ కాలము $\tau=\frac{1}{2b}=\frac{1}{2\times 0.00462}$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2}=\pi$$

$$\therefore Q=\frac{\pi}{2\times 0.00462}=340$$

2. ఒక డోలకము శూన్యము నుండి ప్రారంభించి ఒక వైపు 3 సెం॥మీ॥ గరిష్ఠ కంపన పరిమితి పొందెను. కాని 50 డోలకముల పిమ్మట అదే వైపు కంపన పరిమితి 0.3 సెం॥మీ॥కి తగ్గెను. డోలనావర్తన కాలము 2.3026 సెకన్లు అయిన మొదటి గరిష్ఠ కంపన పరిమితికి అవరోధ సవరణ ఎంత?

సాధన : a_1 మరియు a_{n+1} మొదటి మరియు a_{n+1} డోలకముల తరువాత కంపన పరిమితి సూచించిన

$\frac{a_1}{a_{n+1}}=d^{2n}$ కాని $a_1=3$ సెం॥మీ॥

$a_{n+1}=0.3$ సెం॥మీ॥

$$\frac{3}{0.3}=d^{2\times 50}=d^{100}$$

$$d^{100}=10$$

$d=(10)^{1/100}$, λ సంవర్గమాన డిక్రిమెంటు అయిన

$$\lambda=\log_e d=\frac{1}{100}\times 2.3026\times\log 10$$

$$= 0.023026$$

సవరించిన మొదటి కంపన పరిమితి $= a_1\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)$

$$= 3\left(1+\frac{0.023026}{2}\right)$$

$$= 3.0345 \text{ సెం॥మీ॥}$$

3. అల్ప అవరోధ స్థితిలో ఒక డోలకము కంపన పరిమితి 100 డోలనముల తరువాత $\frac{1}{10}$వ వంతుకు తగ్గెను. ఆవర్తన కాలము 2 సెకనులయిన (1) అవరోధ స్థిరాంకము (2) అవమందన గుణకమును లెక్కించుము.

సాధన T = 2 సెకనులు, డోలనముల సంఖ్య = 100, కాల వ్యవధి $t = 100 \times 2 = 200$ సెకనులు.

కాని $a = a_0 e^{-bt}$ $\qquad a/a_0 = \frac{1}{10}$

$\therefore \frac{1}{10} = e^{-b\times 200}$ లేక $e^{200b} = 10$

$2.3026 \ \log 10 = 200b \qquad (\because \log 10 = 1)$

$b = \frac{2.3026}{200} = 0.00116$

కాని అవమందన గుణకము $= \frac{1}{k} = \frac{1}{0.00116} = 87$ సెకనులు

4. అవరోధ సరళహరాత్మక డోలకము పౌనఃపున్యము $\omega^2 = \frac{\omega^2 - b^2}{4m^2}$ అని తెలియును. కాని $\omega = 8.1\times 10^9\,\text{Hz}$ మరియు $\omega_0 = 10^5$ మరియు $m = 10^{-4}$ కి॥గ్రా॥ అయిన స్టిఫ్‌నెస్ స్థిరాంకము మరియు అవరోధ స్థిరాంకమును లెక్కించుము.

సాధన స్టిఫ్‌నెస్ స్థిరాంకము $= m\omega^2$

$$= 10^{-4}\times 8.1\times 10^9$$

$$= 8.1\times 10^5$$

కాని $\omega^2 = \frac{\omega_0^2 - b^2}{4m^2}$

$$8.1\times10^{9}=\frac{\left(10^{5}\right)^{2}-K^{2}}{4\times10^{-8}}$$

లేక $K^{2}=10^{10}-8.1\times4\times10$

$$K=\sqrt{10^{10}-324}=316227$$

5. 10 గ్రాముల ద్రవ్యరాశి గల డోలక గోళమును 2 సెం॥ మీ॥ స్థానభ్రంశము చెందించి వదలబడినది. ఘర్షణ బలము 5×10^{-3} న్యూ/మీ/సె మరియు పునఃస్థాపక బలము 30×10^{-3} న్యూ/మీ॥ అయిన దాని గమనము డోలనాత్మకముగా యుండునా? డోలనాత్మకమయిన ఆవర్తన కాలమెంత?

సాధన $r=5\times10^{-3},\ m=10gm=10\times10^{-3}$ కి॥గ్రా॥

కణము ద్వితీయ ఘాతక అవకలన సమీకరణము

$$\frac{d^{2}x}{dt^{2}}+2b\frac{dx}{dt}+\omega^{2}x=0$$

$b<\omega$ అయిన డోలనములు చేయును

$$2b=\frac{r}{m}\quad\text{or}\quad b=\frac{r}{2m}=\frac{5\times10^{-3}}{2\times10\times10^{-3}}=0.25$$

మరియు $\omega=\sqrt{\frac{\mu}{m}}=\sqrt{\frac{30\times10^{-3}}{10\times10^{-3}}}=1.732$

$b<\omega$ కావున డోలనములు చేయును.

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega^{2}-K^{2}}}=\frac{2\pi}{\sqrt{(1.732)^{2}-(0.25)^{2}}}$$

$$=\frac{2\pi}{\sqrt{3-0.0625}}=\frac{2\pi}{\sqrt{2.935}}$$ సెకనులు

6. స్ప్రింగు చివర 0.3 కి॥గ్రా॥ ద్రవ్యరాశి గల కంపన వ్యవస్థ గుణ భాజకము 60. కంపన పౌనఃపున్యము $2Hz$ అయిన బల స్థిరాంకము మరియు యాంత్రిక నిరోధము ఎంత?

సాధన $n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$ $\qquad n=2Hz\ ; m=0.3$ కి॥గ్రా॥

$2=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{0.3}}$ లేక $4=\frac{1}{4\pi^{2}}\frac{K}{0.3}$

$$K = 16\pi^2 \times 0.3 = 47.366\ N/met$$

$Q = 60$ కాని

$$Q = \omega\tau = \frac{\omega}{2b} = \frac{\omega m}{r}$$

$$r = \frac{\omega m}{Q} = \frac{2\pi n m}{Q} = \frac{(2\pi)(2)(\cdot 3)}{60}$$

$= 0.06282$ కి॥గ్రా/మీటరు.

7. కంపన వ్యవస్థ అవకలన సమీకరణము

$$\frac{d^2x}{dt} + 2b\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

అయిన వ్యవస్థ శక్తి $1/e$ కి తగ్గుటకు పట్టు కాలమెంత?

సాధన $E = E_0 e^{-2bt}$

కాని $E = \frac{E_0}{e}$

$$\therefore \frac{E_0}{e} = E_0 e^{-2bt} \quad \text{or} \quad e^{-1} = e^{-2bt}$$

$2bt = 1$ or $t = \frac{1}{2b}$ సెకనులు.

8. ఒక కంపన వ్యవస్థ అవకలన సమీకరణము $4\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + 32x = 0$ అయిన అల్ప అవరుద్ధ స్థితిలో, సందిగ్ధ అవరుద్ధ స్థితిలో మరియు అతి అవరుద్ధ స్థితిలో అవరుద్ధ స్థిరాంకము విలువల రేంజిని లెక్కింపుము.

సాధన అవకలన సమీకరణము

$$4\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + 32x = 0$$

లేక $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{4}\frac{dx}{dt} + 8x = 0$$

కాని సామాన్య అవకలన సమీకరణము

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

$\omega^2 = 8$ లేక $\omega = 2\sqrt{2}$

కాని $\omega^2 = \frac{S}{m} = \frac{S}{4}$

$\therefore$ అవరుద్ధ స్థిరాంకము $S = 4\omega^2 = 32$

(1) అల్ప అవరుద్ధ స్థితిలో $b < \omega$

$$\frac{r}{2m} < \sqrt{\frac{S}{m}}$$

$$r < 2\sqrt{Sm}$$

$$r < 16\sqrt{2}$$

(2) అతి అవరుద్ధ స్థితిలో $r > 16\sqrt{2}$

(3) సందిగ్ధ స్థితిలో $r = 16\sqrt{2}$

9.13 స్వయం సమీక్షా ప్రశ్నలు

లఘు ప్రశ్నలు

1. అవరుద్ధ కంపనములననేమి ?
2. అవరుద్ధ డోలకము యొక్క లాగరిథిమిక్ డిక్రిమెంట్‌ను వివరింపుము.
3. సరళ హరాత్మక డోలకము, అవరుద్ధ డోలకములననేమి?
4. రిలాక్సేషన్ కాలమననేమి? సమీకరణము రాబట్టుము.
5. సందిగ్ధ అవరోధమననేమి? వివరింపుము.
6. అవరుద్ధ నైశిత్యము అననేమి? Q గుణకమును వివరింపుము.
7. అనునాదము మరియు అనునాద నైశిత్యములు వివరింపుము.
8. వేగము - అనునాదమననేమి?
9. కంపన పరిమితి - అనునాదమననేమి ?
10. బలాత్కృత కంపనములననేమి?
11. అల్ప అవరోధ స్థితిలో సామర్థ్యపు నష్టము అవరోధ స్థిరాంకమునకు అనులోమానుపాతమని నిరూపించుము.

12. అనునాద వక్రమును గీచి, వాడి అనునాదము, చదును అనునాదమును వివరింపుము. అవరోధము పెరిగిన అనునాద పౌనఃపున్యము ఏ విధముగా మారును.

వ్యాసరూప ప్రశ్నలు

1. అవరుద్ధ డోలనములననేమి? అవరుద్ధ డోలకము చలనమునకు అవకలన సమీకరణము నేర్పరచి, సాధింపుము. సాధనలోని వివిధ స్థితుల విశ్లేషణ చేయుము.

2. అవరుద్ధ డోలకము చలన సిద్ధాంతమును వివరింపుము. అతిరోధకము అల్పరోధకము, సందిగ్ధ రోధక స్థితుల విశ్లేషణ చేయుము.

3. బలాత్కృత కంపనాల సిద్ధాంతమును వివరింపుము. గుణ భాజక గుణకము అననేమి?

4. బలాత్కృత కంపనములననేమి? డోలకము కంపన పరిమితికి సమీకరణము రాబట్టుము. అనునాదము మరియు గుణ భాజక గుణకమును వివరింపుము.

5. బలాత్కృత కంపన ప్రభావమున చలించే హరాత్మక డోలకము చలనమునకు సమీకరణములనేర్పరచి సాధించుము. వేగము - అనునాదము కంపన పరిమితి అనునాదములను వివరింపుము.

అభ్యాసము

1. ఒక శృతి దండము గుణ భాజక (Q) గుణకము 5×10^4 శృతి దండము పౌనఃపున్యము 300Hz. శృతి దండము శక్తి తొలి శక్తిలో $\frac{1}{10}$ కి తగ్గడానికి పట్టుకాలము లెక్కింపుము. (జు॥ 61 సె॥)

2. సోనా మీటరు తీగ గుణభాజక గుణకము 2×10^3 లాగి వదిలిన సెకనుకు 240 కంపనములు చేయును. కంపన పరిమితి తొలి విలువలో $\frac{1}{e^2}$ కి తగ్గుటకు పట్టు కాలమెంత ? (జు॥ 5.3 సె॥)

3. సరళ హరాత్మక డోలకము ప్రారంభ శక్తి 200 జౌళ్ళు. దాని అవరుద్ధ స్థిరాంకము $S=\frac{r}{m}=10/\text{sec}$ దాని సహజ పౌనఃపున్యము 200Hz శక్తి 50 జౌళ్లుకు తగ్గుటకు ఎన్ని డోలనములు చేయును. (జు॥ 28 కంపనము)

4. ఒక స్ప్రింగు చివర 0.3 కి॥గ్రా వ్రేలాడదీసినపుడు దాని Q విలువ 60. సెకనుకు 2 కంపనములు చేయును. బల స్థిరాంకము (k) మరియు యాంత్రిక నిరోధమును లెక్కింపుము.

(జు॥ $47.3\,\text{Nm}^{-1}, 0.0628\,\text{Kg}\,5^{-1}$)

5. $200\,\text{Hz}$ పౌనఃపున్యముతో కంపించే డోలకము కంపన పరిమితి 2000 డోలనములకు తొలి విలువలో $\left(\frac{1}{10}\right)$

వంతు అయినది. అయిన రిలాక్సేన్ కాలము గుణభాజక గుణకము మరియు శక్తి తొలి విలువలో $\left(\frac{1}{10}\right)$వ వంతుకు తగ్గడానికి పట్టుకాలమును లెక్కింపుము. (జ॥ 4.3185, 2731.5 సె॥)

6. ఒక సెకన్ల లోలకము కంపన పరిమితి 150 సెకనుల కాలములో సగమునకు తగ్గినది. అయిన Q గుణ భాజకము విలువ లెక్కింపుము. (జ॥ 429.9)

9.14 చదువదగిన గ్రంథాలు :-

1. Telugu Academy Publications (భౌతికశాస్త్రము మొదటి సంవత్సరము)
2. Waves and Oscillations by Badami, V. Bala Subramanian, K. Rami Reddy
3. Waves and Oscillations - Mittal, Anand

ప్రయోగము సంఖ్య - 9

మెల్డ్ ప్రయోగము

ఉద్దేశము : శ్రుతిదండము లేదా కంపించే దండము యొక్క పౌనఃపున్యమును మెల్డ్ అమరిక వాడుక చేసి కనుక్కోవడం.

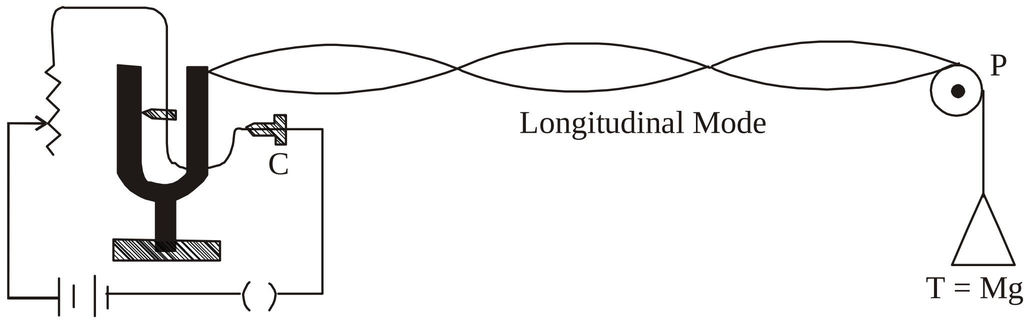
పరికరాలు : విద్యుత్ సహాయంతో నిరవధికంగా కంపనాలు చేసేటటువంటి శ్రుతిదండము లేదా కంపకము, కుట్టుదారం, చిన్న తేలికైన పళ్ళెము, తూనికలపెట్టె, ఘర్షణ లేని నున్నని కప్పీ, ఒక స్టాండు, బ్యాటరీ, విద్యుద్వలయం, పూర్తి చేయుటకు కావలసిన రాగి తీగలు.

వర్ణన : భారమైన పీఠముపై అమరిన తక్కువ పౌనఃపున్యము గల శ్రుతిదండము ఈ పరికరములో ఉంటుంది. శ్రుతిదండము రెండు దండాల మధ్య దానిని తాకకుండా ఒక విద్యుదయస్కాంతములో అమరి వుంటుంది. ఒక దండానికి తేలికైన స్ప్రింగ్ అతికించబడి వుంటుంది. విద్యుదయస్కాంతములోని తీగచుట్టూ ఒక బ్యాటరీకి రియోస్టాట్ ప్లగ్‌కి కలపబడి వుంటుంది. వలయం సంవృతమై ఉన్నపుడు విద్యుదయస్కాంతము శక్తి పూరితమైన రెండు దండాలను దగ్గరగా లాగుతుంది. అప్పుడు స్ప్రింగ్ వలయం నుండి దూరమవుట వలన ఒక క్షణంపాటు విద్యుత్ప్రవాహము ఆగిపోతుంది. అప్పుడు దండాలు వాటి యథాస్థానాన్ని చేరుతాయి. అపుడు స్ప్రింగ్ వలయానికి దగ్గరయి వలయం సంవృతమవుతుంది. ఇది తిరిగి, తిరిగి జరుగుతుంది. ఈ విధంగా శ్రుతిదండము లేదా కంపకము నిరంతరము కంపనాలు చేస్తుంది.

కుట్టుదారం ఒక చివర ఒక దండానికి ముడివేసి, దారాన్ని కప్పీ గుండా పంపి స్వేచ్ఛగా ఉన్న చివర చిన్న పళ్ళెము ఉంటుంది. దారం క్షితిజ సమాంతరంగా ఉంచాలి.

ప్రయోగపద్ధతి :

ఒకటవ పద్ధతి : దారానికి సమాంతరంగా దండము కంపించునట్లు అనుదైర్ఘ్య పద్ధతిలో పరికరాన్ని అమర్చామను కుందాము. దారం క్షితిజ సమాంతరంగా ఉంచాలి. పళ్ళెములో కొద్ది భారాన్ని ఉంచాలి. వలయం సంవృతము గావింపబడాలి. కప్పీని యిటూ, అటూ కొద్దిగా జరిపి దారం పొడవుని సరిచేయవలెను. అవసరమయితే పళ్ళెములోని భారం కూడా మార్చాలి. అపుడు దారము అనేకమైన స్పష్టంగా ఉన్న లూపులుగా విభజింపబడుతుంది. బాగా స్పష్టంగా ఉంటూ చివరలయందు ఉన్న రెండు అస్పందన స్థానాల మధ్య దూరాన్ని కొలవాలి (ℓ). ఆ దూరంలో లూపుల సంఖ్య 'P' అయితే, దారం పౌనః పున్యము $n = \frac{P}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{m}}$. దారం రేఖీయసాంద్రత m కనుగొనాలి. 10 మీటర్ల పొడవు గల దారం ద్రవ్యరాశి 'm'' కనుగొంటే $m = \frac{m'}{1000}$ గ్రా/సెం.మీ. ఈ ప్రయోగాన్ని వేరు వేరు తన్యతలకు మళ్ళీ మళ్ళీ చేయాలి.



పరిశీలనలు :

క్రమ సంఖ్య	పళ్ళెములో భారం Mg	తన్యత $(M+P)g$	లూపుల సంఖ్య P	లూపుల మొత్తం పొడవు (ℓ)	శృతిదండం పౌనఃపున్యం $(n) = \frac{P}{\ell}\sqrt{\frac{T}{m}}$

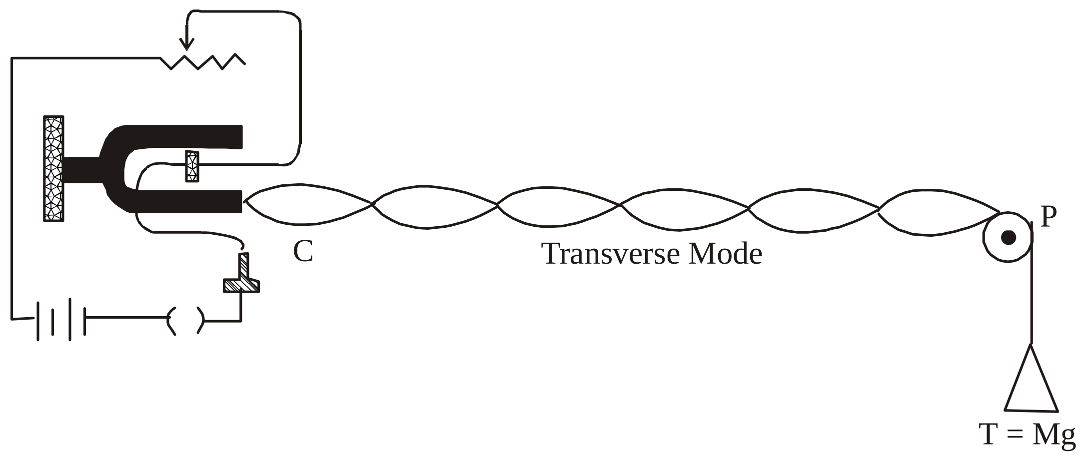
n సగటు విలువ కనుగొనాలి. అపుడు శ్రుతిదండము పౌనఃపున్యము $n = \frac{P}{\ell}\sqrt{\frac{T}{m}}$.

రెండవ పద్ధతి : తిర్యక్ పద్ధతిలో పరికరాన్ని అమర్చి, పైన చేసినట్లే తిరిగి ప్రయోగము చేయాలి. పై పద్ధతిలో వలే లూపులు అంత స్ఫూటంగా ఉండవు. రీడింగులను పట్టికలో వేయాలి.

n యొక్క సగటు విలువ కనుగొనాలి. అప్పుడు శ్రుతిదండము పౌనఃపున్యము $n = \frac{P}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{m}}$.

రెండు పద్ధతులలోను వచ్చిన రెండు విలువలు సమానంగా, తక్కువ ప్రయోగదోషములు కలిగిఉండాలి.

పరిశీలనలు :



క్రమ సంఖ్య	పళ్ళెములో భారం Mg	తన్యత $(M+P)g$	లూపుల సంఖ్య P	లూపుల మొత్తం పొడవు (ℓ)	శృతిదండం పౌనఃపున్యం $(n) = \frac{P}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{m}}$

తీసుకోవలసిన జాగ్రత్తలు :

1. లూపులు స్ఫూటంగా ఉండాలి.
2. ఏ తలంలో దారం కంపనం చెందుతుందో ఆ తలం నిలువుతలం కావాలి.
3. లూపులను లెక్కించుటలో బాగా చివరలయందున్న లూపులను లెక్కలోనికి తీసుకోరాదు.

యూనిట్ - 3

పాఠము - 10

సంశ్లిష్ట కంపనములు

ఉద్దేశాలు

- పురియే సిద్ధాంత అవగాహన మరియు అందులోని స్థిరాంకములను కనుగొనుట.
- పురియే సిద్ధాంతమును, సంశ్లిష్ట తరంగాలయిన చదును తరంగము, Squarewave), రంపపు పన్ను (Saw Tootrwave), త్రిభుజ తరంగాల (Triangular Wave) లలోని అంశతరంగాల విశ్లేషణ చేయుట.

విషయసూచిక

10.1 పరిచయము :

సంశ్లిష్ట కంపనాలు ఉదా॥ వయోలిన్, వీణ వంటి సాధనముల నుంచి వెలువడు తరంగాలు అనేక సరళ హరాత్మక కంపనాల రేఖీయ సంయోగ ఫలితము. సంశ్లిష్ట కంపనాలలోని అంశాల విశ్లేషణకు పురియే గణితాత్మక సిద్ధాంతమునుపయోగించవచ్చును.

10.2 పురియే సిద్ధాంతము

సంశ్లిష్ట తరంగాలలోని సరళ హరాత్మక తరంగాల సంఖ్య, వాటి పౌనః పున్యములు, కంపన పరిమితుల విశ్లేషణకు పురియే శాస్త్రవేత్త ఏర్పరచిన గణితాత్మక సిద్ధాంతము పురియే సిద్ధాంతము.

నిర్వచనము : ఏకైక విలువ గల (Single Valued) అంతము ఉండే (Finite), అవిచ్ఛిన్న సంశ్లిష్ట ఆవర్తన ప్రమేయము (Continuous Complex Periodic Function)ను, అందులోని అనంతముగా యుండే సరళ హరాత్మక ప్రమేయాల మొత్తముగా వ్రాయవచ్చును.

ఈ అంశ ప్రమేయపు పౌనఃపున్యములు, సంశ్లిష్ట ప్రమేయపు పౌనఃపున్యము సంపూర్ణ గుణిజములుగా యుండును. ఫురియే సిద్ధాంతమును గణితాత్మకముగా క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును.

$$y = f(\omega t) = A_0 + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + A_3 \cos 3\omega t + \cdots\cdots$$

$$+A_r \cos r\omega t + \cdots\cdots\cdots + B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + \cdots\cdots + B_r \sin r\omega t + \cdots\cdots\cdots$$

లేక $$\therefore y = A_0 + \sum_{r=1}^{\infty} \left(A_r \cos r\omega t + B_r \sin r\omega t \right) \text{ ----------- (1)}$$

$y = f(\omega t)$, ω కోణీయ పౌనఃపున్యము సంశ్లిష్ట ఆవర్తన చలనపు స్థానభ్రంశమును సూచించును. $A_1, A_2, \cdots\cdots A_r;\ B_1, B_2, \cdots\cdots, B_r \cdots\cdots$ లు స్థిరాంకములు. A_0 స్థిరాంకము, చలనపు అక్షము, కాలము అక్షముపరంగా యుండే స్థానభ్రంశమును సూచించును.

A_0 విలువ కనుగొనుట :- A_0 గుణకమును కనుగొనుటకు (1)వ సమీకరణమును $t = 0$ మరియు $t = T$ అవధుల మధ్య సమాకలనము చేసిన, (T ఆవర్తన కాలము)

$$\therefore \int_0^T f(\omega t)\,dt = A_0 \int_0^T dt + A_1 \int_0^T \cos \omega t dt + A_2 \int_0^T \cos 2\omega t dt + \cdots\cdots\cdots + Ar \int_0^T \cos r\omega t \, dt \; +$$

$$+B_1 \int_0^T \sin \omega t \; dt + B_2 \int_0^T \sin 2\omega t \; dt \; + \cdots\cdots\cdots + B_r \int_0^T \text{Sin}\, r\,\omega t dt$$

$$= AoT$$

(సమీకరణము కుడివైపు మొదటి పదం తప్ప మిగిలినవన్ని పదములు శూన్యమగునని తెలియును)

$$\boxed{\therefore A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(\omega t)\,dt} \text{ ------------- (a)}$$

A_r గుణకము నిర్ణయించుట :- ఇందులకు (1)వ సమీకరణమును $\cos r\omega t\, dt$ తో గుణించి, $t = 0$ మరియు $t = T$ అవధుల మధ్య సమాకలనము చేసిన

$$\int_0^T f(\omega t) \cos r\omega t \, dt = A_0 \int_0^T \cos r\omega t \; dt + A_1 \int_0^T \cos \omega t \; \cos r\omega t dt + \cdots\cdots\cdots$$

$$+A_r \int_0^T \cos^2 r\omega t \, dt + \cdots\cdots\cdots + \int_0^T \sin \omega t \cos r\omega t dt + \cdots\cdots\cdots + B_r \int_0^T \sin r\omega t \cos r\omega t \; dt$$

$$= A_r \int_0^T \cos^2 r\omega t \ dt$$

మిగిలిన సమాకలనములు శూన్యమగును.

$$= A_r \int_0^T \left[\frac{1+\cos 2r\omega t}{2}\right] dt$$

$$= \frac{A_r}{2}\left[t + \frac{\sin 2r\omega t}{2r\omega}\right]_0^T = \frac{A_r}{2}\left[T+0\right]$$

$$\therefore \int_0^T f(\omega t)\cos r\omega t \, dt = A_r\left(\frac{T}{2}\right)$$

లేక $$\boxed{\therefore A_r = \frac{2}{T}\int_0^T f(\omega t)\cos r\omega t \, dt}$$ ------------ (b)

B_r **గుణకము నిర్ణయించుట :-** ఇందులకు (1)వ సమీకరణమును $'\mathrm{Sin}\ r\ \omega t'$ రెండు వైపులా గుణించి $t = 0$ మరియు $t = T$, అవధుల మధ్య సమాకలనము చేసిన

$$\int_0^T f(\omega t)\sin r\omega t \ dt = A_0\int_0^T \sin r\omega t \, dt + \cdots\cdots + A_1\int_0^T \cos\ \omega t \sin r\,\omega t \, dt +$$

$$+ A_r\int_0^T \cos r\,\omega t \sin r\,\omega t \, dt + \cdots\cdots\cdots\cdots + B_1\int_0^T \sin \omega t \sin r\,\omega t \, dt \ + B_r\int_0^T \sin^2\ r\ \omega t \, dt$$

$$= B_r \int_0^T \left[\frac{1-\cos 2r\omega t}{2}\right] dt$$

$$= \frac{B_r}{2}\left[t - \frac{\sin 2r\omega t}{2r\omega}\right]_0^T = \frac{B_r}{2}\left[T-0\right]$$

$$= \frac{B_r}{2}\cdot T$$

లేక $$\boxed{B_r = \frac{2}{T}\int_0^T f(\omega t)\sin r\omega t \ dt}$$ ------------- (c)

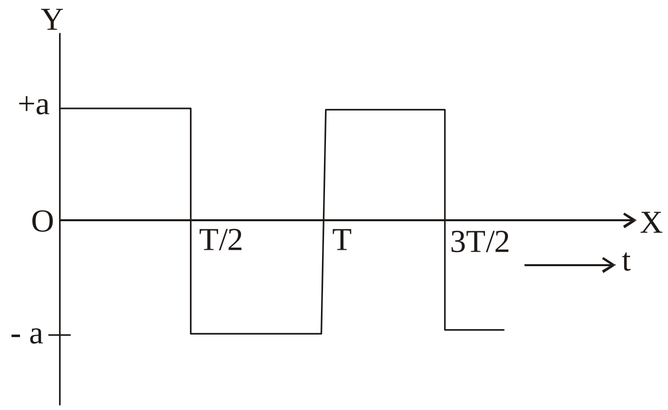
$r = 1, 2, 3, \cdots\cdots\cdots$ ప్రతిక్షేపించి $(a),(b),(c)$ సమీకరణముల నుండి $A_1, A_2, \cdots\cdots\cdots$ మరియు $B_1, B_2, \cdots\cdots$ గుణకములను నిర్ణయించవచ్చును.

ఫురియే సిద్ధాంతపు అవధులు :-

1. ప్రమేయము అంతము గలిగి యుండవలెను (Finite). అనగా స్థానభ్రంశము y విలువ ఎప్పటికి అనంతము కారాదు.
2. ప్రమేయము ఏకైక విలువ గలిగి యుండవలెను. అనగా ఒక క్షణమునందు ఒక స్థిర విలువ మాత్రము యుండవలెను.
3. ప్రమేయము అవిచ్ఛిన్నముగా యుండవలెను.

10.3 ఫురియే సిద్ధాంతము - చదును తరంగ విశ్లేషణ

ఒక చదును తరంగమును పటము 10.1 నందు చూపబడినది. స్థానభ్రంశము Y అక్షము వెంబడి, కాలము X అక్షము వెంబడి యున్నవి. ప్రమేయము $f(\omega t)$ విలువ $t=0$ మరియు $t=\frac{T}{2}$ కాలాల మధ్య స్థిర విలువ $'a'$ గలదు. ప్రమేయము విలువ $t=\frac{T}{2}$ మరియు $t=T$ కాలాల మధ్య స్థిర విలువ $'-a'$ గలదు. కావున ప్రమేయమును క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును.



పటము 10.1

$y = f(\omega t) = a$ $\quad$ $t=0$ నుండి $t={T}/{2}$ వరకు

$y = f(\omega t) = -a$ $\quad$ $t={T}/{2}$ నుండి $t=T$ వరకు

A_0, A_r, B_r లను క్రింది విధముగా కనుగొనవచ్చును.

A_0 **నిర్ణయించుట**

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} f(\omega t)\,dt + \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} f(\omega t)\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} (a)\,dt + \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} (-a)\,dt$$

$$= \frac{a}{T}[t]_0^{T/2} - \frac{a}{T}[t]_{T/2}^{T}$$

$$= \frac{a}{T}\left(\frac{T}{2}-0\right) - \frac{a}{T}\left(T-\frac{T}{2}\right) = \frac{a}{2}-\frac{a}{2}$$

$$= 0$$

$$\boxed{A_0 = 0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

కంపన అక్షము మూలబిందువు, కాలము అక్షముతో ఏకీభవించుటను సూచించును.

A_r నిర్ణయించుట :-

$$A_r = \int_0^T f(\omega t)\cos r\omega t\,dt$$ అని తెలియును.

$$= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} a\cos r\omega t\,dt + \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T} (-a)\cos r\omega t\,dt$$

$$= \frac{2a}{T}\left[\frac{\sin r\omega t}{r\omega}\right]_0^{T/2} - \frac{2a}{T}\left[\frac{\sin r\,\omega t}{r\omega}\right]_{\frac{T}{2}}^{T}$$

$$= \frac{2a}{r\omega T}\left[\sin\frac{r\omega T}{2}-0\right] - \frac{2a}{r\omega T}\left[\sin r\omega T - \sin\frac{r\omega T}{2}\right]$$

$$\therefore A_r = \frac{2a}{r\omega T}[0] = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \quad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right.$$ కావున $\left.\sin r\omega T = \sin 2r\pi = 0\right)$

కావున పురియే గుణకములు A_1, A_2, ...A_r లు శూన్యమగును.

B_r నిర్ణయించుట

$$B_r = \frac{2}{T}\int_0^T f(\omega t)\sin r\omega t\,dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} a \sin r\omega t \; dt + \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T} (-a) \sin r\omega t \; dt$$

$$= \frac{2a}{T}\left[\frac{-\cos r\omega t}{r\omega}\right]_{0}^{T/2} - \frac{2a}{T}\left[\frac{-\cos r\omega t}{r\omega}\right]_{T/2}^{T}$$

$$= \frac{2a}{r\omega T}\left[-\cos\frac{r\omega T}{2} + 1\right] - \frac{2a}{r\omega T}\left[-\cos r\omega T + \cos\frac{r\omega T}{2}\right]$$

$$= \frac{2a}{r 2\pi}\left[-\cos r\pi + 1 + \cos 2\pi r - \cos r\pi\right]$$

$$= \frac{a}{r\pi}\left[+2 - 2\cos r\pi\right] \qquad \because \omega = \frac{2\pi}{T}$$

r అన్ని పూర్ణాంక విలువలకు $\cos 2\pi r = 1$

కాని r విలువ సరి సంఖ్య అయిన $r = 2, 4, 6, \cdots\cdots, \cos r\pi = 1$

$$Br = \frac{a}{r\pi}\left[+2 - 2\right] = 0 \qquad (r \text{ సరి సంఖ్య అయినపుడు})$$

కాని r విలువ బేసి సంఖ్య అయిన $r = 1, 3, 5, \cdots\cdots\cdots\cos r\pi = -1$

కావున $Br = \frac{a}{r\pi}\left[+2 + 2\right] = \frac{4a}{r\pi} \cdots\cdots\cdots (3)$

కావున $B_1 = \frac{4a}{\pi}, \; B_3 = \frac{4a}{3\pi}, \; B_5 = \frac{4a}{5\pi} \cdots\cdots$

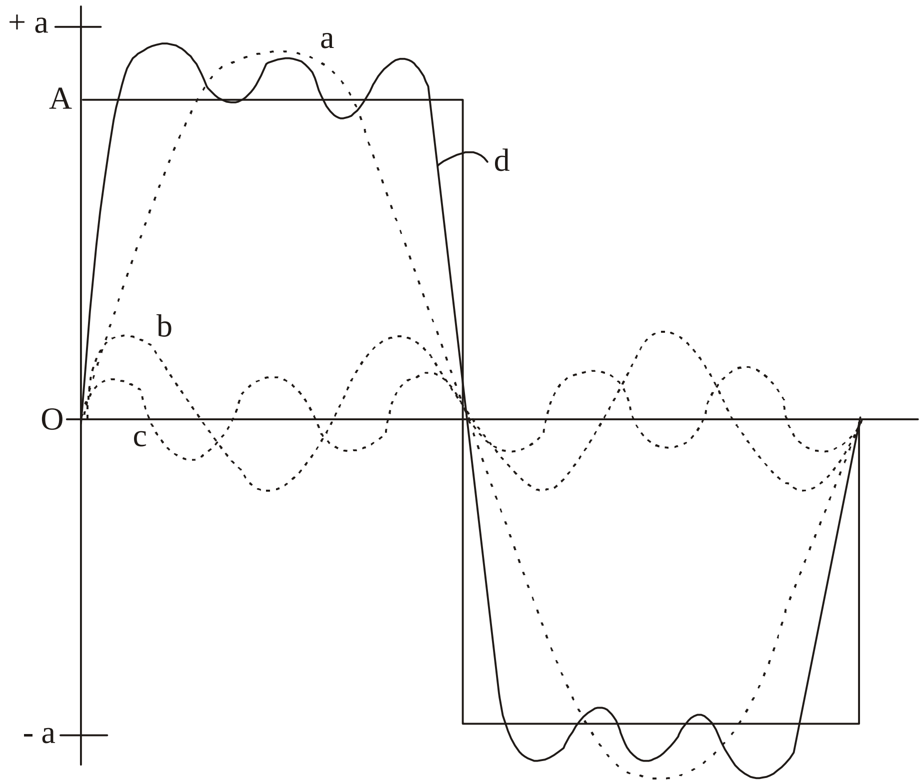
మరియు $B_2 = B_4 = B_6 = 0$

(1), (2), (3) సమీకరణముల నుండి A_0, A_r, B_r విలువలను పురియే శ్రేణిలో ప్రతిక్షేపించిన

$$y = f(\omega t) = \frac{4a}{\pi}\left[\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + ...\right]$$

ఈ అంశ తరంగముల $\sin\omega t, \frac{1}{3}\sin 3\omega t, ...$ సంయోగము, చదను తరంగము ఏర్పడుటను పటము 10.2లో చూపబడినది.

పటము 10.2



పటము 10.2

ఈ పటములోని a, b, c సైను తరంగముల పౌనఃపున్యములు $\omega, 3\omega$ మరియు 5ω. వాటి కంపన పరిమితులు $A, \frac{A}{3}, \frac{A}{5}$. ఈ అంశాల సంఖ్య అత్యధికమైనపుడు స్వచ్ఛమైన చదను తరంగము ఏర్పడును.

10.4 పురియే సిద్ధాంతము - రంపపు పన్ను తరంగ విశ్లేషణ

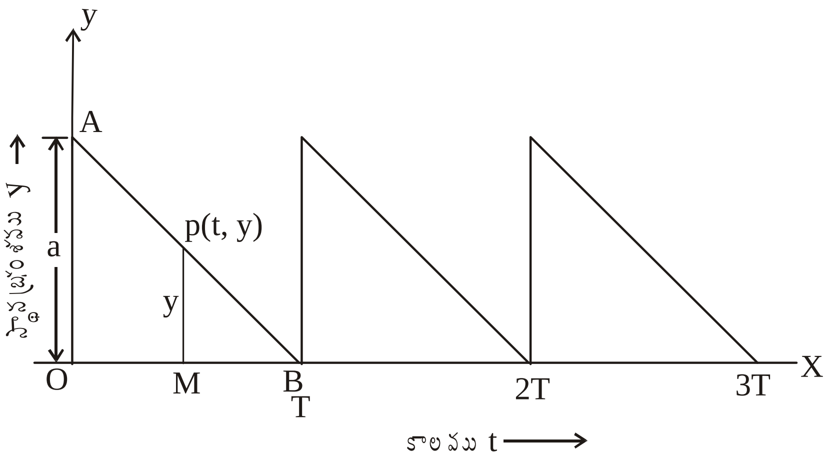
ఒక రంపపు పన్ను తరంగమును పటము 10.3లో చూపబడినది.

స్థానభ్రంశము Y అక్షము వెంబడి, కాలము X అక్షము వెంబడి యున్నది.

కాలము $t = 0$ అయినపుడు ప్రమేయము $f(\omega t) = a$ మరియు $t = T$ అయినపుడు $f(\omega t) = 0$ అగును.

వక్రములో P బిందువు నిరూపకములు (t, y) పటములో సరూప త్రిభుజములు AOB మరియు PMB ల నుండి

పటము 10.3



$$\frac{a}{y}=\frac{OB}{OM}=\frac{T}{(T-t)} \text{ లేక } y=\frac{a(T-t)}{T}=a\left(1-\frac{t}{T}\right)=f(t)$$

కావున ఏ క్షణములోనైన

t విలువ 0 కన్నా ఎక్కువయున్నపుడు మరియు T కంటే తక్కువయున్నపుడు $(0<t<T)$ స్థానభ్రంశమును క్రింది సమీకరణముతో చూపవచ్చును.

$$Y=f(t)=a\left(1-\frac{t}{T}\right)$$

ఫురియే శ్రేణి గుణకములు A_0, A_r, B_r లు క్రింది విధముగా కనుగొనవచ్చును.

A_0 నిర్ణయించుట

$$A_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T a\left(1-\frac{t}{T}\right)dt$$

$$=\frac{a}{T}\left[t-\frac{t^2}{2T}\right]_0^T=\frac{a}{T}\left[T-\frac{T^2}{2T}-0\right]$$

$$=\frac{a}{T}\cdot\frac{T}{2}=\frac{a}{2}$$

$$\therefore A_0=\frac{a}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

కావున కంపన అక్షము మూలబిందువు కాలము అక్షము నుండి $a/2$ దూరములో యుండును.

A_r **నిర్ణయించుట :**

$$A_r = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos r\omega t dt = \frac{2}{T}\int_0^T a\left(1-\frac{t}{T}\right)\cos r\omega t dt$$

$$= \frac{2a}{T}\int_0^T \cos r\omega t dt - \frac{2a}{T^2}\int_0^T t\cos r\omega t dt$$

$$= \frac{2a}{T}\left[\frac{\sin r\omega t}{r\omega}\right]_0^T - \frac{2a}{T^2}\left[\left\{\frac{t\sin r\omega t}{r\omega}\right\}_0^T - \int_0^T \frac{\sin r\omega t}{r\omega}dt\right]$$

$$= 0 - \frac{2a}{T^2}\left[\left\{\frac{t\ \sin r\omega t}{r\omega}\right\}_0^T + \left\{\frac{\cos r\omega t}{(r\omega)^2}\right\}_0^T\right]$$

$$= \frac{-2a}{T^2}\left[\frac{T}{r\omega}\sin r\omega T - 0 + \frac{\cos r\omega T}{(r\omega)^2} - \frac{\cos 0}{(r\omega)^2}\right]$$

$$= \frac{-2a}{T^2}\left[\frac{T}{r\omega}\sin 2\pi r + \frac{\cos r2\pi r}{(r\omega)^2} - \frac{1}{(r\omega)^2}\right] \qquad \left(\because \omega = \frac{2\pi}{T}\right)$$

$$= \frac{-2a}{T^2}\left[\frac{1}{(r\omega)^2} - \frac{1}{(r\omega)^2}\right]$$

$$= 0 \qquad \because \sin\ 2\pi r = 0, \cos 2\pi r = 1$$

$$\therefore A_r = 0$$

కావున రంపపు పన్ను తరంగ రూపములో కోసైను పదములు శూన్యమగును.

B_r **గుణకమును నిర్ణయించుట :**

$$B_r = \frac{2}{T}\int_0^T f(T)\ \sin r\omega t dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^T a\left(1-\frac{t}{T}\right)\sin r\omega t dt$$

$$= \frac{2a}{T}\int_0^T \sin r\omega t dt - \frac{2a}{T^2}\int_0^T t \sin r\omega t dt$$

కాని $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$= \frac{2a}{T}\int_0^T \sin r\frac{2\pi t}{T} dt - \frac{2a}{T^2}\int_0^T t \sin r\frac{2\pi t}{T} dt$$

కాని $\int_0^T \sin r\frac{2\pi t}{T} = 0$ కావున

$$= \frac{-2a}{T^2}\int_0^T t \sin r\frac{r\pi t}{T} dt$$

Integrating by parts

$$= \frac{-2a}{T^2}\left[\left\{\frac{-t\cos r\frac{2\pi r}{T}}{\frac{2\pi r}{T}}\right\}_0^T - \int_0^T \frac{-\cos r\frac{2\pi t}{T}dt}{\frac{2\pi r}{T}}\right]$$

$$= \frac{+2a}{T^2}\left[\left\{\frac{t\cos r\frac{2\pi t}{T}}{\frac{2\pi r}{T}}\right\}_0^T - \left\{\frac{\sin r\frac{2\pi t}{T}}{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}\right\}_0^T\right]$$

$$= \frac{2a}{T^2}\left[T\frac{\cos 2\pi r}{\frac{2\pi r}{T}} - 0 - \frac{\sin 2\pi r}{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2} + \frac{\sin 0}{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}\right]$$

$$= \frac{2a}{T^2}\left[\frac{T}{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)} - 0 - 0 - 0\right]$$

$$= \frac{2a}{T^2} \quad \frac{T}{2\pi r/T} \qquad \because \cos\,2\pi r = 1,\ \sin\,2\pi r = 0,\ \sin 0 = 0$$

$$B_r = \frac{a}{\pi r}$$

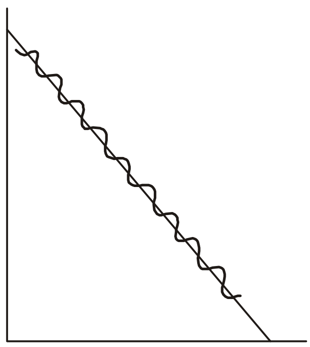
లేక $B_1 = \left(\frac{a}{\pi}\right);\ B_2 = \left(\frac{a}{2\pi}\right); B_3\left(\frac{a}{3\pi}\right) + \ldots\ldots$

కావున పురియే శ్రేణి

$$Y = f(t) = \frac{a}{2} + \frac{a}{\pi}\sin\,\omega t + \frac{a}{2\pi}\sin 2\omega t + \frac{a}{3\pi}\sin 3\omega t$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{a}{\pi}\left[\sin\omega t + \frac{1}{2}\sin 2\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \cdots\cdots\cdots\right]$$

పటము 10.4

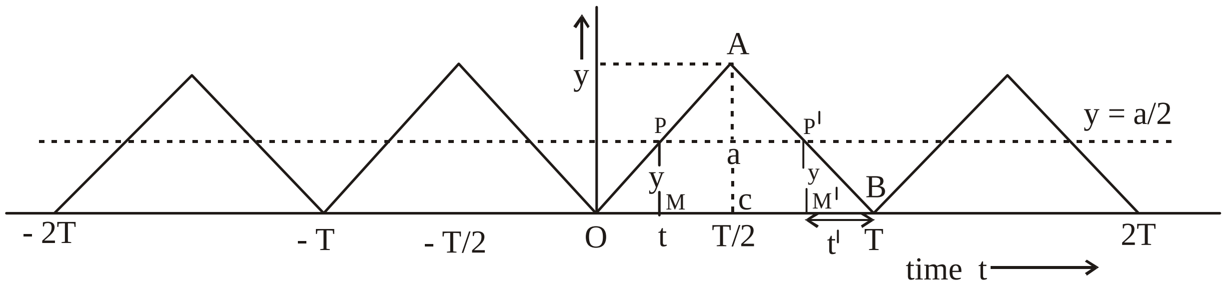


$\omega,\ 2\omega,\ 3\omega\cdots\cdots\cdots$ పౌనఃపున్యము గల తరంగాలు కంపన పరిమితులు $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ నిష్పత్తిలో యున్నవి. సంయోగము వలన రంపపు పన్ను తరంగము ఏర్పడును. ఈ అంశాల యొక్క సంఖ్య అత్యధికమైనపుడు ఖచ్చితమైన రంపపు పన్ను తరంగమేర్పడును. 10 అంశములు గల తరంగము 10.4లో చూపబడినది.

10.5 పురియే సిద్ధాంతము - త్రిభుజ తరంగ విశ్లేషణ

ఒక త్రిభుజ తరంగము పటము 10.5లో చూపబడినది. O వద్ద OAB ఒక తరంగము సూచించును. O, A, B ల నిరూపకములు (0, 0), $\left(\frac{T}{2}, a\right)$ మరియు $(T,\ 0)$ సూచించును.

పటము 10.5



పటము 10.5

P బిందువు యొక్క నిరూపకములు (t, y) మరియు OPM మరియు OAC లు సరూప త్రిభుజములు సూచించును. అయిన

$$\frac{a}{\frac{T}{2}} = \frac{y}{t} \text{ లేక } y = \frac{2at}{T} \qquad t = 0 \text{ నుండి } t = \frac{T}{2} \text{ వరకు సూచించును.}$$

అదే విధముగా తుల్యమైన P', AB రేఖ పై గుర్తించి ABC మరియు $P'M'B$ సరూప త్రిభుజముల నుండి

$$\frac{a}{y} = \frac{\left(\frac{T}{2}\right)}{T-t}$$

లేక $y = \frac{2a(T-t)}{T}$, t విలువ $\frac{T}{2}$ నుండి T వరకు

కావున ప్రమేయము

$y = \frac{2at}{T}$, t విలువ '0' మరియు $\frac{T}{2}$ ల మధ్య

$y = \frac{2a(T-t)}{T}$, t విలువ $\frac{T}{2}$ నుండి T వరకు

ఫురియే శ్రేణి గుణకములు A_0, A_r, B_r లను క్రింది విధముగా కనుగొనవచ్చును.

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T y\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{2at}{T}dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} \frac{2a(T-t)}{T}dt\right]$$

$$=\frac{1}{T}\left[\frac{2a}{T}\left\{\frac{t^2}{2}\right\}_0^{T/2}+\frac{2a}{T}\left\{Tt-\frac{t^2}{2}\right\}_{T/2}^{T}\right]$$

$$=\frac{2a}{T^2}\left[\frac{T^2}{8}+\left\{T^2-\frac{T^2}{2}\right\}-\left\{\frac{T^2}{2}-\frac{T^2}{8}\right\}\right]$$

$$A_0=\frac{2a}{T^2}\times\frac{T^2}{4}=\frac{a}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

కాలము అక్షమునకు కంపన అక్షము $a/2$ దూరము స్థానభ్రంశము చెందును.

A_r **నిర్ణయించుట :**

$$A_r=\frac{2}{T}\int_0^T y\cos r\omega t\,dt$$

$$=\frac{2}{T}\left[\int_0^{T/2}\frac{2at}{T}\cos r\omega t dt+\int_{T/2}^{T}\frac{2a(T-t)}{T}\cos r\omega t dt\right]$$

$$=\frac{4a}{T^2}\left[\underbrace{\int_0^{T/2}t\cos r\omega t\,dt}_{I_1}+\underbrace{\int_{T/2}^{T}T\cos r\omega t dt}_{I_2}-\underbrace{\int_{T/2}^{T}t\cos r\omega t dt}_{I_3}\right]\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

I_1, I_2, I_3 పదముల సమాకలనములను క్రింది విధముగా కనుగొనవచ్చును.

$$I_1=\int_0^{T/2}t\cos r\,\omega t\,dt$$

$$=\left[t\frac{\sin r\omega t}{r\omega}\right]_0^{T/2}-\int_0^{T/2}\frac{\sin r\omega t}{r\omega}dt$$

$$=0+\left[\frac{\cos r\omega t}{(r\omega)^2}\right]_0^{T/2}\qquad\left(\because \omega=\frac{2\pi}{T}\text{ కావున }\sin\frac{r\omega T}{2}=\sin\frac{2\pi r}{2}=\sin\pi r=0\right)$$

$$I_1 = \frac{\cos \pi r}{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (i)$$

అదే విధముగా

$$I_2 = T \int_{T/2}^{T} \cos r\omega t \; dt = T\left[\frac{\sin r\;\omega t}{r\omega}\right]_{T/2}^{T}$$

$$= \frac{T}{r\omega}\left[\sin\; r\omega T - \sin r\frac{\omega T}{2}\right]$$

$$= \frac{T}{r\omega}\left[\sin\; 2\pi r - \sin \pi r\right]$$

$$= \frac{T}{r\omega}\left[0-0\right] = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (ii)$$

అదే విధముగా

$$I_3 = \int_{\frac{T}{2}}^{T} t\; \cos\; r\omega t\; dt = \left[t\frac{\sin r\,\omega\, t}{r\omega}\right]_{\frac{T}{2}}^{T} - \int_{\frac{T}{2}}^{T} \frac{\sin r\omega t}{r\omega} dt$$

$$= 0 + \left[\frac{\cos\; r\omega t}{(r\omega)^2}\right]_{\frac{T}{2}}^{T}$$

$$I_3 = \left[\frac{\cos 2\pi r}{(r\omega)^2} - \frac{\cos \pi r}{r\omega^2}\right] \cdots\cdots\cdots (iii)$$

I_1, I_2, I_3 విలువలను $(i),(ii),(iii)$ సమీకరణముల నుండి (2)లో ప్రతిక్షేపించిన

$$A_r = \frac{4a}{T^2}\left[\frac{\cos \pi r}{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}\right] + \frac{4a}{T^2} \times 0 - \frac{4a}{T^2}\left[\frac{\cos 2\pi r}{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2} - \frac{\cos \pi r}{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}\right]$$

$$= \frac{4a}{T^2}\left[\frac{2\cos \pi r}{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2} - \frac{2}{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}\right] \qquad \because \cos\; 2\pi r = 1$$

$$= \frac{2}{\pi^2 r^2}\left[\cos \pi r - 1\right]$$

r సరి సంఖ్య అయినపుడు $r = 2, 4, 6, \cdots \cos \pi r = 1$ కావున

$$A_r = 0$$

r బేసి సంఖ్య అయినపుడు $r = 1, 3, 5, \cdots\cdots . \cos \pi r = -1$ కావున

$$A_r = \frac{-4a}{\pi^2 r^2}$$

కావున బేసి కొసైను అనుస్వరములు మాత్రము యుండును.

B_r నిర్ణయించుట :

$$B_r = \frac{2}{T}\int_0^T y \sin r\,\omega t\, dt$$

$$= \frac{2}{T}\left[\int_{T}^{\frac{T}{2}} \frac{2at}{T}\sin r\omega t\, dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} \frac{2a(T-t)}{T}\sin r\omega t\, dt\right]$$

$$= \frac{4a}{T^2}\left[\underbrace{\int_0^{\frac{T}{2}} t \sin r\,\omega t\, dt}_{i_1} + \underbrace{\int_{\frac{T}{2}}^{T} T \sin r\,\omega t\, dt}_{i_2} - \underbrace{\int_{\frac{T}{2}}^{T} t \sin r\,\omega t\, dt}_{i_3}\right] \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

i_1, i_2, i_3 పద సమాకలనములను క్రింది విధముగా లెక్కించవచ్చు.

r సరి మరియు బేసి సంఖ్యలకు కూడా

$B_r = 0$ అని చూపవచ్చును.

త్రిభుజ తరంగమునకు పురియే శ్రేణిని క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును.

$$Y = f(t) = \frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2}\cos\,\omega t - \frac{4a}{\pi^2 3^2}\cos 3\omega t - \frac{4a}{\pi^2 5^2}\cos\,(5\omega t) - \cdots\cdots\cdots$$

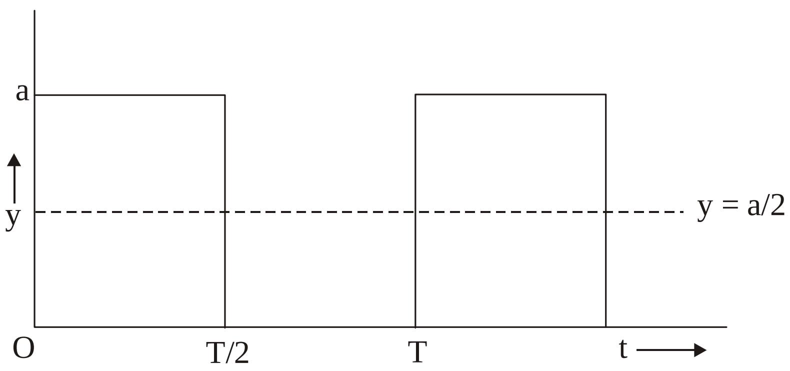
$$y = f(t) = \frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2}\left(\cos\omega t - \frac{1}{3^2}\cos\,3\omega t - \frac{1}{5^2}\cos 5\omega t \cdots\cdots\right)$$

కంపన అక్షము మూలబిందువు, X అక్షము నుండి $\frac{a}{2}$ దూరములో యుండును. ω, 3ω, 5ω లు పౌనఃపున్యము గల అంశ తరంగాల కంపన పరిమితుల $1, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{5^2}$ నిష్పత్తిలో యుండి సంయోగము చెందుట వలన త్రిభుజ తరంగమేర్పడును.

10.6 సాధించిన సమస్యలు

1. సంశ్లిష్ట కంపనములో స్థానభ్రంశ ప్రమేయము $0 < t < T/2$ అయినపుడు $y = a$ మరియు $T/2 < t < T$గా యున్నపుడు పురియే శ్రేణి విశ్లేషణతో హరాత్మక అంశాలను నిర్ణయించుము.

సాధన స్థానభ్రంశ ప్రమేయము క్రింది తరంగ రూపమును చూపును.



పురియే గుణాంకములు

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T a\,dt = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} a\,dt + 0$$

$$= \frac{1}{T}\cdot\frac{aT}{2} = \frac{a}{2} \;\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$A_r = \frac{2}{T}\int_0^T a\cos\frac{2\pi rt}{T}dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} a\cos\frac{2\pi rt}{T}dt + 0$$

$$= \frac{2a}{T}\times\frac{1}{\frac{2\pi r}{T}}\left[\sin\frac{2\pi rt}{T}\right]_0^{T/2}$$

$$= \frac{a}{\pi r}\left[\sin\frac{2\pi r}{T}\cdot\frac{T}{2} - \sin 0\right] = \frac{a}{\pi r}[\sin \pi r]$$

$r = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ అయిన $\sin \pi r = 0$

$$\therefore A_r = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

అదే విధముగా

$$B_r = \frac{2}{T}\int_0^T a \sin \frac{2\pi rt}{T} dt$$

$$= \frac{2a}{T}\int_0^{T/2} \sin \frac{2\pi rt}{T} dt + 0$$

$$= \left(\frac{2a}{T}\right)\left(\frac{T}{2\pi r}\right)\left[-\cos\frac{2\pi rt}{T}\right]_0^{T/2}$$

$$= \frac{a}{\pi r}\left[-\cos\frac{2\pi r}{T}\cdot\frac{T}{2} + \cos 0\right]$$

$$= \frac{a}{\pi r}\left[-\cos \pi r + 1\right]$$

$$= \frac{a}{\pi r}\left[-(-1)^r + 1\right] \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

అనగా $r = 2, 4, 6, \cdots\cdots$ సరి సంఖ్య అయిన

$$B_r = 0$$

మరియు $r = 1, 3, 5, 7, \cdots\cdots$ బేసి సంఖ్య అయిన

$$B_r = \frac{2a}{\pi r}\text{ , i.e. } B_1 = \frac{2a}{\pi}, B_3 = \frac{2a}{3\pi} \cdots\cdots$$

కాని ఫురియే శ్రేణి

$$y = A_0 + \sum_{r=1}^{r}\left(A_r \cos r\omega t + B_r \sin r\omega t\right)$$ (1), (2), (3) సమీకరణముల నుండి

$$= \frac{a}{2} + \sum_{r=1}^{r}\left[0 + \frac{2a}{\pi r}\left(\sin r\omega t\right)\right]$$ r బేసి సంఖ్యగాయున్నపుడు

$$y = \frac{a}{2} + \frac{2a}{\pi}\sin\omega t + \frac{2a}{3\pi}\sin 3\omega t + \frac{2a}{5\pi}\sin 5\omega t + \cdots\cdots\cdots$$

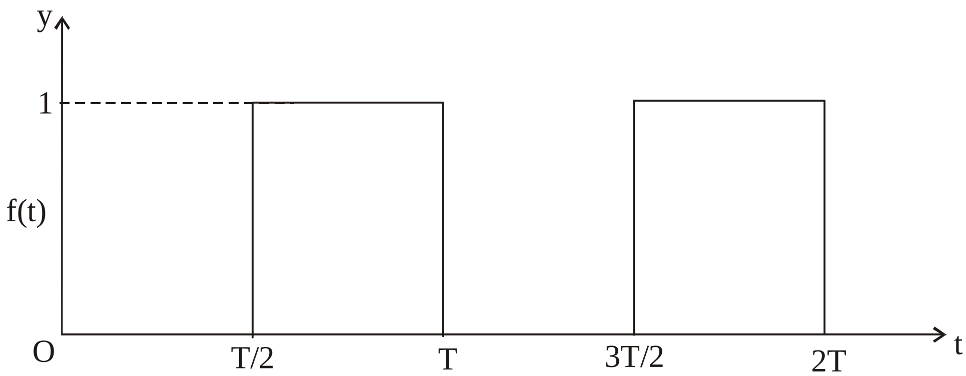
$$= \frac{a}{2} + \frac{2a}{\pi}\left\{\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin\ 3\omega t + \frac{1}{5}\sin\ 5\omega t + \cdots\cdots\cdots\right\}$$

2. ఆవర్తన ప్రమేయము $f(t)$ విలువ కాలము 0, $\frac{T}{2}$ ల మధ్య 0 గాను, మరియు $\frac{T}{2}$ నుండి T వరకు '1'గా ఆవర్తనముగా యుండిన, ఫురియే శ్రేణిని కనుగొనుము. (T ఆవర్తన కాలము)

సాధన $Y = f(t) = 1,$ t విలువ $\frac{T}{2}$ మరియు T ల మధ్య

$f(t) = 0,$ t విలువ $\frac{T}{2}$ మరియు 0ల మధ్య కావున

తరంగము



ఫురియే గుణాంకములు A_0, A_r, B_r లు నిర్ణయించవచ్చును.

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$ కావున

$$A_0 = \frac{1}{T}\left[\int_0^{T/2} 0\,dt + \int_{T/2}^{T} 1\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{T}[t]_{T/2}^{T} = \frac{1}{T}\left[T - T/2\right] = \frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots(1)$$

అదే విధముగా

$$A_r = \frac{2}{T}\left[\int_0^T f(t)\cos r\omega t\, dt\right]$$

$$= \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/2} 0\, dt + \int_{T/2}^{T} \cos r\omega t\, dt\right]$$

$$= \left(\frac{2}{T}\right)\left(\frac{1}{r\omega}\right)\left[\sin r\omega t\right]_{\frac{T}{2}}^{T}$$

$$= \left(\frac{2}{T}\right)\left(\frac{1}{r\omega}\right)\left[\sin r\cdot\frac{2\pi}{T}T - \sin r\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\right]$$

$$= \frac{2}{Tr\omega}\left[\sin 2\pi r - \sin r\pi\right]$$

$r = 1, 2, \cdots\cdots$ అన్ని విలువలకు $\sin 2\pi r = 0, \sin r\pi = 0$

అదే విధముగా $A_r = 0$

$$B_r = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin r\omega t\, dt$$

$$B_r = \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/2} 0\, dt + \int_{T/2}^{T} (1)\sin r\omega t\, dt\right]$$

$$= \frac{2}{T}\left[\frac{-\cos r\omega t}{r\omega}\right]_{T/2}^{T}$$

$$= \frac{2}{r\omega T}\left[-\cos r\cdot\frac{2\pi r}{T}\cdot T + \cos r\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\right]$$

$$= \frac{2}{r\omega T}\left[-\cos 2\pi r + \cos r\pi\right] \qquad \left(\because \omega = \frac{2\pi}{T}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi r}\left[(-1)^r - 1\right]$$

r బేసి సంఖ్య అయిన $B_r = \frac{-2}{\pi r}, \; r = 3, 5, 7, \cdots\cdots$

అనగా $B_1 = \frac{-2}{\pi}, \; B_3 = \frac{-2}{3\pi}, \; B_5 = \frac{-2}{5\pi}\cdots\cdots$

r సరి సంఖ్య అయిన $B_r = 0,\ r = 2, 4, 6, \cdots\cdots$

పురియే శ్రేణి $y = f(t) = A_0 \pm \sum_{r=1}^{\omega} \left(A_r \cos r\omega t + B_r \sin r\omega t\right)$

లేక $f(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left[\sin\ \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \cdots\cdots\cdots\right]$

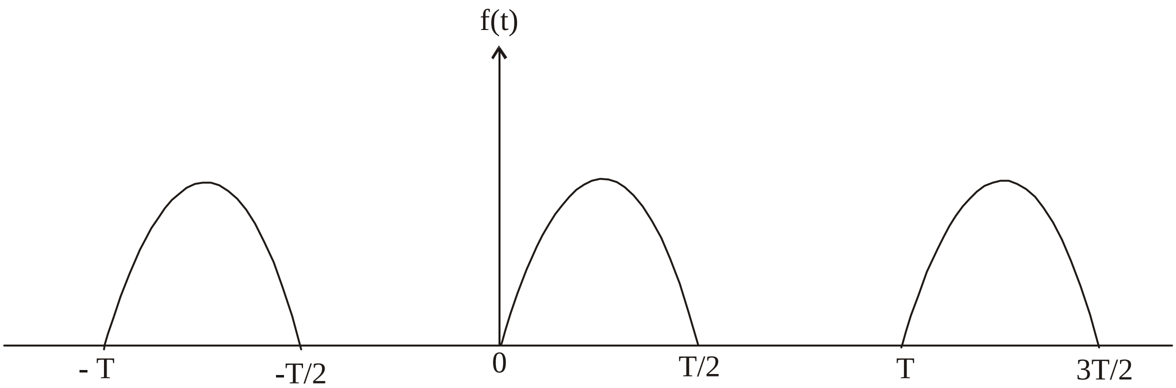
3. పురియే శ్రేణిలో స్థానభ్రంశ ప్రమేయము క్రింది విధముగా నిర్వచింపబడినది.

$$y = f(t) = A\ \sin\ \omega t \qquad 0 < t < \frac{T}{2}$$

$$y = f(t) = 0 \qquad \frac{T}{2} < t < T$$

మరియు $f(t+T) = f(t)$, T ఆవర్తన కాలము, $\omega = \frac{2\pi}{T}$. అయిన పురియేశ్రేణి వ్రాయుము.

సాధన స్థానభ్రంశ ప్రమేయము ననుసరించి



పురియే స్థిరాంకములను లెక్కించవచ్చును.

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T A \sin\ \omega t\ dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} A\ \sin\ \omega t\ dt + 0$$

$$= \frac{A}{T\omega}\left[-\cos\ \omega t\right]_0^{T/2} = \frac{A}{T\omega}\left[-\cos\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2} + \cos 0\right]$$

$$= \frac{A}{T\omega}\left[-(-1)+1\right] = \frac{2AT}{T2\pi} \qquad \left(\because\ \omega = \frac{2\pi}{T}\right)$$

$$A_0 = \frac{A}{\pi} \cdots\cdots(1)$$

అదే విధముగా

$$A_r = \frac{2}{T}\int_0^T A\sin\omega t\ \cos r\omega t\ dt$$

$$= \frac{A}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}} A\ \sin\omega t\ \cos\ r\ \omega t\ dt + \int_{T/2}^{T} A\sin\omega t\ \cos\ r\ \omega t\ dt\right]$$

$$= \frac{A}{T}\int_0^{T/2}\left[\sin(1+r)\omega t + \sin(1-r)\omega t\right]dt + 0$$

$$A_r = \frac{A}{T}\left[-\frac{\cos\{(1+r)\omega t\}}{(1+r)\omega} - \frac{\cos(1-r)\omega t}{(1-r)\omega}\right]_0^{T/2}$$

$A_r = 0$ When $r = 1, 3, 5, \cdots\cdots$ (బేసి) అయిన

$$A_r = \frac{A}{2\pi}\left[\frac{2}{1+r} + \frac{2}{1-r}\right] = -\frac{2A}{(r-1)(r+1)\pi}\cdots\cdots\cdots(2)$$

$r = 2, 4, \cdots\cdots$ సరి సంఖ్య అయినపుడు

$$B_r = \frac{2}{T}\int_0^T A\sin\ \omega t\ \sin\ r\omega t dt$$

$$= \frac{A}{T}\int_0^{T/2}\left[\cos(1-r)\omega t - \cos(1+r)\omega t\right]dt$$

$$r = 1,\ B_r = \frac{A}{2}\int_0^T dt - \frac{A}{2}\int_0^{T/2}\cos\ 2\omega t\ dt = \frac{A}{2} - \frac{A}{2}\left[\frac{\sin\ 2\omega t}{2\omega}\right]_0^{T/2} = \frac{A}{2}$$

$$= \frac{A}{2}\left[\frac{\sin(1-r)\omega t}{(1-r)\omega} - \frac{\sin(1+r)\omega t}{(1+r)\omega}\right]_0^{\frac{T}{2}}$$

$r = 2, 3, \cdots\cdots\cdots.$ $\qquad\qquad B_r = 0 \cdots\cdots\cdots (3)$

(1), (2), (3) సమీకరణముల నుండి ఫురియే శ్రేణి

$$y = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2}\sin\,\omega t - \frac{2A}{\pi}\left[\frac{1}{1\times 3}\cos\,2\omega t + \frac{1}{3\times 5}\cos\,4\omega t + \cdots\cdots\right]$$

10.7 సారాంశము

సంక్లిష్ట తరంగములు అనేక సరళ హరాత్మక తరంగములు సంయోగము వలన ఏర్పడును. ఒక సంక్లిష్ట తరంగములో ఉండే అంశ తరంగాల సంఖ్యను, వాటి పౌనఃపున్యములు మరియు కంపన పరిమితులను ఫురియే సిద్ధాంతము నుపయోగించి నిర్ణయించవచ్చును.

10.8 కీలక పదములు

ఫురియే సిద్ధాంతము, ఫురియే గుణకములు, ఏకైక విలువ గల అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయము, చదను తరంగము, రంపపు పన్ను తరంగము, త్రిభుజ తరంగము.

10.9 స్వయం సమీక్షా ప్రశ్నలు

వ్యాసరూప ప్రశ్నలు

1. ఫురియే నియమమును నిర్వచింపుము. అవధులు వ్రాయుము. ఫురియే నియమము ననుసరించి సంశ్లిష్ట తరంగము అంశముల విశ్లేషణ ఏ విధముగా చేయుదురు?
2. ఫురియే నియమమును నిర్వచించి, ఫురియే గుణకములను రాబట్టుము.
3. ఫురియే నియమము నుండి చదను తరంగమును ఏ విధముగా విశ్లేషణ చేయుదురు?
4. ఫురియే సిద్ధాంతము నిర్వచింపుము. త్రిభుజాకార తరంగ విశ్లేషణ వివరింపుము?
5. ఫురియే సిద్ధాంతము నిర్వచించి, రంపపు పన్ను తరంగ విశ్లేషణ వివరింపుము?

లఘు ప్రశ్నలు

6. ఫురియే సిద్ధాంతమును వివరింపుము.
7. ఫురియే సిద్ధాంతమును ఏ స్థితులలో అనువర్తింప జేయవచ్చును?
8. ఫురియే సిద్ధాంతపు అవధులు వ్రాయుము.

అభ్యాసము

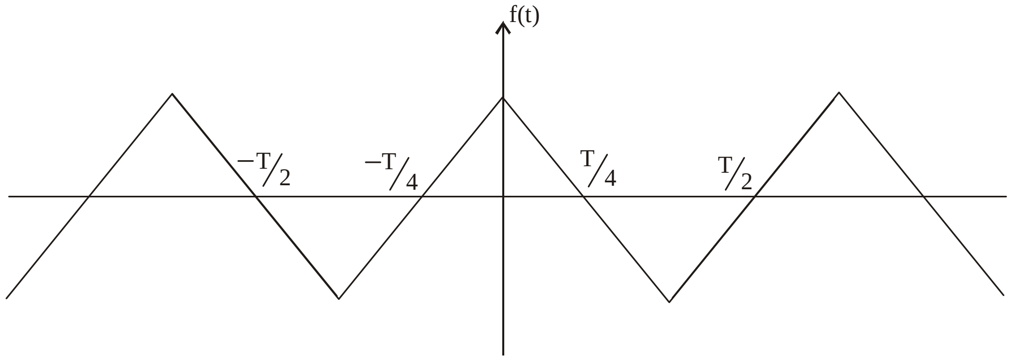
1. రంపపు పన్ను తరంగము స్థానభ్రంశ ప్రమేయము క్రింది విధముగా యున్నపుడు

$Y = \frac{a}{T}\,t$, t విలువ 0 మరియు T ల మధ్య యున్నపుడు

ఫురియే శ్రేణిని వ్రాయుము.

జవాబు : $y = \frac{a}{2} - \frac{a}{\pi}\left[\sin\omega t + \frac{1}{2}\sin 2\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \cdots\cdots\right]$

2. ఫురియే శ్రేణి స్థానభ్రంశ ప్రమేయము పటములో తరంగమును సూచించిన ఫురియే శ్రేణిని వ్రాయుము.

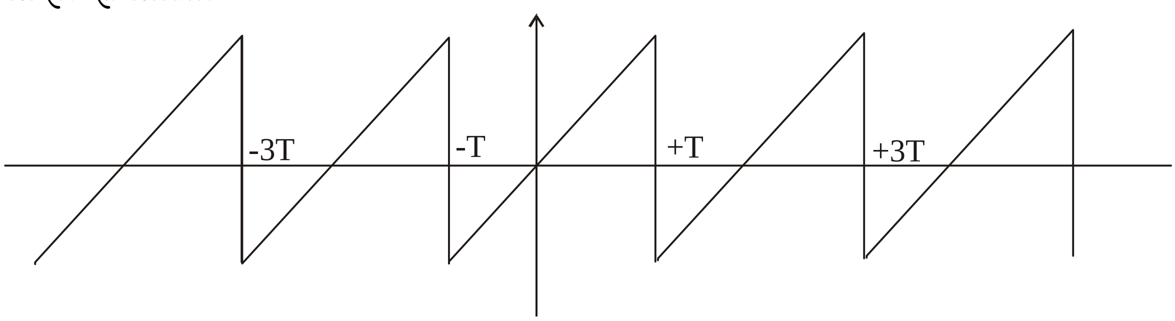


$$F(t)=1+\frac{4t}{T} \qquad \frac{-T}{2}<t<0$$

$$F(t)=1-\frac{4t}{T} \qquad 0<t<\frac{T}{2}$$

జవాబు : $y=\frac{8}{\pi^2}\left[\cos\,\omega t+\frac{1}{3^2}\cos\,3\omega t+\frac{1}{5^2}\cos 5\omega t+\cdots\cdots\cdots\right]$

3. ఒక సంశ్లిష్ట తరంగపు స్థానభ్రంశ ప్రమేయము $y=f(t)=-T<t<T$ యుండే తరంగము పటములో వలే యున్నపుడు, ఫురియే శ్రేణి వ్రాయుము.



జవాబు : $y=f(t)=2\left[\frac{\sin\omega t}{1}+\frac{\sin 2\omega t}{2}+\frac{\sin 3\omega t}{3}+\cdots\cdots\cdots\right]$

10.10 చదువదగిన గ్రంథాలు

1. తెలుగు అకాడమీ ప్రచురణ (భౌతికశాస్త్రము, మొదటి సంవత్సరము)
2. Waves and Oscillations by Badami, V. Balasubramaniam, K. Rama Reddy
3. Waves and Oscillations by Mittal Anand

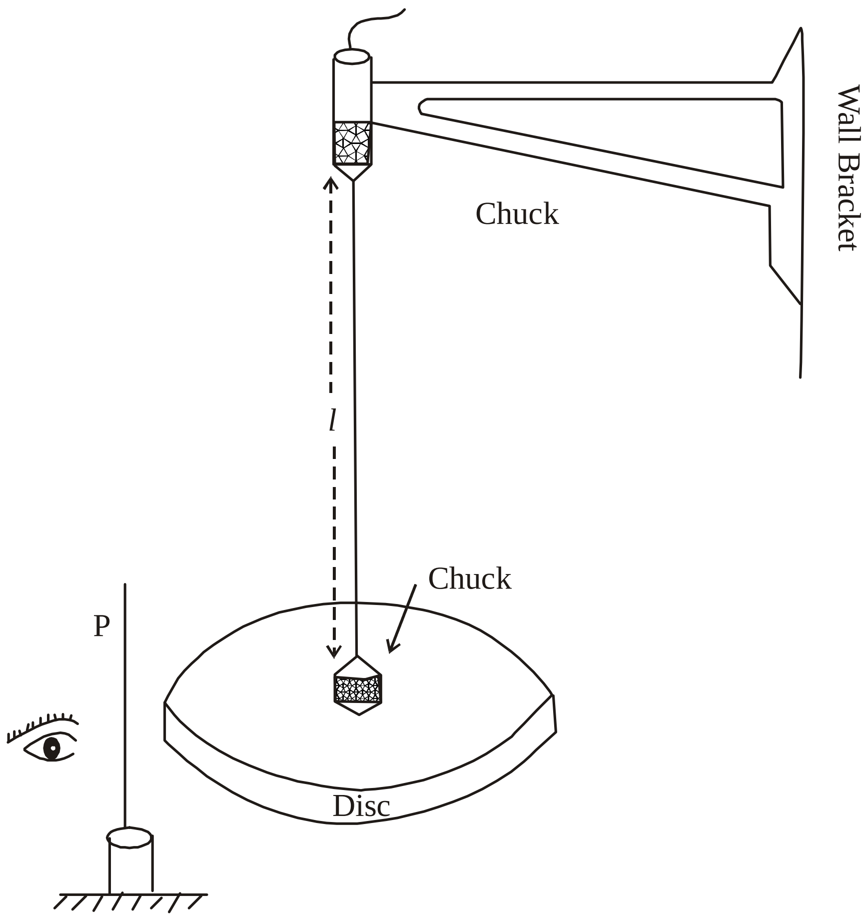
ప్రయోగము సంఖ్య - 10

విమోటన లోలకము – ధృడతా గుణకము

ఉద్దేశము : విమోటన లోలకమునుపయోగించి గతిక పద్ధతిన, ఒక తీగ పదార్థాపు ధృడతా గుణకములను కనుగొనుట.

పరికరములు : విమోటన లోలకము, ఆపు గడియారము, స్క్రూగేజి, వెర్నియర్‌కాలిపర్స్.

వర్ణన : విమోటన లోలకములో ఒక ఏకరీతి తీగకు చివరన ఏకరీతి వృత్తాకార లోహ పళ్ళెము వ్రేలాడదీయబడి వుండును. తీగను పై భాగమున గోడకు తగిలించిన వాల్‌బ్రాకెట్‌లోని చెక్‌నట్‌కు, క్రింది భాగమున లోహపు పళ్ళెము మధ్యభాగమున ఉన్న చెక్‌నట్‌కు బిగిస్తారు.



సిద్ధాంతము : పళ్ళెమును క్షితిజ సమాంతర తలములో కొద్దిగా కోణీయ అపవర్తనము చేసి, వదిలిన అది కోణీయ

సరళహరాత్మక చలనము చేయును. దాని ఆవర్తన కాలము $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}$, ఇందులో I అనగా పళ్ళెము జడత్వ భ్రామకము మరియు c అనగా తీగలో ప్రమాణపురికి కలుగు పునఃస్థాపక యుగ్మము.

$$\text{కాని } c = \frac{\pi n a^4}{2\ell}$$

a = తీగ వ్యాసార్థము, ℓ = తీగపొడవు, n = తీగ పదార్థాపు ధృడతాగుణకము

పై రెండు సమీకరణములను సాధించగా

$$n = \frac{8\pi I}{a^4} \cdot \frac{\ell}{T^2}$$

వృత్తాకార పళ్ళెమునకు దాని జ్యామితీయ అక్షము పరముగా

జడత్వ భ్రమణము $I = \frac{MR^2}{2}$ (M = పళ్ళెము ద్రవ్యరాశి, R = వ్యాసార్థము)

$$\therefore n = \frac{4\pi MR^2}{a^4} \cdot \frac{\ell}{T^2}$$

పద్ధతి : నొక్కులు లేని ఒక మీటరు తీగను తీసుకొని, దాని ఒక చివరన వృత్తాకార పళ్ళెమును, రెండవ చివర స్టాండునకు బిగించాలి. తీగ పొడవు మొదటి 50సెం.మీ.కు సవరించవలెను. ఒక గుండుసూదిని పళ్ళెము అంచున అతికించి, దానికెదురుగా ఒక సూచిని ఉంచవలెను. పళ్ళెము కొద్దిగా ప్రక్కకు తిప్పి వదలిన అది క్షితిజ సమాంతర తలములో కంపనాలు చేయును. 20 కంపనాలకు పట్టు కాలమును రెండుసార్లు కనుగొని, సరాసరి లెక్కించి, ఆవర్తనకాలము (T) లెక్కించాలి. ఇదే విధముగా వివిధ పొడవులకు ప్రయోగమును చేసి, $\frac{\ell}{T^2}$ లెక్కించి సరాసరి విలువను నిర్ణయించాలి. పళ్ళెము ద్రవ్యరాశి Mని త్రాసుతో, వ్యాసార్థము R వెర్నియర్ కాలిపర్స్‌తో కొలిచి, తీగ వ్యాసార్థమును 'a' స్క్రూగేజి సహాయమున కొలవవలెను. ఈ విలువలను $n = \frac{4\pi MR^2}{a^4} \cdot \frac{\ell}{T^2}$లో ప్రతిక్షేపించి ధృడతాగుణకము 'n' లెక్కించాలి.

తీగపొడవు 'ℓ'ను X - అక్షము మీద, T^2 ను Y - అక్షము మీద తీసుకొని గ్రాఫ్ గీచిన, అది మూల బిందువు నుంచి పోవు సరళరేఖ - అవుతుంది. గ్రాఫ్ నుంచి $\frac{\ell}{T^2}$ కొలిచి, పై సూత్రములో ప్రతిక్షేపించి, 'n' విలువను లెక్కించాలి.

పరిశీలనలు :

పళ్ళెము ద్రవ్యరాశి (M) = ...gm.

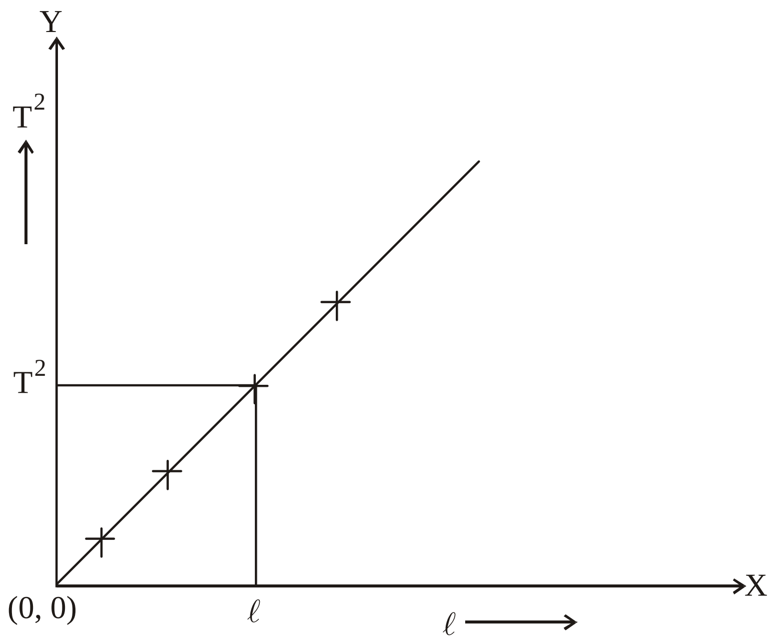
పళ్ళెము సగటు వ్యాసార్థము (R) = ...cm.

తీగ సటు వ్యాసార్థము (a) = ... cm.

వరుస సంఖ్య	లోలకము పొడవు ℓ cm	20 కంపనాలకు పట్టుకాలము			ఆవర్తన కాలం(T)	T^2	$\frac{\ell}{T^2}$
		1వసారి	2వసారి	3వసారి			

సరాసరి $\frac{\ell}{T^2}$ విలువ = ... $cm\,sec^{-2}$

గ్రాఫ్ :



గ్రాఫ్ నుండి $\frac{L}{T^2}$ విలువ = ... $cm\,sec^{-2}$

ఫలితము : ఇచ్చిన తీగ పదార్థాపు ధృడతా గుణకము

(n) - గణనల ఆధారంగా = ...

గ్రాఫ్ ఆధారంగా = ...

జాగ్రత్తలు :

1. తీగలో మెలికలు ఉండరాదు.
2. కంపన సమయంలో పళ్ళెమునకు ఇతర చలనాలు ఉండరాదు.
3. కంపన పరిమితి తక్కువగా ఉండవలెను.

యూనిట్ - 4

పాఠం - 11

యుగ్మిత డోలకాలు

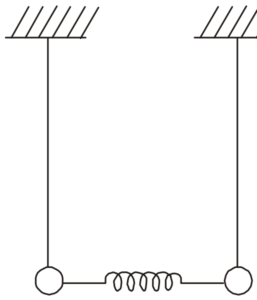
11.0 ఉద్దేశాలు

- యుగ్మిత డోలకాల కంపన రీతిని రెండు యుగ్మత డోలకాలు (యుగ్మత రెండు లఘు లోలకముల) పరిశీలించుట
- యుగ్మిత డోలకాల కోణీయ పౌనఃపున్యము మరియు కంపన పరిమితులను, కంపన రీతిని అధ్యయనము చేయుట.
- సాధారణ నిరూపకాలు (Normal Coordinates) మరియు సాధారణ కంపన రీతులు (Normal Modes) గురించి తెలుసుకొనుట.
- ఈ చర్చను N యుగ్మిత డోలకములకు అనువర్తించుట.
- తరంగ సమీకరణమును రాబట్టుట.

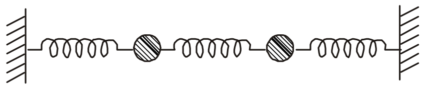
విషయసూచిక

11.1 ఉపోద్ఘాతము

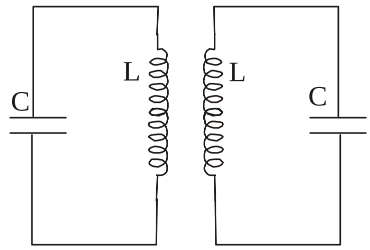
బలాత్కృత డోలనములు అధ్యయనము జరిగినది. ఇందులో చోదిత వ్యవస్థ ఆవర్తన బలము కంపన వ్యవస్థ పై చర్య జరుపును. కాని కంపన వ్యవస్థ (చోదన) (ఉదా॥ సరళ హరాత్మక డోలకము) యొక్క ప్రభావము చోధిత వ్యవస్థ పై లేదు. కావున చోదిత వ్యవస్థ శక్తిని సరఫరా చేసే శక్తి ఆశయముగా మాత్రము యున్నది. చోదన కంపన వ్యవస్థ నుండి చోదిత వ్యవస్థకు జరిగే శక్తి ప్రసారమును గణనీయముగా యున్న ఆ రెండు యుగ్మిత వ్యవస్థలుగా ప్రవర్తించును. యుగ్మిత వ్యవస్థల కొన్ని ఉదాహరణములు పరిశీలించెదము.



పటము 11.1(ఎ)



పటము 11.1(బి)

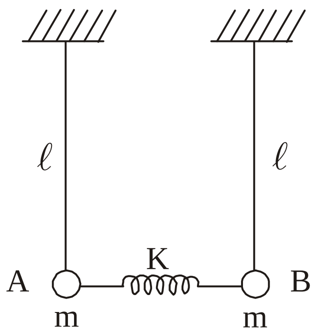


పటము 11.1(సి)

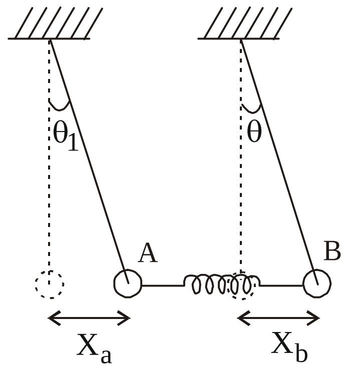
పటము (11.1(ఎ))లో రెండు లఘు లోలకముల గోళములు స్ప్రింగుతో కలుపబడినవి. ఈ స్ప్రింగు వలన రెండు లోలకములు యుగ్మితమగును. రెండు లోలక గోళములను పటము (11.1ఎ)లో వలే యుగ్మితము చేయవచ్చును. రెండు గోళములను మూడు స్ప్రింగుల ద్వారా పటము (11.1బి)లో వలే యుగ్మితము చేయవచ్చును. పటము (11.1సి)లో విద్యుత్ ప్రేరకము (L) కండెన్సరు (C)ల యుగ్మత వలయము చూపబడినది. యుగ్మిత డోలకాలలో చోదిత వ్యవస్థ చోదన (కంపన వ్యవస్థ)లను వేరుగా గుర్తించలేము.

11.2 రెండుయుగ్మత డోలకాలు

సమాన పొడవు గల రెండు లఘు లోలకముల గోళములు పటము (11.2ఎ)లో వలే స్ప్రింగుతో సంధానము చేయబడి సమాతాస్థితిలో యున్నవి. స్ప్రింగు స్థిరాంకము K. వ్యవస్థను (11.2బి)లో వలే స్థానభ్రంశము చెందించి వదిలిన వ్యవస్థ డోలనములను పరిశీలించెదము. ఏదైన ఒక క్షణంలో గోళముల స్థానభ్రంశములు పటము (11.2బి)లో వలే యున్న X_a, గోళము A యొక్క స్థానభ్రంశము, X_b గోళము B యొక్క స్థానభ్రంశము సూచించిన



పటం 11.2(a)



పటం 11.2(b)

$X_b > X_a$ అయిన స్ప్రింగు సాగదీయపడును. ఆ స్థితిలో స్ప్రింగులో తన్యత $K\left(X_b - X_a\right)$. ఈ తన్యత B యొక్క (గురుత్వకర్షణ వలన కలిగే) పునస్థాపక బలము $\left(mg\dfrac{X_b}{\ell}\right)$ దిశలో యుండును. కాని ఈ తన్యత A యొక్క పునః

స్థాపక బలము $\left(mg\frac{X_a}{\ell} \right)$ వ్యతిరేక దిశలో యుండును. కంపన పరిమితి స్వల్పంగా యున్నపుడు A, B ల చలనాలను క్రింది సమీకరణములు సూచించును.

$$m\frac{d^2X_a}{dt^2} = \frac{-mg}{\ell}X_a + K\left(X_b - X_a\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$m\frac{d^2X_b}{dt^2} = \frac{-mg}{\ell}X_b - K\left(X_b - X_a\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

కావున ఒక లోలకము త్వరణము రెండవ లోలకము స్థానభ్రంశము పై కూడా ఆధారపడి యుండును. కావున లోలకము చలనము సరళ హరాత్మకముగా లేదని తెలియును. కాని $K = 0$ అయిన రెండింటి కోణీయ పౌనఃపున్యము

$$\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = \sqrt{g/\ell}\ \cdots\cdots\cdots(3)$$

(1), (2) సమీకరణములను ω_0 పరముగా సూచించిన

$$\frac{d^2X_a}{dt^2} = -\omega_0^2 X_a + \frac{K}{m}\left(X_b - X_a\right)\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$\frac{d^2X_b}{dt^2} = -\omega_0^2 X_b - \frac{K}{m}\left(X_b - X_a\right)\cdots\cdots\cdots(5)$$

యుగ్మత ప్రభావమును x_a, x_b విలువలను సాధించి తెలుసుకొనవచ్చును. (4), (5) సమీకరణములను కూడిన

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(X_a + X_b\right) = -\omega_0^2\left(X_a + X_b\right) + 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(X_a + X_b\right) + \omega_0^2\left(X_a + X_b\right) = 0$$

$X_a + X_b = X \cdots\cdots(6)$ అయిన

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \omega_1^2 X = 0\cdots\cdots(7) \qquad \left(\omega_1 = \omega_0\right)$$

(5) నుండి (4) తీసివేసిన

$$\frac{d^2\left(X_b - X_a\right)}{dt^2} = \omega_0^2\left(X_b - X_a\right) - \frac{2K}{m}\left(X_b - X_a\right)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(X_b - X_a\right) + \left(\omega_0^2 + \frac{2K}{m}\right)\left(X_b - X_a\right) = 0$$

$$X_b - X_a = Y \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$ అయిన

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + \left(\omega_0^2 + \frac{2K}{m}\right)Y = 0$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + \omega_2^2 Y = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots(9) \qquad \left\{\omega_0^2 + \frac{2K}{m}\right\} = \omega_2$$

నిరూపకాలు X మరియు Y లతో యుగ్మత వ్యవస్థ చలనమును వివరించవచ్చును. (7), (9) సమీకరణములు X, Y లు సరళహరాత్మకముగా యుండునని తెలియును. ఈ రెండు స్వతంత్రముగా యుండును.

$Y = 0$ అయిన (8) నుండి $X_b = X_a$ (7) నుండి

$$\omega_1 = \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \cdots\cdots\cdots(10)$$

ఈ స్థితిలో రెండు లోలకముల చలనాన్ని (7)వ సమీకరణము సూచించును. ఈ కోణీయ పౌనఃపున్యము పై యుగ్మ ప్రభావము యుండదు. రెండు లోలకములు ఒకే దశలో చలించును. స్ప్రింగు పొడవులో మార్పు యుండదు. కావున స్ప్రింగు ప్రభావము యుండదు. ఇది మొదటి సాధారణ కంపన స్థితి లేక మొదటి నార్మల్ మోడ్‌ను సూచించును.

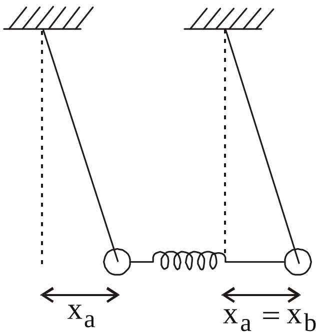
కాని అన్ని క్షణము లందు $X_a = -X_b$ గా యుండిన వ్యవస్థ చలనము (9)వ సమీకరణము ననుసరించి యుండును. (7)వ సమీకరణము $(X = 0)$ శూన్యమగును. కోణీయ పౌనఃపున్యము

$$\omega_2 = \left(\omega_0 + \frac{2K}{m}\right)^{1/2}$$

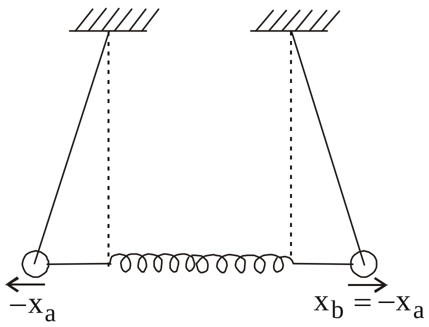
$\omega_2 > \omega_1$ కావున యుగ్మత వ్యవస్థ డోలన పౌనఃపున్యము లోలకము సహజ పౌనఃపున్యము కంటే ఎక్కువ. ఈ స్థితిలో డోలనము చేయునపుడు స్ప్రింగు పటము(11.2డి)లో వలే సంకోచము లేక వ్యాకోచము చెంది యుండును. రెండు డోలకములు వ్యతిరేక దిశలో కంపనములు చేయును. వ్యతిరేక దిశలో యుండే ఈ కంపన స్థితి రెండవ సాధారణ కంపన స్థితి లేక రెండవ నార్మల్ మోడ్‌ను సూచించును.

యుగ్మత వ్యవస్థలో రెండు డోలకములు ఒకేదశ కంపన స్థితి మరియు వ్యతిరేక దశలో కంపన స్థితులు రెండు, సాధారణ కంపన స్థితులను సూచించును. ఈ కంపన స్థితులను $(x_a + x_b)$ మరియు $(x_b - x_a)$ చలరాశులతో సూచించెదరు. ఈ చలరాశులను సాధారణ నిరూపకములందురు. ఈ నిరూపకములలో మార్పులు ఒక దానిపై ఒకటి ఆధారపడకుండా స్వతంత్రముగా యుండును. ఈ సాధారణ నిరూపకముల ప్రత్యేక అభిలక్షణ పౌనఃపున్యము యుండును. ఈ పౌనఃపున్యములనే సాధారణ రీతి పౌనఃపున్యము అందురు.

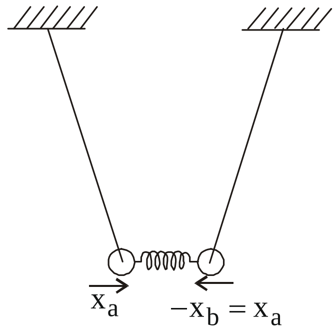
మొదటి సాధారణ కంపన స్థితి **రెండవ సాధారణ కంపన స్థితి**



పటం 11.2(సి)



పటం 11.2(డి)



పటం 11.2(ఇ)

యుగ్మత డోలకాల కంపనములలో ప్రతి లోలకపు కంపన పరిమితి కోణీయ పౌనఃపున్యముల అధ్యయనం

$X_a + X_b = X$ మరియు $X_b - X_a = Y$ అయినపుడు

(7) మరియు (9) సమీకరణముల నుండి

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \omega_1^2 X = 0 \qquad \omega_1 = \omega_0$$

మరియు $$\frac{d^2Y}{dt^2} + \omega_2^2 Y = 0 \qquad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2K}{m}}$$

పై సమీకరణములకు వీలయ్యే సాధన

$$X = X_a + X_b = X_0 \cos \omega_1 t \cdots\cdots\cdots(11)$$

$$Y = X_b - X_a = Y_0 \cos \omega_2 t \cdots\cdots\cdots(12)$$

(11) + (12) వలన

$$X_b = \frac{X_0}{2} \cos \omega_1 t + \frac{Y_0}{2} \cos \omega_2 t \cdots\cdots\cdots(13)$$

(11) - (12) వలన

$$X_a = \frac{X_0}{2} \cos \omega_1 t - \frac{Y_0}{2} \cos \omega_2 t \cdots\cdots\cdots(14)$$

$t = 0$ అయినపుడు

$X_b = \frac{X_0}{2} + \frac{Y_0}{2} = A_0$ అనుకొందుము.

$X_a = \frac{X_0}{2} - \frac{Y_0}{2} = 0$ కావున

$X_0 = Y_0 = A_0$

$$\therefore X_b = \frac{A_0}{2}(\cos\ \omega_1 t + \cos\ \omega_2 t)$$

$$X_a = \frac{A_0}{2}(\cos\ \ \omega_1 t - \cos\ \omega_2 t)$$

$$X_a = A_0\left[\sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)t \cdot \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)t\right] \cdots\cdots\cdots\cdots (15)$$

$$X_b = A_0\left[\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)t \cdot \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)t\right] \cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

పై సమీకరణలననుసరించి

ప్రతి లోలకము యొక్క పౌనఃపున్యము $\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)$గా యుండును.

మొదటి లోలకపు కంపన పరిమితి

$$A_1 = A_0 \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)t$$

రెండవ లోలకపు కంపన పరిమితి

$$A_2 = A_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)t$$

కావున ప్రతి లోలకపు కంపన పరిమితులు ఆవర్తనముగా మారును. రెండు లోలకములు కంపన పరిమితులు వ్యతిరేక దశలోయున్నవి కావున ఏదైనా ఒక క్షణములో A_1 గరిష్ఠమయినపుడు A_2 కనిష్ఠముగా యుండును. అనగా మొదటి లోలకము కంపన పరిమితి గరిష్ఠముగా కంపించుచున్నపుడు రెండవ లోలకము కంపన కనిష్ఠముగా యుండును. ఆవర్తనముగా రెండవ లోలకము కంపన పరిమితి గరిష్ఠముగాను, మొదట లోలకము కంపన పరిమితి కనిష్ఠమగును. అనగా యుగ్మతమైన రెండు వ్యవస్థలలో ఒకటి ఆశయముగా మరియొకటి సింక్‌గా ప్రవర్తించును.

11.3 సాధారణ కంపనరీతి నిరూపకములు - సాధారణ కంపనరీతి పౌనఃపున్యములు

సాధారణ కంపనరీతి నిరూపకములు : ఒక యుగ్మత వ్యవస్థ చలనమును స్థిర గుణకముల పరంగా వ్రాసిన రేఖీయ అవకలన సమీకరణముల సమితితో సూచించెదరు. ఒక్కొక్క అవకలన సమీకరణము ఒక అస్వతంత్ర చలరాశితో ప్రకటింపబడి యుండవలెను. ఆ అస్వతంత్ర చలరాశులను యుగ్మిత వ్యవస్థ సాధారణ కంపనరీతి నిరూపకములు అందురు. యుగ్మత లోలకములలో $X=\left(X_a+X_b\right)$ మరియు $Y=\left(X_b-X_a\right)$ లు సాధారణ కంపనరీతి నిరూపకములను సూచించును.

సాధారణ కంపనరీతి పౌనఃపున్యములు : ఒక్కొక్క సాధారణ నిరూపకములో ఒక సరళ హరాత్మక చలనములో యుండును. యుగ్మత వ్యవస్థలో ఒక్కొక్క సాధారణ నిరూపకముతో ముడిపడి యున్న ఒక సరళ హరాత్మక చలనమును సాధారణ కంపన రీతి అందురు. యుగ్మత లోలకములో $X_b=X_a$ గా యున్నపుడు రెండు లోలకములు ఒకే దశలో కంపనము చేయును. ఇది సమదశా కంపన రీతి (మొదటి సాధారణ కంపన రీతి) $X_b=-X_a$ గా యున్నపుడు రెండు లోలకములు వ్యతిరేక దశలో కంపించును. ఇది వ్యతిరేక దశా కంపన రీతి లేక రెండవ సాధారణ కంపనరీతి పౌనఃపున్యములు.

ప్రతి కంపన రీతిలో ఒక ప్రత్యేక పౌనఃపున్యము గలిగియుండును. ఈ పౌనఃపున్యమును సాధారణ కంపన రీతి పౌనః పున్యములు అందురు. రెండు యుగ్మత లోలకములలో ω_1, ω_2 లు సాధారణ కంపన రీతి పౌనఃపున్యములు సూచించును.

యుగ్మత (డోలకము) డోలకముల సాధారణ కంపన రీతులు

రెండు యుగ్మిత లోలకముల చలనములను క్రింది సమీకరణములు సూచించునని చదివితిమి.

$$\frac{d^2X_a}{dt^2}=-\omega_0^2X_a+\frac{K}{m}\left(X_b-X_a\right)\cdots\cdots\cdots(1)$$

m లోలకము ద్రవ్యరాశి

$$\frac{d^2X_b}{dt^2}=-\omega_0^2X_b-\frac{K}{m}\left(X_b-X_a\right)\cdots\cdots\cdots(2)$$

సాధారణ కంపన రీతులు కనుగొనుటకు (1), (2) సమీకరణములను సాధింపవలెను. ఒక ప్రత్యేక కంపన రీతిలో కోణీయ పౌనఃపున్యములు మరియు దశా భేదము ϕ అయిన అనగా రెండు లోలకములు ఒకే కోణీయ పౌనఃపున్యము, ఒకే దశా భేదముతో కంపనములు చేయుచున్నవి అనుకొనుము. అయిన

$$X_a=A\cos\left(\omega t+\phi\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$X_b=B\cos\left(\omega t+\phi\right)\cdots\cdots\cdots(4)$$

A, B లు రెండు లోలకముల కంపన పరిమితులు సూచించును.

(3), (4) సమీకరణములను కాలము పరముగా రెండుమార్లు అవకలనము చేసిన

$$\frac{d^2X_a}{dt^2}=-\ \omega^2A\cos\left(\omega t+\phi\right)=-\omega^2X_a$$

$$\frac{d^2X_b}{dt^2} = -\omega^2 B \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 X_b$$

పై విలువలను (1), (2) సమీకరణములలో ప్రతిక్షేపించిన

$$-\omega^2 X_a = -\omega_0^2 X_a + \frac{K}{m}(X_b - X_a)$$

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{K}{m}\right) X_a = \frac{K}{m} X_b \cdots\cdots(5)$$

అదే విధముగా

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{K}{m}\right) X_b = \frac{K}{m} X_a \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

(5)వ సమీకరణము నుండి

$$\frac{X_b}{X_a} = \frac{\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{K}{m}\right)}{K/m} \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

(6)వ సమీకరణము నుండి

$$\frac{X_b}{X_a} = \frac{K/m}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{K}{m}\right)} \cdots\cdots(8)$$

(7) మరియు (8) సమీకరణముల నుండి

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{K}{m}}{\frac{K}{m}} = \frac{\frac{K}{m}}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{K}{m}\right)}$$

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{K}{m}\right)^2 = \left(\frac{K}{m}\right)^2$$

$$\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{K}{m} = \pm \frac{K}{m}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{K}{m} \mp \frac{K}{m}$$

కావున పై సమీకరణము నుండి ω విలువలు రెండు యుండను. అవి ω_1 మరియు ω_2 అనుకొనిన

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 \cdots\cdots(9)$$

మరియు $\omega_2^2 = \omega_0^2 + \frac{2K}{m} \cdots\cdots\cdots(10)$ కావున

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2}$$

మరియు $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2K}{m}}$

ω_1, ω_2 లు రెండు సాధారణ కంపన రీతి కోణీయ పౌనఃపున్యములు సూచించును.

(5) మరియు (6) సమీకరణముల నుండి $\omega_1 = \omega_0$ అయిన $X_a = X_b$ మరియు $A = B$ అగును. అనగా రెండింటి కంపనములు ఒకే దశలో యుండును.

$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2K}{m}}$ అయినపుడు (5) లేక (6) నుండి $X_a = -X_b$ లేక $A = -B$ అగును. అనగా వ్యతిరేక దశలో కంపనములు చేయును.

కావున ప్రతి సాధారణ కంపన రీతి పౌనఃపున్యమునకు దాని అభిలక్షణ దశా స్థిరాంకము యుండును.

మొదటి సామాన్య కంపన రీతిలో $\omega_1^2 = \omega_0^2$ విలువను (7) లేక (8)లో ప్రతిక్షేపించిన

$$\left(\frac{X_a}{X_b}\right)_1 = \frac{B}{A} = 1 \cdots\cdots\cdots(11)$$

ఈ కంపన రీతిలో డోలకము స్థానభ్రంశము

$$(X_a)_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \cdots\cdots(12)$$

$$(X_b)_1 = B_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \cdots\cdots(13)$$

A_1 , B_1 లు కొత్త కంపన పరిమితులు ϕ_1 తొలి దశను సూచించును.

అదే విధముగా రెండవ కంపన రీతిలో $\omega_2^2 = \omega_0^2 + \frac{2K}{m}$ అయిన (7) లేక (8) నుండి

$$\left(\frac{X_a}{X_b}\right)_2 = \frac{B}{A} = -1$$

ఈ కంపన రీతిలో డోలకము స్థానభ్రంశము

$$(X_a)_2 = A_2 \mathrm{Cos}(\omega_2 t + \phi_2) \cdots\cdots(14)$$

$$(X_b)_2 = B_2 \mathrm{Cos}(\omega_2 t + \phi_2) \cdots\cdots(15)$$

అయిన A_2, B_2 లు ఈ కంపన రీతిలో కంపన పరిమితులు ϕ_2 తొలి దశను సూచించును. ఈ రెండు కంపన స్థితులలో సామాన్య సాధన రెండు కంపన రీతుల ఆధ్యారోపణ వలన ఏర్పడును.

$$X_a = (X_a)_1 + (X_a)_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

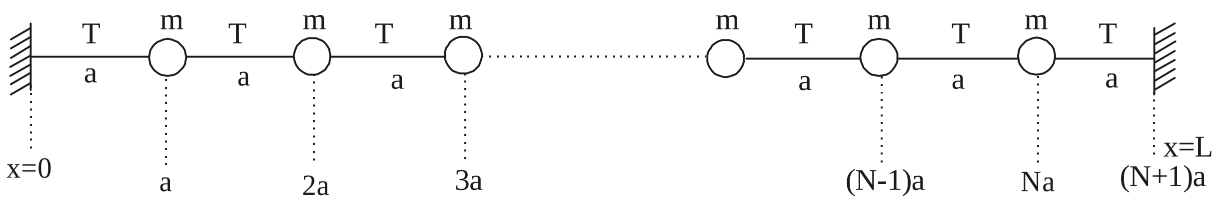
$$X_b = (X_b)_1 + (X_b)_2 = B_1 \cos(\omega_1 t + \phi) + B_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

11.4 N యుగ్మిత డోలకములు, సాధారణ కంపనరీతులు - N యుగ్మిత డోలకపు తిర్యక్ కంపనములు

ఘన పదార్థాలలో, స్ఫటికాలలో పరమాణువుల మధ్య సంసంజన బలాలతో బంధింపపడి యుగ్మత డోలకాలుగా పని చేయును. జంట యుగ్మత డోలకముల సిద్ధాంతమును ఇటువంటి N యుగ్మత డోలకవ్యవస్థకు అనువర్తించి విశ్లేషణ చేయవచ్చును.

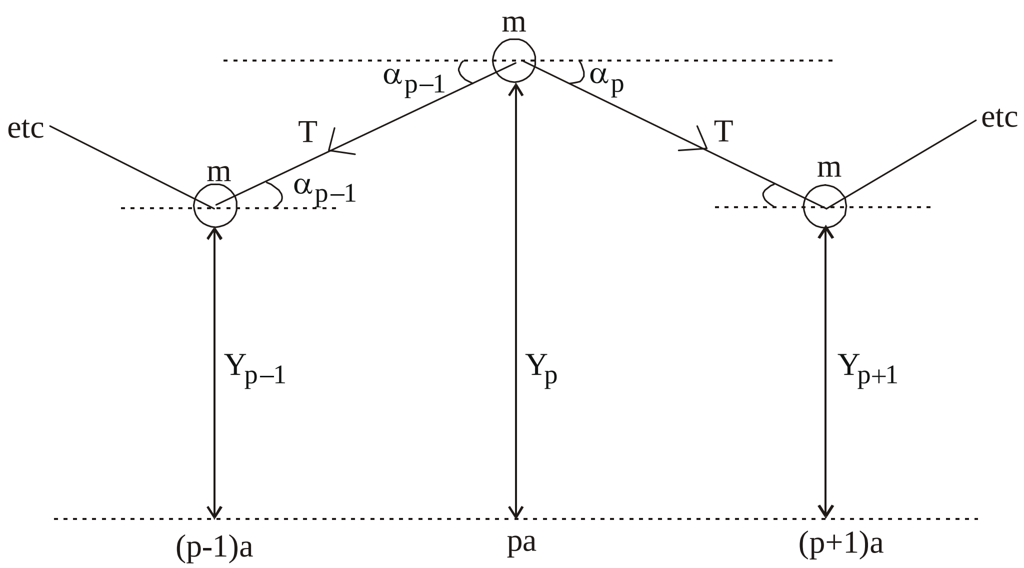
తక్కువ ద్రవ్యరాశి కలిగి అదృఢ స్థితిస్థాపక దారానికి N సర్వ సమాన కణాలు సమాన దూరాలలో సంధింపబడి ఉన్నవనుకొనుము. ప్రతి కణము ద్రవ్యరాశి 'm' రెండు వరుస కణాల మధ్య దూరము 'a' అనుకొనుము. L పొడవు గల దారము రెండు చివరలను దృఢమైన ఆధారాలకు స్థిరముగా బిగించి యుండుట వలన అన్ని బిందువుల వద్ద ఒకే తన్యత 'T' ఏర్పడును. కణాల యొక్క స్థానములు $x = a, 2a, 3a \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots Na$ పటము 11.3లో వలే యున్నవనుకొనుము.

దారము పొడవు $L = (N+1)a$



పటము 11.3

ఈ కణములు తిర్యక్ దిశలో స్వల్ప కంపన పరిమితితో కంపనములు చేయించినపుడు ఒక క్షణంలో P, $(P-1), (P+1)$ కణముల స్థానములు పటము 11.4లో చూపబడినవి.



పటము 11.4

చలన సమీకరణము : $P, (P-1), (P+1)$ కణముల తిర్యక్ స్థానభ్రంశములు తుల్య స్థితి నుండి $Y_p, Y_{(p-1)}, Y_{(p+1)}$ అనుకొనుము. కణము 'P' N కణములలో ఏదైనా కావచ్చు $P = 1, 2, 3, \cdots\cdots (N-1), N$

P పై చర్య జరిపే తన్యత ఆధారముగా చలన సమీకరణమును నేర్పరచవచ్చును. P ని సమతాస్థితిలోనికి రావడానికి $P, (P-1)$ మరియు $P, (P+1)$ కణాల మధ్య పోగులో చర్య జరిపే తన్యతా బలాల లంబాంశములు పని చేయును. P కణము పై చర్య జరిపే ఫలిత బలము F_p అయిన

$$F_p = -\left(T \sin\alpha_{p-1} + T \sin\alpha_p\right)$$

కాని $\sin\alpha_{p-1} = \tan\alpha_{p-1} = \dfrac{Y_p - Y_{p-1}}{a}$ (α తక్కువయిన $\sin\alpha = \tan\alpha$)

$$\sin\alpha_p = \tan\alpha_p = \frac{Y_p - Y_{p+1}}{a}$$

$$F_p = -\frac{T}{a}\left(\frac{Y_p - Y_{p-1}}{a} + \frac{Y_p - Y_{p+1}}{a}\right)$$

$$= \frac{T}{a}\left(Y_{p+1} + Y_{p-1} - 2Y_p\right)$$

P కణ ద్రవ్యరాశి 'm', త్వరణము $\dfrac{d^2Y_p}{dt^2}$ అయిన

$$F_p = m\frac{d^2Y_p}{dt^2} = \frac{T}{a}\left(Y_{p+1} + Y_{p-1} - 2Y_p\right)$$

$$\frac{d^2Y_p}{dt^2} = \frac{T}{ma}\left(Y_{p+1} + Y_{p-1} - 2Y_p\right) \cdots\cdots (1)$$

ఇటువంటి సమీకరణము N కణాలలో ఏ కణమునకైనా p విలువను $P = 1, 2, \cdots\cdots\cdots N$ గా తీసికొని వ్రాయవచ్చును. కావున N కణములకు N సమీకరణములు యుండును.

పోగు రెండు చివరల స్థిరముగా బిగించబడి యుండుటచే సీమా స్థితి

$$X = 0,\ Y_0 = 0$$

$X = (N+1)a,\ Y_{(N+1)} = 0$ అగును.

సామాన్య కంపన రీతులు - సామాన్య కంపన రీతుల విశ్లేషణకు, ఒక కంపన రీతి పౌనఃపున్యము మరియు దశా స్థిరాంకము ϕ అనుకొనిన

ఒక సామాన్య కంపన రీతిలో అన్ని కణములు ఒకే కంపన పౌనఃపున్యము, దశా స్థిరాంకము కలిగి యుండును. p కణము స్థానభ్రంశమును

$$Y_p = A_p \cos(\omega t + \phi) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

p హరాత్మక డోలకము కంపన పరిమితి A_p సూచించును.

అదే విధముగా $$Y_{p-1} = A_{(p-1)} \cos(\omega t + \phi) \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$Y_{p+1} = A_{(p+1)} \cos(\omega t + \phi) \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

ఈ విలువలను (1)లో ప్రతిక్షేపించిన

$$-\omega^2 A_p \cos(\omega t + \phi) = \frac{T}{ma}\left[A_{p+1} + A_{p-1} - 2A_p\right]\cos(\omega t + \phi)$$

$$-\omega^2 A_p = \frac{T}{ma}\left[A_{p+1} + A_{p-1} - 2A_p\right]$$

$$A_{p+1} + A_{p-1} = A_p\left(2 - \frac{\omega^2 ma}{T}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

సీమతాస్థితుల నుండి $A_0 = 0$ మరియు $A_{n+1} = 0$ కావున (5) నుండి N సమీకరణముల సమితి ఏర్పడును. వాటిని సాధించిన వీలయ్యే కంపన రీతుల పౌనఃపున్యములు లెక్కించవచ్చును. వీలయ్యే కంపన రీతుల సంఖ్య, హరాత్మక డోలకముల సంఖ్యకు సమానము.

N సమీకరణముల సాధనకు మాత్రిక పద్ధతినుపయోగించ వలసి యుండును. $N = 1$ లేక $N = 2$ అయిన సరళ వ్యవస్థలో ఆ పౌనఃపున్యములను సులభంగా సాధించవచ్చును.

$N=1$ అయిన ఒకే ద్రవ్యరాశి m , $2a$ పొడవు గల స్ప్రింగు మధ్య భాగించబడి యుండును. $P=1$ అయిన (5)వ సమీకరణము నుండి

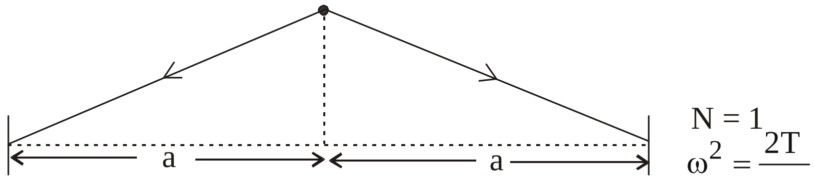
$$A_1\left(2 - \frac{\omega^2 ma}{T}\right) = A_2 + A_0$$

స్ప్రింగు రెండు చివరలు స్థిరంగా బిగించి యుండుట వలన $A_0 = A_2 = 0$ అయిన

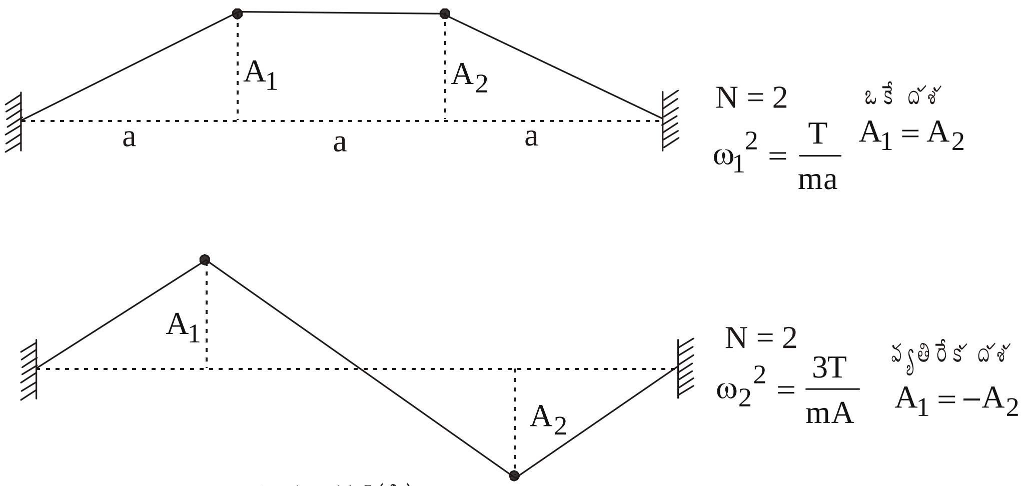
$$\left(2 - \frac{\omega^2 ma}{T}\right)A_1 = 0 \qquad (A_1 \neq 0) \text{ కావున}$$

లేక $$\omega^2 = \frac{2T}{ma} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

సరళ హరాత్మక డోలకమునకు ఒకే పౌనఃపున్యము వీలగును. ఇది పటము 11.5(ఎ)లో చూపబడినది.



పటము 11.5(ఎ)



పటము 11.5(బి)

$N = 2$ అయిన (5) నుండి

$P = 1$ మరియు $P = 2$ అయిన

$$\left(2 - \frac{\omega^2 ma}{T}\right) A_1 - A_2 - A_0 = 0 \cdots\cdots\cdots (7)$$

మరియు $$\left(2 - \frac{\omega^2 m \propto}{T}\right) A_2 - A_3 - A_1 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

సీమా స్థితుల నుండి $A_0 = A_3 = 0$ (స్థిర బిందువులు)

(7), (8) సమీకరణముల నుండి

$$\left(2 - \frac{\omega^2 ma}{T}\right) A_1 = A_2$$

మరియు $$\left(2 - \frac{\omega^2 ma}{T}\right) A_2 = A_1$$ అగును.

అయిన $\frac{A_2}{A_1}=\left(2-\frac{\omega^2 ma}{T}\right)=\frac{1}{\left(2-\frac{\omega^2 ma}{T}\right)}$ అగును.

లేక $\left(2-\frac{\omega^2 ma}{T}\right)^2 = 1$

$$2-\frac{\omega^2 ma}{T}=\pm 1$$

$$2-\frac{\omega^2 ma}{T}-1=1-\frac{\omega^2 ma}{T}=0 \text{ మరియు}$$

$$2-\frac{\omega^2 ma}{T}+1=3-\frac{\omega^2 ma}{T}=0 \text{ లు}$$

రెండు కంపన రీతుల పౌనఃపున్యములు సూచించును.

అనగా $\omega_1^2=\frac{T}{ma}$

మరియు $\omega_2^2=\frac{3T}{ma}$

మొదటి కంపన రీతి పౌనఃపున్యము $\omega=\omega_1$ అయిన $\frac{A_2}{A_1}$ ఒకే దశ కలిగి యుండును. రెండవ కంపన రీతి పౌనః పున్యము $(\omega=\omega_2)$ అయినపుడు $\frac{A_2}{A_1}=-1$ వ్యతిరేక దశను సూచించును. ఇది 11.5(బి)లో చూపబడినది.

N డోలకముల సామాన్య సాధనకు (5)వ సమీకరణమును క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును.

$$\frac{A_{p-1}+A_{p+1}}{A_p} = 2-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

$\omega_0^2=\frac{T}{ma}$ లేక $\omega_0=\sqrt{\frac{T}{ma}}$ సూచించును.

ఏదైనా ఒక కంపన రీతి పౌనఃపున్యములుకు (9)వ సమీకరణము కుడి వైపు విలువ స్థిరము. దీని విలువ p సంఖ్య పై ఆధారపడదు. కావున (8)వ సమీకరణము ఎడమ వైపు నిష్పత్తి కూడా స్థిరముగా యుండును. ఈ విలువ p సంఖ్య పై ఆధారపడదు. ఈ విలువ $p=1$ నుండి $P=N$ వరకు వర్తించును. మరియు $A_0=A_{N+1}=0$ గా యుండును. (సీమా స్థితి)

P కణము కంపన పరిమితి క్రింది సమీకరణముతో సూచించవచ్చును.

$$A_P = C \ \sin P\theta \cdots\cdots\cdots(10)$$

C ఒక స్థిరరాశి మరియు ω_n పౌనఃపున్యమునకు θ ఒక స్థిర కోణము, P ప్రక్కన రెండు వైపులా గల కణములు $(P-1), (P+1)$ స్థానభ్రంశములు.

$$A_{p-1} = C \sin (P-1)\theta$$

$A_{P+1} = C \sin (P+1)\theta$ గా సూచించవచ్చును.

$$A_{P-1} + A_{P+1} = C\{\sin(P-1)\theta + \sin(P+1)\theta\}$$

$$= 2C \sin P\theta \cos\theta$$

కావున $\dfrac{A_{P-1} + A_{P+1}}{A_P} = \dfrac{2C \sin P\theta \cos\theta}{C \sin P\theta} = 2\cos\theta \cdots\cdots\cdots(11)$

కావున ఈ నిష్పత్తి విలువ P పై ఆధారపడదు. మరియు (10)వ సమీకరణము సాధనను సూచించును. ఇది N డోలకముల సమీకరణములను తృప్తిపరుచును. సీమా స్థితులనను వర్తింప చేసి 'θ' విలువను లెక్కింప వచ్చును.

$A_P = 0$ for $P = 0$ మరియు $P = N+1$

దీనిని తృప్తిపరచవలెనన్న $(N+1)\theta$ అనునది θ యొక్క పూర్ణాంక గుణిజము అయివుండవలెను. అనగా

$$(N+1)\theta = n\pi \qquad n = 1, 2, 3, \cdots\cdots\cdots$$

లేక $\theta = \dfrac{n\pi}{N+1} \cdots\cdots(12)$

θ విలువను (10)లో ప్రతిక్షేపించిన $A_P = c\sin\left(\dfrac{Pn\pi}{N+1}\right)$ ----------- (13)

ఇది ఒక కంపన రీతి పౌనఃపున్యములు nకు P కణము యొక్క కంపన పరిమితి సూచించును. అయిన వీలయ్యే కంపన రీతి పౌనఃపున్యములు (9) నుండి (13) వరకు సమీకరణములతో నిర్ణయించవచ్చును.

ω_n విలువ నిర్ణయించుటకు,

$$\frac{A_{P-1} + A_{P+1}}{A_P} = \frac{2\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = 2\cos\frac{n\pi}{N+1}$$

$$2\omega_0^2 - \omega^2 = 2\omega_0^2 \cos\left(\frac{n\pi}{N+1}\right)$$

$$\omega^2 = 2\omega_0^2\left[1 - \cos\left(\frac{n\pi}{N+1}\right)\right]$$

$$= 4\omega_0^2 \sin^2\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right]$$

$$\omega = 2\omega_0 \sin\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right]\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

(14)వ సమీకరణమును అన్ని వీలయ్యే పౌనఃపున్యములకు అనువర్తిస్తూ క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును.

$$\omega_n = 2\omega_0 \sin\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right]$$

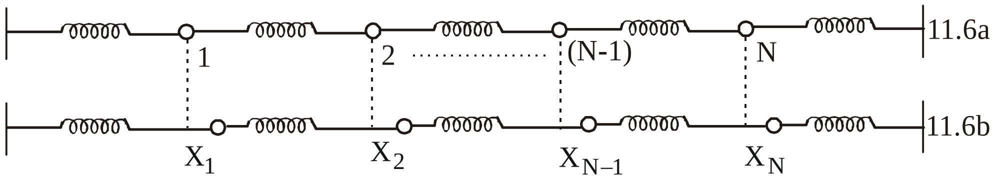
లేక $$\omega_n = 2\sqrt{\frac{T}{ma}}\sin\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right]$$

ప్రతి పౌనఃపున్యము (ω_n)కు P కణము కంపన పరిమితి

$$A_P = C\sin\left(\frac{Pn\pi}{N+1}\right)$$

11.5 N యుగ్మ డోలకముల అనుదైర్ఘ్య కంపనములకు సామాన్య కంపన రీతులు పౌనఃపున్యము

N కణముల యుగ్మిత వ్యవస్థలో అనుదైర్ఘ్య కంపనములను పరిశీలించెదము. $'m'$ ద్రవ్యరాశి గల N కణములు, సమాన దూరములు (a) వరుస కణముల మధ్య దూరము సమానముగా $'a'$ యుండునట్లు సాగపడే స్థితిస్థాపక $(N+1)$ పోగులచే పటములో **(11.6ఎ)** వలే యుగ్మత వ్యవస్థ గలదు అనుకొనుము.



ధ్వని తరంగములు గాలిలో అనుదైర్ఘ్య తరంగములు కావున ఈ విశ్లేషణ ధ్వని తరంగ ప్రసారము అవగాహనకు ఉపయోగపడును.

అనుధైర్ఘ్య కంపన స్థితిలో ప్రతి కణము **11.6 (బి)**లో వలే $X_1, X_2, \cdots\cdots X_N$ స్థానభ్రంశములు పొంది యున్నావనుకొనుము.

P కణము యొక్క స్థానభ్రంశము

$$m\frac{d^2P}{dt^2} = K\left(X_{P+1} - X_P\right) - K\left(X_p - X_{P-1}\right)$$

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \frac{K}{m}\left[X_{P+1} + X_{P-1} - 2X_P\right]\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ఇది (11.4)లోని తిర్యక్ కంపన విశ్లేషణలో (1)వ సమీకరణము వలే యున్నది. ఇచట $\left(\frac{T}{a}\right)$ బదులుగా స్ప్రింగు స్థిరాంకము K యున్నది. కావున 11.4లోని తిర్యక్ కంపన స్థితుల సాధనలో $\left(\frac{T}{a}\right)$కి బదులుగా K యుంచిన అనుదైర్ఘ్య కంపన స్థితుల సాధన సూచించును.

n వ సామాన్య కంపన రీతి పౌనఃపున్యము 'ω_n'

$$\omega_n = 2\omega_0 \sin\left(\frac{n\pi}{2(N+1)}\right)$$

ఇచట $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$

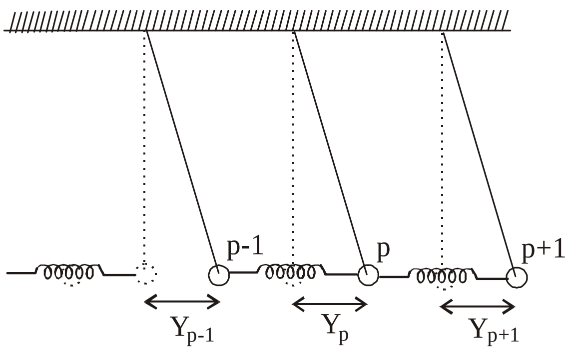
కణముల కంపన పరిమితి

$A_P = C\sin\left(\frac{P n\pi}{N+1}\right)$ సూచించును.

$P = 1, 2, 3, \cdots\cdots\cdots\cdots, N$

11.6 N యుగ్మత డోలకము తరంగ సమీకరణము :-

N డోలకములు యుగ్మతయై యున్నవి అనుకొనుము. పటము 11.7లో $(P-1)$, P మరియు $(P+1)$ లోలకములు మాత్రము చూపబడినవి.



పటము 11.7

వీటి స్థానభ్రంశములు Y_{P-1}, Y_P మరియు Y_{P+1} అనుకొనుము.

N యుగ్మిత లోలకము తరంగ సమీకరణము రాబట్టుటకు P లోలకము పై చర్య జరిపే బలాలను పరిశీలించెదము.

(1) గురుత్వాకర్షణ వలన పునఃస్థాపక బలము

$$-mg\sin\theta = -mg\left(\frac{Y_P}{\ell}\right) = -m\left(\frac{g}{\ell}\right)Y_P$$

'ℓ' లోలకము పొడవు. $= -m\omega_0^2 Y_P$ $\left(\because \omega_0^2 = \frac{g}{\ell}\right)$

(2) P యొక్క స్థానభ్రంశమును, P కి కుడివైపు స్ప్రింగు తన్యత వలన పెరుగును. ఈ బల పరిమాణము $= K\left(Y_{P+1} - Y_P\right)$, K బల స్థిరాంకము.

(3) P యొక్క స్థానభ్రంశమును, P కి ఎడమ వైపు స్ప్రింగు తన్యత వలన తగ్గును. ఈ బల పరిమాణము $= -K\left(Y_P - Y_{P-1}\right)$

ఫలిత బలము

$$F = -m\omega_0^2 Y_P + K\left(Y_{P+1} - Y_P\right) - K\left(Y_P - Y_{P-1}\right)$$

కాని $$F = m\frac{d^2Y_P}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2Y_P}{dt^2} = -m\omega_0^2 Y_P + K\left(Y_{p+1} - Y_P\right) - K\left(Y_P - Y_{P-1}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

టేలర్ శ్రేణిననుసరించి

$$Y_{P+1}(t) = Y(x+a,\ t)$$

$$= Y(X,t) - a\frac{\partial Y}{\partial x}(X,t) + \frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}(X,t) + \cdots\cdots$$

కావున

$$Y_{P+1} - Y_P = a\frac{\partial Y}{\partial X} + \frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} \text{ ------- } (2)$$

మరియు $$Y_P - Y_{P-1} = a\frac{\partial Y}{\partial X} - \frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} \text{ ------- } (3)$$

(1), (2), (3) సమీకరణముల నుండి

$$m\frac{\partial^2 Y_P}{\partial t^2} = m\omega_0^2 Y(x,t) + Ka^2\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}(x,t)$$

$$\frac{\partial^2 Y_P}{\partial t^2} = -\omega_0^2 Y(x,t) + \frac{Ka^2}{m}\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}(x,t) \cdots\cdots\cdots (4)$$

ఇది n యుగ్మిత లోలకమునకు తరంగ సమీకరణమును సూచించును.

11.7 తరంగ సమీకరణము

యుగ్మిత లోలకముల కంపన వ్యవస్థను అవిచ్ఛిన యానకములో తరంగ ప్రసారమునకు తుల్యమని చూపవచ్చును.

n యుగ్మిత డోలకములో P కణము యొక్క గమనము.

$$\frac{d^2Y_P}{dt^2}=\frac{T}{m\ell}\left[Y_{P+1}-2Y_P+Y_{P-1}\right]\cdots\cdots\cdots(1)$$ అని తెలియును.

వరుస కణముల మధ్య దూరము $a=\delta X$ అనుకొనిన $\delta X\to 0$ అయిన కణములన్నియు అవిచ్ఛిన్న యానకముగా ప్రవర్తించును.

$$\frac{\partial^2 Y_P}{\partial t^2}=\frac{T}{m}\left[\frac{Y_{P+1}-Y_P}{\delta X}-\frac{Y_P-Y_{P-1}}{\delta X}\right]$$

$$=\underset{\delta X\to 0}{Lt}\ \frac{T}{m}\left[\left(\frac{\delta Y}{\delta X}\right)_{P+1}-\left(\frac{\delta Y}{\delta X}\right)_P\right]$$

అవకలన గణితము నుండి

$$\left(\frac{\delta Y}{\delta X}\right)_{P+1}-\left(\frac{\delta Y}{\delta X}\right)_P=\frac{\partial^2 Y}{\partial^2 X^2}dx$$ అగును.

కావున

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}=\frac{T}{\left(\frac{m}{dx}\right)}\cdot\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}$$ అగును

లేక $$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}=\frac{T}{m'}\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}\cdots\cdots(3)$$ m' దైర్ఘ్య సాంద్రతను సూచించును.

తరంగ సమీకరణము

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}\cdots\cdots\cdot(4)$$

కావున తరంగ వేగము $v=\sqrt{\frac{T}{m'}}$ సూచించును. యుగ్మ డోలక కంపనములు, అవిచ్ఛిన్న యానకములో తరంగ ప్రసారమునకు తుల్యమని తెలియును.

11.8 సాధించిన సమస్యలు

1. సోడియం క్లోరైడు అణువు యొక్క సహజ పౌనఃపున్యము 1.14×10^{13} Hz అయిన పరమాణు అంతర్గత బల [illegible] (Na) పరమాణువు ద్రవ్యరాశి 23amu. మరియు క్లోరిన్ (Cl) పరమాణు ద్రవ్యరాశి 35amu. (1 amu = 1.67×10^{-27} కి.గ్రా.)

సాధన : $m_1 = 23\times1.67\times10^{-27}$ కి॥గ్రా॥

$m_2 = 35\times1.67\times10^{-27}$ కి॥గ్రా॥

వ్యవస్థ క్షయకృత ద్రవ్యరాశి (Reduced mass)

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = 23.18\times10^{-27} \text{ కి.గ్రా.}$$

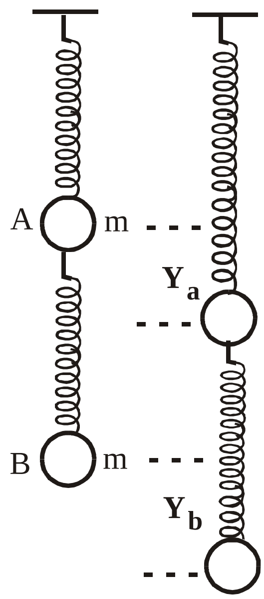
కంపన పౌనఃపున్యము $\gamma = 1.14\times10^{13}$ Hz

పరమాణు అంతర్గత బల స్థిరాంకము $\gamma = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{\mu}}$

$$K = 4\pi^2\gamma^2\mu$$

$$K = 4\pi^2\left(1.14\times10^{13}\right)^2 \times 23.18\times10^{-27} = 118.9\,\text{Nm}^{-1}$$

2. పటములో చూపిన వ్యవస్థలో సాధారణ నిరూపకములను కనుగొనుము. $K = 10\,\text{Nm}^{-1}$ మరియు $m = 1$ కి॥గ్రా॥.



(a) (b)

పటములోని వ్యవస్థ సామాన్య కంపన రీతుల పౌనఃపున్యము క్రింది సమీకరణలు సూచించును.

$$\omega^2 = \left(3 \pm \sqrt{5}\right)\frac{K}{2m}$$

ఎక్కువ పౌనఃపున్యము గల సామాన్య రీతి కంపన పౌనఃపున్యము

$$\omega_1{}^2 = \left(3 + \sqrt{5}\right)\frac{K}{2m}$$

తక్కువ రీతి పౌనఃపున్యము గల సామాన్య రీతి కంపన పౌనఃపున్యము

$$\omega_2{}^2 = \left(3 - \sqrt{5}\right)\frac{K}{2m}$$

A, B ల కంపన పరిమితి నిష్పత్తులు.

ఎక్కువ పౌనఃపున్యము గల సామాన్య రీతిలో = $-\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$

తక్కువ పౌనఃపున్యము గల సామాన్య రీతిలో = $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$

కావున సామాన్య రీతి పౌనఃపున్యములు

$$\omega_1 = \left\{\left(3-\sqrt{5}\right)\frac{K}{2m}\right\}^{1/2} = 1.95 \text{ రేడియన్లు/సెకను.}$$

$$\omega_2 = \left\{\left(3+\sqrt{5}\right)\frac{K}{2m}\right\}^{1/2} = 5.12 \text{ రేడియన్లు / సెకను.}$$

గమనము యొక్క సామాన్య సమీకరణములు

$$y_a = A_1\cos\left(\omega_1 t + \phi_1\right) + A_2\cos\left(\omega_2 t + \phi_2\right)$$

$$y_b = B_1\cos\left(\omega_1 t + \phi_1\right) + B_2\cos\left(\omega_2 t + \phi_2\right)$$

కాని $\frac{B_1}{A_1} = \frac{\frac{K}{m}}{\frac{K}{m} - \omega_1{}^2} = \frac{10}{10-(1.95)^2} = 1.62$

మరియు $\frac{B_2}{A_2} = \frac{\frac{K}{m}}{\frac{K}{m} - \omega_2{}^2} = \frac{10}{10-(5.12)^2} = 0.62$

కావున $y_a = A_1 \cos(1.95t + \phi_1) + A_2 \cos(5.12t + \phi_2)$

$$y_b = 1.62 A_1 \cos(1.95t + \phi_1) - 0.62 A_2 \cos(5.12t + \phi_2)$$

X, Y ల కొత్త నిరూపకములు నిర్వచింపవచ్చును.

$$X = A_1 \cos(1.95t + \phi_1)$$

$$Y = A_2 \cos(5.12t + \phi_2)$$

X, Y పౌనఃపున్యములు $\omega_1 = 1.95$ రేడియన్లు/సెకను మరియు $\omega_2 = 5.12$ రేడియన్లు /సెకను గల సరళహరాత్మక చలనములను సూచించును. X, Y లు వ్యవస్థ యొక్క రెండు సామాన్య నిరూపకములు. కావున

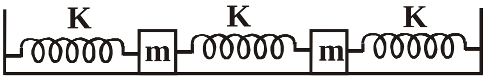
$$Y_a = X + Y$$

$$Y_b = 1.62 - 0.62Y$$

కావున $X = 0.28Y_a + 0.45Y_b$

$$Y = 0.72Y_a - 0.45Y_b$$

3. ద్రవ్యరాశి 'm' గల రెండు వస్తువులను మూడు తుల్యస్ప్రింగుల మధ్య పటములో చూపిన విధముగా రెండు స్థిర ఆధారాల మధ్య అమరియున్నది. ఒక ద్రవ్యరాశిని స్థిరంగా వుంచి రెండవ ద్రవ్యరాశిని కంపింప చేసిన 0.5హెర్ట్జ్ పౌనఃపున్యముతో కంపించును. రెండు ద్రవ్యరాశులు స్వేచ్ఛగా యున్న వ్యవస్థ పౌనఃపున్యములు కనుగొనుము.



సాధన : రెండు ద్రవ్యరాశులు స్వేచ్ఛగా కంపించుచున్నపుడు

$\omega = \sqrt{\frac{K'}{m}}$, K' స్ప్రింగ్ తుల్య స్థిరాంకము. కావున

$$K' = K + K = 2K.$$

రెండు ద్రవ్యరాశులు స్వేచ్ఛగా కంపించుచున్నపుడు యుగ్మత డోలకపు పౌనఃపున్యము

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3K}{m}}$$

కాని లెక్కలో $\omega = 0.5Hz$

$$\omega = \sqrt{\frac{2K}{m}} = 0.5Hz$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{\sqrt{\frac{K}{m}}}{\sqrt{\frac{2K}{m}}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

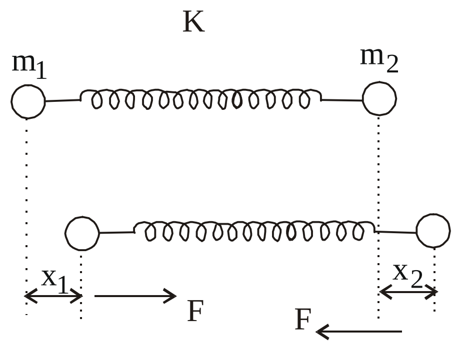
$$\omega_1 = \omega\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{0.5}{\sqrt{2}} = 0.35\text{Hz}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3K}{m}}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega} = \sqrt{\frac{3K}{m}} \Big/ \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\omega_2 = \omega\sqrt{\frac{3}{2}} = 0.5\sqrt{\frac{3}{2}} = 0.61\text{Hz}$$

4. m_1, m_2 లు రెండు ద్రవ్యరాశులను, ద్రవ్యరాశి రహిత మరియు స్ప్రింగు స్థిరాంకము K గల స్ప్రింగుకు పటములో వలే అమరియున్నవి. రెండు ద్రవ్యరాశులు స్వేచ్ఛగా స్ప్రింగు పొడవు వెంబడి కంపించునపుడు పౌనఃపున్యము $\upsilon = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{\mu}}$ అని చూపుము. క్షయకృత ద్రవ్యరాశి $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$



సాధన : కంపిస్తున్న వ్యవస్థ ఒక క్షణములో x_1 & x_2 లు ద్రవ్యరాశుల స్థానభ్రంశములు సూచించుననుకొనుము. $x_2 > x_1$ అయిన స్ప్రింగు వ్యాకోచము $(x_2 - x_1)$. ఈ స్థితిలో స్ప్రింగులో తన్యత $F = K(x_2 - x_1)$. ద్రవ్యరాశులపై చర్య జరిపే బలాలు వ్యతిరేక దిశలో యుండును. కావున చలన సమీకరణములు

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = K(x_2 - x_1) \text{ ----------- } (1)$$

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = -K(x_2 - x_1) \text{ ---------- } (2)$$

(1)వ సమీకరణమును m_2 తో మరియు (2)వ సమీకరణమును m_1తో గుణించిన

$$m_1 m_2 \frac{d^2x_1}{dt^2} = km_2(x_2 - x_1) \text{ ----------- } (3)$$

$$m_1 m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = -km_1(x_2 - x_1) \text{ -----------}(4)$$

(4) - (3)

$$m_1 m_2 \left[\frac{d^2x_2}{dt^2} - \frac{d^2x_1}{dt^2}\right] = -k(m_1 + m_2)(x_2 - x_1)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2}(x_2 - x_1) = -\frac{K}{\mu}x$$

కాని $x_2 - x_1 = x,\ \mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{\mu}x \text{ ------- } (5)$$

(5)వ సమీకణము నుంచి $\upsilon = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{K}{\mu}}$

11.8 సారాంశము

1. స్వేచ్ఛారీతి ఒకటియున్న కంపన వ్యవస్థ స్వేచ్ఛా కంపన పౌనఃపున్యము, సహజ పౌనఃపున్యము ఒక్కటి మాత్రమే యుండును.

2. చోదక, చోదిత వ్యవస్థల మధ్య శక్తి మార్పిడి యున్నప్పుడు అవి యుగ్మత వ్యవస్థలగును. ఘన పదార్థాములోని

అణువులన్నియు యుగ్మతములే. ప్రతి అణువు దాని స్థిర బిందువు పరంగా కంపనములు చేసే డోలకమే మరియు ప్రతిడోలకము కంపనములు ప్రక్కనున్న (అణువుల) డోలకముల చలనమును ప్రభావితము చేయును.

3. సామాన్య నిరూపకముల పరముగా యుగ్మత కంపన వ్యవస్థ చలనమును గుణకములతో కూడిన అవకలన ‹ ցºHÞ} =ò• ` Ë‹ ¶z ŒKÇKǷ#°. XHùøHø ‹ ցºHÞ} =ò ..ÕXHÞP^¥ ` ÇKǷ¬Œ (dependent variable) యుండును.

4. ఒక్కొక్క సామాన్య నిరూపకముతో కూడిన సరళహరాత్మక చలనము యుగ్మత వ్యవస్థ సామాన్య కంపన రీతిని సూచించును.

5. ఒక్కొక్క సామాన్య కంపన రీతిలో గల శక్తి, వేరొక సామాన్య రీతి శక్తితో వినిమయము చెందదు.

6. కంపన వ్యవస్థ సామాన్య గమనము అన్ని సామాన్య కంపన రీతుల చలనముల ఆధ్యారోపణా భావించవచ్చును.

11.9 కీలక పదములు

యుగ్మిత కంపన వ్యవస్థ, సామాన్య నిరూపకములు, సామాన్య కంపనరీతులు, సామాన్య కంపన రీతి పౌనఃపున్యములు, N - యుగ్మిత డోలకపు తరంగ సమీకరణము.

11.10 స్వయం సమీక్షా ప్రశ్నలు

లఘుప్రశ్నలు

1. యుగ్మిత కంపన వ్యవస్థ అననేమి?
2. సామాన్య కంపనరీతులు మరియు సామాన్య నిరూపకములననేమి ?
3. సామాన్య కంపనరీతుల ధర్మములు, ప్రాముఖ్యతలను తెలుపుము.
4. యుగ్మిత డోలకముల కంపనములకు, బలాత్కృత కంపనములకు గల తేడాలేవి ?
5. సామాన్య కంపనరీతి పౌనఃపున్యములపై లఘుటీకా వ్రాయుము.

వ్యాసరూప ప్రశ్నలు

6. సర్వసమముగాయున్న రెండు లఘులోలకముల గోళములు. ద్రవ్యరాశి రహిత స్థితిస్థాపకత గల స్ప్రింగుతో సంధానింపబడినపుడు వ్యవస్థ సామాన్య కంపన రీతులను కనుగొని, సామాన్య కంపనరీతి పౌనఃపున్యములకు సమీకరణములను రాబట్టుము.

7. ఒకే విధమైన N కణాలు సమాన దూరాలలో యుండునట్లు స్ప్రింగులో అమరియుంది. స్ప్రింగు రెండు చివరలు స్థిర ఆధారములకు బిగించి యున్నప్పుడు ఆ యుగ్మిత వ్యవస్థ తిర్యక్ కంపనముల సామాన్య కంపనరీతి పౌనఃపున్యములకు సమీకరణము

$$\omega = 2\omega_0 \sin\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right]$$ అని రాబట్టుము. $\omega_0 = \sqrt{\frac{T}{ma}}$

T తుల్య స్థితిలో తన్యత మరియు N = 1, 2, 3, ... N కంపనరీతులు.

8. ఒకే విధమైన N కణాలు సమాన దూరాలలో యుండునట్లు స్ప్రింగులో అమరియుండి, స్ప్రింగు రెండు చివరలు స్థిర ఆధారములకు బిగించియున్నప్పుడు ఆ యుగ్మిత వ్యవస్థ అనుదైర్ఘ్య కంపనముల సామాన్య కంపనరీతి పౌనఃపున్యములకు సమీకరణము.

$$\omega = 2\sqrt{\frac{K}{m}}\sin\left(\frac{n\pi}{2N+1}\right)$$ అని రాబట్టుము.

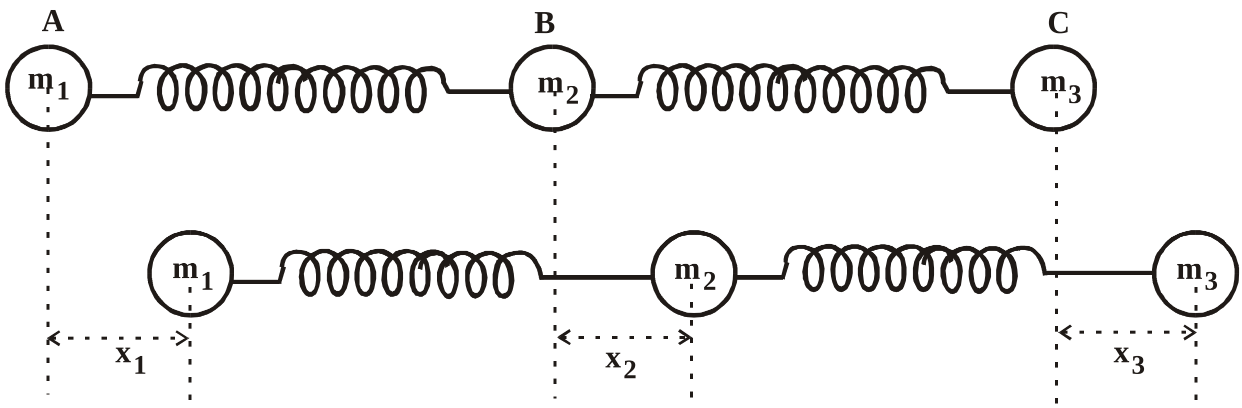
$$\sqrt{\frac{K}{m}} = \omega_0;$$ T తుల్య స్థితిలో తన్యత మరియు N = 1, 2, 3, ... N కంపనరీతులు.

9. N యుగ్మిత డోలకపు తరంగ సమీకరణము రాబట్టుము.

10. N యుగ్మిత డోలకము చలన సమీకరణమునేర్పరచి, P కణము యొక్క కంపన పరిమితికి సమీకరణము రాబట్టుము.

అభ్యాసము :

1. క్రింది పటములో చూపిన స్ప్రింగు వ్యవస్థ సామాన్య కంపనరీతి పౌనఃపున్యము 'ω_1' మరియు 'ω_2'లు కనుగొనుము.



జవాబు : $\left[\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m_1}} \quad \omega_2 = \sqrt{\left(\frac{m_2 + 2m_1}{m_1 m_2}\right)}\right]$

2. రెండు సర్వ సమానములుగా గల లఘులోలకముల గోళములు ఒక స్ప్రింగుతో కలుపబడియున్నది. లఘులోలకము పొడవు 'ℓ' స్ప్రింగు స్థిరాంకము K అయిన సామాన్యరీతి పౌనఃపున్యములు ω_1 మరియు ω_2లను కనుగొనుము.

జవాబు : $\omega_1 = \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$,

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{2K}{m}}$$

3. 0.01 కి.గ్రా మరియు 0.03 కి.గ్రా.ల ద్రవ్యరాశులను ద్రవ్యరాశి రహిత స్ప్రింగుతో సంధింపబడి యున్నవి. స్ప్రింగు స్థిరాంకము 10Nm^{-1} అయిన వాటి కేంద్రాలను కలిపే రేఖ వెంబడి ఆ ద్రవ్యరాశుల కంపన పౌనఃపున్యములను కనుగొనుము.

   జవాబు : 5.8 హెర్ట్జ్

4. HCl ద్విపరమాణు అణువు సహజ పౌనఃపున్యమును లెక్కించుము. అంతరపరమాణు బలస్థిరాంకము $5.4 \times 10^2\,\text{Nm}^{-1}$ మరియు H పరమాణు ద్రవ్యరాశి = 1.67×10^{-27} కి.గ్రా. మరియు Cl పరమాణు ద్రవ్యరాశి = 5.845×10^{-26} కి.గ్రా.

   జవాబు : 9.18×10^{13} హెర్ట్జ్

11.11 చదువదగిన గ్రంథాలు

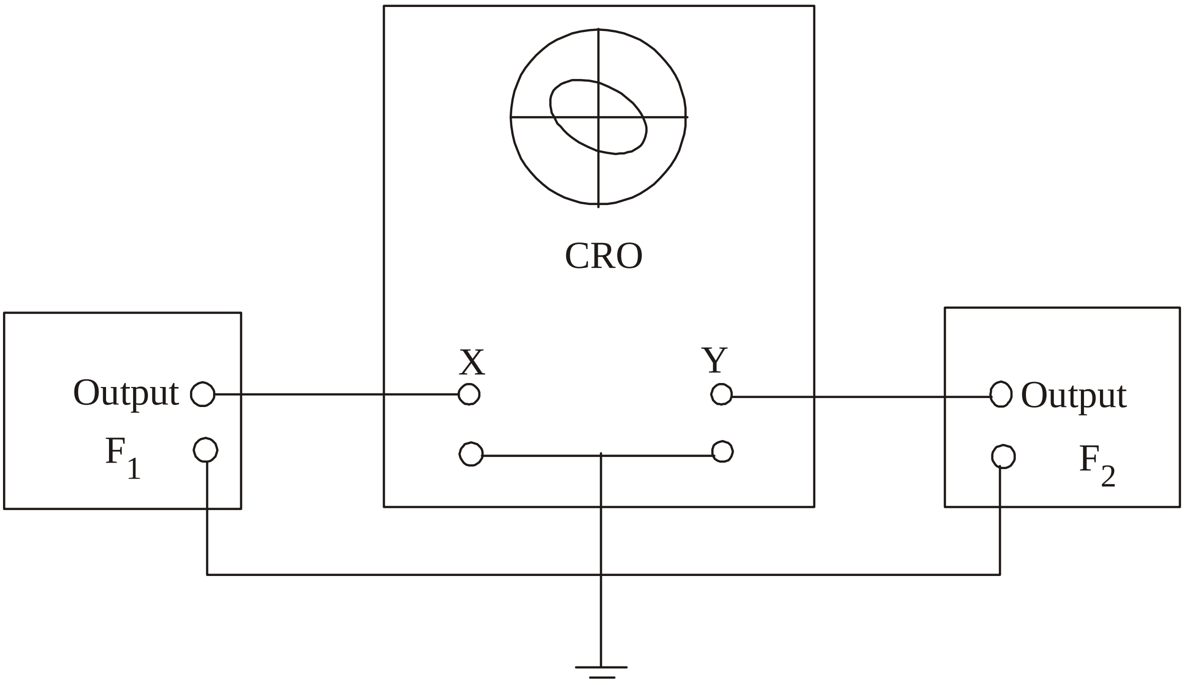
1. Academy Publication (భౌతికశాస్త్రము మొదటి సంవత్సరము)
2. Fundamentals of Acoustics by Kinsler and Frey.
3. Waves and Oscillations : S. Badani, V. Balasubramanian and K. Ramireddy (Orient Longman).

ప్రయోగము సంఖ్య - 11

లిస్సజూపటాలు

ఉద్దేశము : లిస్సజా పటాన్ని ఏర్పాటు చేసి పౌనఃపున్యాన్ని కొలుచుట.

పరికరాలు : వివిధ పౌనఃపున్యాల వద్ద సంకేత జనక స్థానాలు రెండు, CRO, నిరోధాలు, కండెన్సర్లు.



ప్రయోగ పద్ధతి : పటంలో చూపిన విధంగా తెలియని పౌనఃపున్యం f_Y గల సంకేతాన్ని Y పలకలకు, తెలిసిన పౌనః పున్యం గల జనకస్థానాన్ని f_X పౌనఃపున్యం గల X పలకలకు సంధానం చేయాలి. f_X మార్చుతూ తెరపై లిస్సజా పటాలు ఏర్పడేటట్లు చూడాలి. పైన తెలిపిన విధంగా తెరపై ఉచ్చులను లెక్కించి $\frac{f_X}{f_Y}$ ను లెక్కించాలి.

రకరకాల పటాలను ఏర్పరచి f_X పౌనఃపున్యం విలువలను, ఉచ్చుల సంఖ్యను పట్టీలో పొందుపరచి f_Y విలువ కట్టాలి.

క్రమసంఖ్య	f_X	X – అక్షంపై ఉచ్చుల సంఖ్య n_X	Y – అక్షంపై ఉచ్చుల సంఖ్య n_Y	$\frac{f_X}{f_Y}$ నుండి f_Y విలువ

ఫలితము :

జాగ్రత్తలు :

1. అధిక వోల్టేజ్ ఉపయోగించరాదు.
2. విద్యుత్ కనెక్షన్లు వదులుగా ఉండరాదు.

యూనిట్ - 4

పాఠం - 12

తీగలలో తరంగ చలనము

ఉద్దేశ్యము :

ఈ అధ్యయము చదివిన తరువాత ఈ క్రింది విషయములు అవగాహన చేసుకొందురు.

- తన్యతలో గల తీగలో తరంగ ప్రసారము, ఆ తరంగ ప్రసార వేగమునకు సమీకరణము రాబట్టుట.
- సామాన్య తరంగ సమీకరణము ఏర్పరచి సాధించుట. దాని ప్రాముఖ్యమును తెలుసుకొనుట.
- రెండు చివరల తన్యతలో బిగించిన తీగ కంపించే విధము (modes of vibration) అందులో అనుస్వరముల అధ్యయనము చేయుట.
- తీగలో తరంగ ప్రసారము వలన శక్తి ప్రసారమయ్యే విధము, మరియు ఈ శక్తి ప్రసారమునకు తీగలో ఏర్పడే తిర్యక్ అవరోధముల విశ్లేషణ చేయుట.

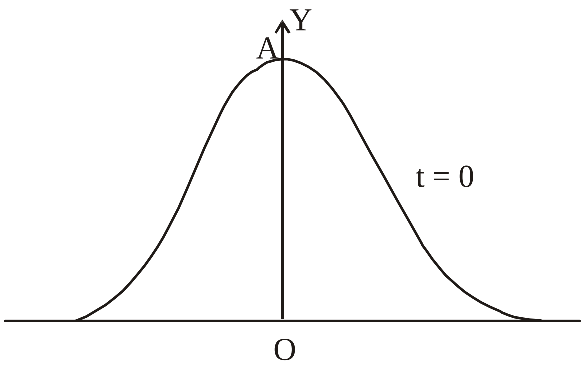
పాఠ్యంశ నిర్మాణక్రమం :

12.1. పరిచయము :

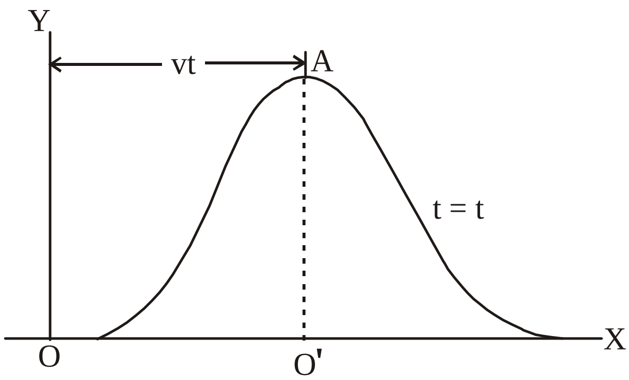
ధ్వని వంటి యాంత్రిక తరంగములు, యానకములో ప్రసారమగు తరంగ ప్రసారమనిన యానకములో కణములు వాటి స్థిర బిందువుల పరంగా సరళహరాత్మకముగా కంపించుతూ, శక్తిని ప్రసారము చేసే ప్రక్రియ. తరంగ వేగము యానక స్థితిస్థాపక గుణకము మరియు సాంద్రతలపై ఆధారపడును. తన్యతలో గల తీగలో తరంగ ప్రసారము అధ్యయనముకై సామాన్య తరంగ

సమీకరణము - దాని సాధన గురించి తెలుసుకొనుట ముఖ్యము.

సామాన్య తరంగ సమీకరణము (General Wave Equation) : తన్యతలో గల తీగలో X అక్షము వెంబడి ప్రయాణిస్తున్న స్పందమును గమనింపుము. స్పందము $t = 0$ వద్ద పటము 12(ఎ)లో వలే యున్నది. $t = 0$ అయినప్పుడు ఈ స్పందమును $y = f(x)$ ప్రమేయము సూచించును. ఈ స్పందము 'v' వేగముతో ప్రయాణిస్తూ 't' కాలమునకు O′ (12.1(బి))లో వలే చేరినది. అయిన 't' కాలమునకు ఆ స్పందమును క్రింది ప్రమేయము $y = f(x - vt)$ సూచించును.



పటము 12.1(ఎ)



పటము 12.1(బి)

కావున స్థానభ్రంశము(y) x, t ల ప్రమేయము. ఈ ప్రమేయమును $y(x,t)$ సూచించును.

$y(x,t) = f(x - vt)$ స్పందము ధన X అక్షము వెంబడి ప్రయాణించునపుడు మరియు

$y(x,t) = f(x + vt)$ స్పందము ఋణ X అక్షము వెంబడి ప్రయాణించునపుడు

కావున X లక్షముపై 'v' వేగముతో ప్రయాణించే స్పందమును (1)తో సూచించవచ్చును.

$$y = f(x \pm vt) \text{----------} \quad (1)$$

చరరాశి $y(x,t)$, సైను ప్రమేయంతో సూచించ వచ్చును.

$$y(x,t) = A_0 \sin K(x - vt)$$

స్థానభ్రంశము x ను $\frac{2\pi}{K}$ పెంచిన

$$y(x,t) = A_0 \sin K\left(x + \frac{2\pi}{K} - vt\right)$$

$$= A_0 \sin\left[K(x - vt) + 2\pi\right]$$

$$= A_0 \sin K(x - vt) \text{-----------} \quad (2)$$

కావున ‘ x ’ విలువ $\frac{2\pi}{K}$ పెంచిన ‘ y ’ విలువ తొలి విలువను పొందును. కావున $\frac{2\pi}{K}$ తరంగ ధైర్ఘ్యము λ సూచించును.

లేక

$$\lambda = \frac{2\pi}{K} \text{ లేక } K = \frac{2\pi}{\lambda}$$; 'K' ని తరంగ సంఖ్య అందురు.

(1)వ సమీకరణమును ‘ x ’ పరంగా అవకలనము చేసిన

$$\frac{dy}{dx} = \pm f'(vt \pm x) \text{ ---------------- } (3)$$

మరోసారి ‘ x ’ పరంగా అవకలనము చేసిన

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm f''(vt \pm x) \text{ -------------- } (4)$$

$f', f'', (vt \pm x)$ యొక్క ప్రమేయాలు

ఇదే విధముగా (1)వ సమీకరణమును 't' పరంగా అవకలనము రెండు మార్లు చేసినా

$$\frac{dy}{dt} = vf'(vt \pm x) \text{ ---------------- } (5)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = v^2 f''(vt \pm x) \text{ ---------- } (6)$$

$f''(vt \pm x)$ విలువను (4)వ సమీకరణము నుంచి (6)లో ప్రతిక్షేపించిన

$$\frac{d^2y}{dt^2} = v^2 \frac{d^2y}{dx^2} \text{ ---------- } (7)$$

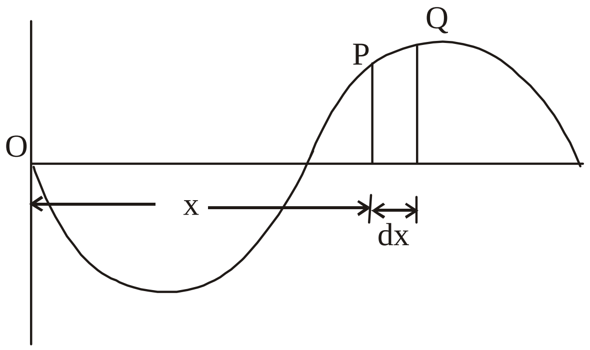
పై సమీకరణము సామాన్య తరంగ ప్రసార సమీకరణము సూచించును.

సామాన్య తరంగ సమీకరణము సాధనను

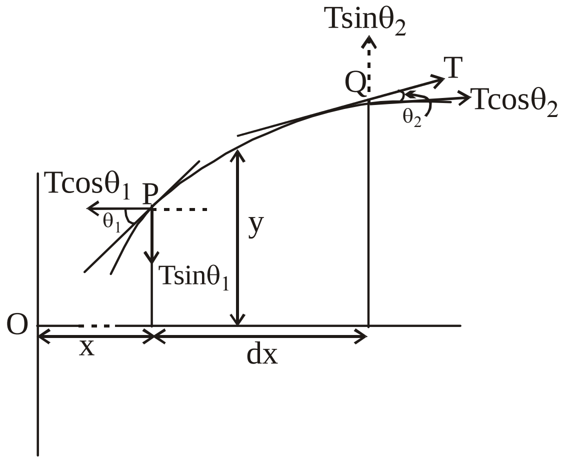
$y = f_1(vt - x) + f_2(vt + x)$ సూచించును.

12.2 తన్యతలో గల తీగవెంబడి తరంగ ప్రసారవేగము :

ఏకరీతి మధ్యచ్ఛేధము గలిగి పరిపూర్ణ స్థితిస్థాపక గలిగియుండి పొడవుతో పోల్చిన అతి తక్కువ మధ్యచ్ఛేద వైశాల్యము గల పోగును ఆదర్శతీగ అందురు. తన్యతలో గల తీగలో తరంగ ప్రసార నియమము మూలసూత్రముగా వీణ, గిటారు వంటి సంగీత పరికరములు పనిచేయును.



చిత్రము 12.2(ఎ)



చిత్రము 12.2(బి)

'm' రేఖీయ సాంద్రత, తీగ 'T' తన్యతలో వున్నదనుకొనుము. తీగ పొడవుకు లంబముగా ఒక బిందువు వద్ద లాగి వదలిన ఏర్పడే స్పందము పటము 12.1(ఎ)లో వలే ముందుకు ప్రయాణించును. ఈ ప్రసారములో తీగలోని ప్రతి మూలకము 'dm' ద్రవ్యరాశి గల సరళహరాత్మక డోలకముగా, తన్యతలో గల పునఃస్థాపక బలము వలన కంపనములు చేయును.

తీగ X - అక్షము వెంబడి గలదు. మూల బిందువు నుండి ' x ' దూరములో గల 'dx 'మూలకమును చిత్రము 12.2ఎ లో పరిశీలించుము. ఒక క్షణము వద్ద ఆ మూలకము వృద్ధికరణముగావించిన పటము 12.1(బి)లో వలే గలదు. ఆ క్షణములో మూలకము స్థానభ్రంశము 'y'. P, Q ల వద్ద తన్యత T తీగకు θ_1, θ_2 కోణములో యున్నది. క్షితిజ సమాంతర అంశములు P వద్ద $T\cos\theta_1$ మరియు Q వద్ద $T\cos\theta_2$. ఈ క్షితిజ సమాంతర అంశములు సమానముగా, వ్యతిరేక దిశలో యుండి తుల్యమగును. కాని క్షితిజ లంబ అంశములు P వద్ద $T\sin\theta_1$ మరియు Q వద్ద $T\sin\theta_2$ లు వలన మూలకముపై పొడవుకు లంబముగా F_y బలము చర్య జరుపును.

$$F_y = T\sin\theta_2 - T\sin\theta_1$$

'PQ' మూలకము చిన్నది కావున θ_1, θ_2 లు స్వల్పముగా యుండును.

$$\sin\theta_1 \approx \tan\theta_1 \approx \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x$$

అదే విధముగా $\sin\theta_2 \approx \tan\theta_2 \approx \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+dx}$

$$\therefore F_y = T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right]$$

అవకలన గణితము నుండి

$$\lim_{\delta t\to 0}\left[\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+dx}-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{dx}}{dx}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

కావున $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\delta x}-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x}=\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)dx$

$$F_y=T\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)dx \text{ ----------- (1)}$$

ఈ ఫలితబలము వలన $'dx'$ మూలకముతో $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ త్వరణము కలుగును.

dx మూలకము ద్రవ్యరాశి = mdx. కావున

$$F_y=(\text{ద్రవ్యరాశి})\ (\text{త్వరణము})=mdx\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \text{ ----------- (2)}$$

(1) మరియు (2) సమీకరణముల నుంచి

$$mdx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,dx$$

లేక $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{T}{m}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \text{ ---------- (3)}$$

కానీ సామాన్య తరంగ సమీకరణము

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \text{ -------- (4)}$$

(3), (4) సమీకరణముల నుంచి

$$v^2=\frac{T}{m} \text{ లేక } v=\sqrt{\frac{T}{m}} \text{ --------- (5)}$$

తన్యతలో గల తీగలో స్పందవేగము లేక తరంగ వేగమును (5)వ సమీకరణము తెలుపును.

తరంగ సమీకరణము సామాన్య పరిష్కారము : తరంగ సమీకరణము

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \text{ ---------------- (1)} \qquad \text{ఇక్కడ } v = \sqrt{\frac{T}{m}}$$

(1)వ సమీకరణము పరిష్కారము $y = f(x,t)$ రూపములో యుండును.

తన్యతలో గల తీగపై ఒక బిందువు వద్ద ఆవర్తనముగా స్పందములు ఇచ్చిన, ఈ స్పందములు ఒకదాని తరువాత ఒకటి ప్రసారమగుచు తరంగమును ఏర్పరుచును. ఈ స్థితిలో తీగలోని ప్రతిమూలకము ఒకే విధముగా సరళహరాత్మక కంపనములు వేరు దశలలో చేయును. అన్ని కణములకు కంపన పరిమితి 'A' (గరిష్ట స్థానభ్రంశము), మరియు కోణీయ పౌనఃపున్యము 'ω' సమానము.

మూలబిందువు ($x = 0$) వద్ద తరంగ ప్రమేయము

$$y(0,t) = A\sin\omega t \text{ ---------- (2)}$$

X అక్షము వెంబడి ప్రయాణించే తరంగ ప్రమేయమును $y = f(x - vt)$ గా వ్రాయవచ్చును. ఇందులో x యొక్క గుణకము 1 మరియు t యొక్క గుణకమునకు $-\frac{1}{v}$ రెట్లు. కావున (2)వ సమీకరణములో x యొక్క గుణకము $-\frac{\omega}{v}$ అగును, కావున

$$y(x,t) = A\sin\left[-\frac{\omega}{v}x + \omega t\right]$$

$$= A\sin\omega\left[t - \frac{x}{v}\right] \text{ ------------ (3)}$$

x పరంగా అవకలనము చేసిన

$$\frac{\partial y}{\partial x} = A\left(-\frac{\omega}{v}\right)\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

మరలా అవకలనము చేసిన

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -A\left(-\frac{\omega}{v}\right)\left(\frac{-\omega}{v}\right)\sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{A\omega^2}{v^2}\sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

లేక $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{v^2}y \text{ ---------- (4)} \qquad \left[\because A\sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = y\right]$$

అదే విధముగా (3)వ సమీకరణమును 't' పరంగా అవకలనము చేసిన

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \omega A \cos(\omega)\left(t - \frac{x}{v}\right)\omega$$

మరలా అవకలనము చేసిన

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega A \sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2 \sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = -\omega^2 y \text{ -------- (5)}$$

(4) మరియు (5) సమీకరణముల నుంచి

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

ఇది సామాన్య తరంగ సమీకరణమునకు తుల్యము గావున తరంగ సమీకరణ పరిష్కరణ.

$$y(x,t) = A\sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) \text{ -------- (6)}$$

కాని తరంగ సంఖ్య $K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi n}{v} \quad (\because v = n\lambda)$

$K = \frac{\omega}{v} \qquad \because (2\pi n = \omega)$ మరియు $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\therefore y(x,t) = A\sin 2\pi\left(t/T - x/\lambda\right) \text{ ----------- (7)} \quad (\because vT = \lambda)$$

లేక $\quad y(x,t) = A\sin(\omega t - Kx)$ --------- (8)

లేక $\quad y(x,t) = A\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$ -------- (9)

లేక $\quad y(x,t) = A\sin 2\pi\left(nt - \frac{x}{\lambda}\right)$ ------- (10)

(6), (7), (8), (9) మరియు (10) సమీకరణములు తరంగ సమీకరణము యొక్క పరిష్కారములు సూచించును.

తరంగ సమీకరణ పరిష్కారము - ప్రాముఖ్యత

తరంగ సమీకరణ పరిష్కారము $y = A\sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$

ఈ సమీకరణము తీగలో ప్రతి కణము ఒకే కంపన పరిమితి (A), ఒకే కోణీయ పౌనఃపున్యము (ω)తో చలించును. కాని కణానికి, కణానికి దశా భేదము యుండును. కావున తరంగ ప్రసారములో ఏ క్షణమునైనా తీగ సైను వక్రము ఆకారములో యుండును.

తరంగ సమీకరణ సామాన్య పరిష్కారము

$$y = f_1(vt - x) + f_2(vt + x)$$

సైను ప్రమేయము గరిష్ట విలువ ± 1, కావున కణం యొక్క గరిష్ట స్థాన భ్రంశము $\pm A$, దీనినే కంపన పరిమితి అందురు.

λ , t పరంగా తరంగ పరిష్కారము

$$y(x,t) = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

పై సమీకరణములో t విలువను $(t + T)$ చేసిన, y తొలి విలువను పొందును. కావున ' T ' కాలము తరువాత కణ కంపన స్థితి తొలి స్థితి చేరును.

అదే విధముగా x విలువను λ పెంచిన, పై సమీకరణములోని y విలువ తొలి విలువను పొందును. కావున తీగ పొడవులో 'λ' అంతరము గల కణములన్నియు ఒకే కంపన దశలో యుండును.

తరంగ సమీకరణ పరిష్కారమును కొసైను ప్రమేయుతో కూడా తెలపవచ్చును. కావున తరంగ చలనపు వివిధ సరళహరాత్మక పరిష్కారములు $A_1\sin(\omega t - kx)$, $A_2\sin(\omega t + kx)$, $B_1\cos(\omega t - kx)$ మరియు $B_2(\cos\omega t + kx)$. కావున తరంగ సమీకరణ సాధారణ పరిష్కారము.

$$y = A_1\sin(\omega t - Kx) + A_2\sin(\omega t + Kx) + B_1\cos(\omega t - Kx) + B_2\cos(\omega t + Kx).$$

12.3 రెండు చివరల స్థిరంగా బిగించబడి తన్యతలో గల తీగ కంపనరీతులు :

రెండు స్థిర ఆధారాల మధ్య ఒక తీగ తన్యతలో బిగించియున్నది అనుకొనుము. తీగలో ఒక బిందువు వద్ద లాగి వదిలిన, తిర్యక్ తరంగము(స్పందము) రెండు వైపులా ప్రయాణించి స్థిరబిందువుల వద్ద పరావర్తనమొందును. పరావర్తిత తరంగములు, పతన తరంగములు ఆద్యారోపణ చెంది స్థిర తరంగములనేర్పరచును. తీగలో ఏర్పడే కంపనరీతుల విశ్లేషణ క్రింది విధముగా చేయవచ్చును.

తిర్యక్ తరంగము యొక్క సామాన్య పరిష్కారము

$$y = A_1\sin(\omega t - kx) + A_2\sin(\omega t + x) + B_1\cos(\omega t - x) + B_2\cos(\omega t + x) \text{ --------- (1)}$$

A_1, A_2, B_1, B_2 స్థిరాంకములు

తీగ రెండు చివరల కంపించదు. కావున సీమాస్థితులను క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును.

$y = 0$ at $x = 0$ -------- (2)

$y = 0$ at $x = \ell$ -------- (3)

అన్ని కణాల వద్ద $\sin\omega t$ మరియు $\cos\omega t$ లు ఎల్లప్పుడూ శూన్యము కావు. కాబట్టి

$A_1 + A_2 = 0$ లేదా $A_1 = -A_2$

$B_1 + B_2 = 0$ లేదా $B_1 = -B_2$

అయిన (1)వ సమీకరణము నుంచి

$$y = A_1\{\sin(\omega t + Kx) - \sin(\omega t - Kx)\} + B_1\{\cos(\omega t + Kx) - \cos(\omega t - Kx)\}$$

$$= A_1\{(\sin\omega t\cos Kx - \cos\omega t\sin Kx) - (\sin\omega t\cos Kx + \sin Kx\cos\omega t)\} +$$

$$B_1\{(\cos\omega t\cos Kx + \sin\omega t\sin Kx) - (\cos\omega t\cos Kx - \sin\omega t\sin Kx)\}$$

$$= -2A_1\cos\omega t\sin Kx + 2B_1\sin\omega t\sin Kx$$

$$y = (-2A_1\cos\omega t + 2B_1\sin\omega t)\sin Kx \text{ ------------ (4)}$$

కావున తరంగ సామాన్య పరిష్కారములో రెండు పదములు t పరంగా మరొకటి స్థానము x పరంగా గలవు.

(4)వ సమీకరణములో (3)వ సమీకరణము యొక్క సీమాస్థితిని అనువర్తించిన

$$0 = (-2A_1\cos\omega t + 2B_1\sin\omega t)\sin K\ell$$

$\cos\omega t$ మరియు $\sin\omega t$ అన్ని క్షణాల వద్ద శూన్యము కావు కాబట్టి

$\text{Sin}\,K\ell = 0$ ---------- (5)

ఇదే సామాన్య పరిష్కారమగును. కాని

$K\ell = n\pi$, $n = 1, 2, \cdots\cdots$ అయినప్పుడు

$\text{Sin}\,K\ell = 0$

కావున K విలువ కొన్ని విలువలకు మాత్రము సీమితమగును.

$K\ell = \pi, 2\pi, \cdots\cdots$ ఈ విలువలను 'ఐగన్' విలువలు అందురు.

అయిన $K_n = \dfrac{n\pi}{\ell}$. ఇచ్చట $n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ -------- (6)

$K_n = \dfrac{2\pi\gamma_n}{v}$ --------- (7) $\quad \left(\because\ K = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi\gamma}{v}\right)$

(6) మరియు (7) సమీకరణముల నుంచి

$\dfrac{2\pi\gamma_n}{v} = \dfrac{n\pi}{\ell}$ or $\gamma_n = n\left(\dfrac{v}{2\ell}\right)$, where $n = 1, 2, 3, \cdots$ ------- (8)

(8)వ సమీకరణము నుంచి తీగ కొన్ని పౌనఃపున్యముల వద్ద మాత్రము కంపనము చెందును. ఈ పౌనఃపున్యములను ఐగన్ పౌనఃపున్యములు అందురు.

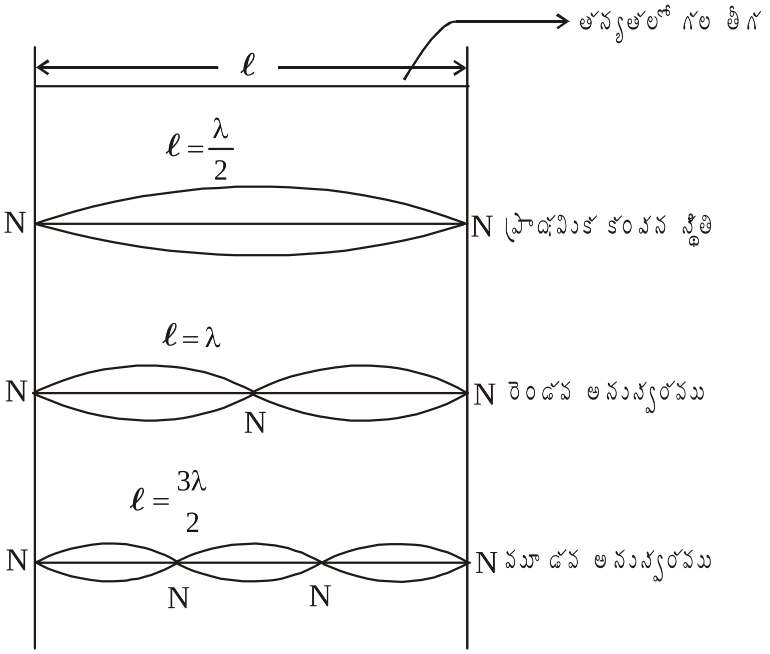
$n = 1$, అయిన (8)వ సమీకరణము నుంచి తీగ ప్రాథమిక కంపన స్థితిలో కంపనములు చెందును. ఈ పౌనఃపున్యమును ప్రాథమిక పౌనఃపున్యము అందురు. $n = 2$ అయిన తీగలోని కంపనములను రెండవ అనుస్వరము లేక మొదటి అతి స్వరము అందురు. $n = 3$ అయిన తీగలోని కంపనములను మూడవ అనుస్వరము లేక రెండవ అతిస్వరము అందురు.

వివిధ అనుస్వరములలో పౌనఃపున్యము

$$\gamma_n = \frac{nv}{2\ell} \quad \text{కాని} \quad v = \sqrt{T/m}$$

$$\text{కాబట్టి} \quad \gamma_n = \frac{n}{2\ell}\sqrt{T/m} \quad \text{-------------} \quad (9)$$

ప్రాథమిక కంపన స్థితి మరియు రెండవ, మూడవ అనుస్వర కంపన స్థితులను పటము 12.3లో చూపబడినవి.



చిత్రము : 12.3

ప్రాథమిక, రెండవ, మూడవ అనుస్వరముల పౌనఃపున్యముల నిష్పత్తి

$$\gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3 = \frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{m}} : \frac{2\ell}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{m}} : \frac{3}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

$$\text{లేక} \quad \gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3 = 1 : 2 : 3$$

కావున 'n'వ అనుస్వరము పౌనఃపున్యము ప్రాథమిక పౌనఃపున్యమునకు 'n'రెట్లు యుండును.

12.4 తీగల తిర్యక్ కంపన సూత్రములు

తన్యతలో గల తీగ ప్రాథమిక పౌనఃపున్యము $n = \frac{1}{2\ell}\sqrt{T/m}$

ఈ సమీకరణము ఆధారముగా కంపన సూత్రములు ఏర్పరచబడినవి.

మొదటి నియమము : తన్యతలో గల తీగ రేఖీయ సాంద్రత (m), తన్యత (T)లు స్థిరముగా యున్నపుడు ప్రాథమిక పౌనఃపున్యము(n) తీగ పొడవుకు విలోమానుపాతముగా యుండును.

$$n \propto \frac{1}{\ell}, \quad T , \; m \text{ లు స్థిరాంకములు}$$

రెండవ నియమము : తన్యతలో గల తీగ పొడవు (ℓ), మరియు రేఖీయ సాంద్రత(m) స్థిరముగా యున్నపుడు ప్రాథమిక పౌనః పున్యము తీగతన్యత వర్గమూలమునకు అనులోమానుపాతముగా యుండును.

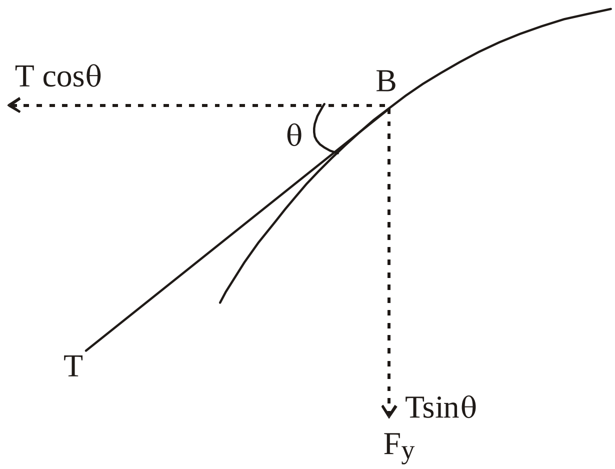
$$n \propto \sqrt{T} \qquad \ell , \; m \text{ లు స్థిరాంకములు.}$$

మూడవ నియమము : తన్యతలో గల తీగ పొడవులు (ℓ) మరియు తన్యత T లు స్థిరంగా యున్నపుడు ప్రాథమిక పౌనఃపున్యము తీగ రేఖీయ సాంద్రత వర్గమూలమునకు విలోమానుపాతంలో యుండును.

$$n \propto \frac{1}{\sqrt{m}}, \quad \ell , T \text{ లు స్థిరరాశులు}$$

12.5 శక్తి ప్రసారము

తరంగ చలనమనిన యానకములోని కణముల సరళహరాత్మక కంపనముల వలన శక్తి ప్రసారమయ్యే ప్రక్రియ. తీగలో ప్రతిమూలకమునకు గమనము వలన గతిశక్తి, మరియు తీగలో ఏర్పడే వికారము వలన స్థితిశక్తి గలిగియుండును. తన్యతలో గల తీగ కంపనాల వలన ప్రసారమయ్యే శక్తికి సమీకరణము రాబట్టవచ్చును.



చిత్రము 12.4

తన్యతలో గల తీగ కంపనములు చేయుచున్నపుడు ఒక క్షణము వద్ద తీగలోని 'dx' పొడవు గల మూలకము పటము 12.4లో చూపబడినది. మూలకముపై B వద్ద తన్యత (T). పటము 12.4లో చూపబడినది. B నుండి ఎడమవైపు తీగలో పని జరుగును కాబట్టి శక్తి ముందుకు అనగా కుడి వైపునకు ప్రసారమగును. తన్యత క్షితిజ సమాంతరాంశము $T\cos\theta$. క్షితిజ సమాంతర దిశలో స్థానభ్రంశము లేదు కాబట్టి జరిగిన పని శూన్యము. తీగలో స్థానభ్రంశము తీగ లంబ దిశలో గలదు కాబట్టి తన్యత (T) యొక్క లంబాంశము $T\sin\theta\left(F_y\right)$ వలన పని జరుగును.

కాని $F_y = T\sin\theta = -T\dfrac{\partial y}{\partial x}$ (ఋణసంజ్ఞ, F_y, y ఋణ అక్షము వెంబడి యుండుట సూచించును)

B కణము వేగము y దిశలో యుండును. లంబదిశలో (y దిశలో) వేగము

$$U(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t},$$

కాని సామర్థ్యము P = (బలము) × (వేగము)

$$P = F_y(v) = -T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial t} \text{ వాట్లు--------- (1)}$$

B బిందువు సరళహరాత్మక కంపనములో యుండును. కావున, స్థానభ్రంశమును సైను ప్రమేయముతో సూచించవచ్చును.

$$y(x,t) = A\sin\omega\left(t - -\frac{x}{v}\right)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \left(\frac{-\omega}{v}\right)A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

మరియు $\dfrac{\partial y}{\partial t} = \omega A\cos\omega\left(t - \dfrac{x}{v}\right)$

$\dfrac{\partial y}{\partial x}$ మరియు $\dfrac{\partial y}{\partial t}$ విలువలను (1)లో ప్రతిక్షేపించిన

$$P = -T\left(\frac{-\omega}{v}\right)A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\cdot\omega A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

$$P = \frac{T\omega^2A^2}{v}\cos^2\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

$$\omega = 2\pi n$$

లేక $P = \frac{4\pi^2 n^2 A^2 T}{v} \cos^2 \omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$ వాట్లు --------- (2)

$\cos^2 \omega\left(t - \frac{x}{\theta}\right)$ ఎల్లప్పుడు ధనాత్మకము కాబట్టి శక్తి x. దాని అక్షము వెంబడి మాత్రము ప్రయాణించును. అనగా ఎడమ నుంచి కుడి వైపుకు $\cos^2 \omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = 0$ కనిష్ట విలువ, మరియు $\cos^2\left(t - \frac{x}{v}\right) = 1$ గరిష్ట విలువ కావున

కనిష్ట సామర్ధ్యము $P = 0$ మరియు గరిష్ట సామర్ధ్యము $P = \frac{4\pi^2 n^2 A^2 T}{v}$. కావున సగటు సామర్ధ్యము

$$P_{av} = \frac{2\pi^2 n^2 A^2 T}{v} \text{ వాట్లు}$$

12.6 తీగలో తిర్యక్ అవరోధము

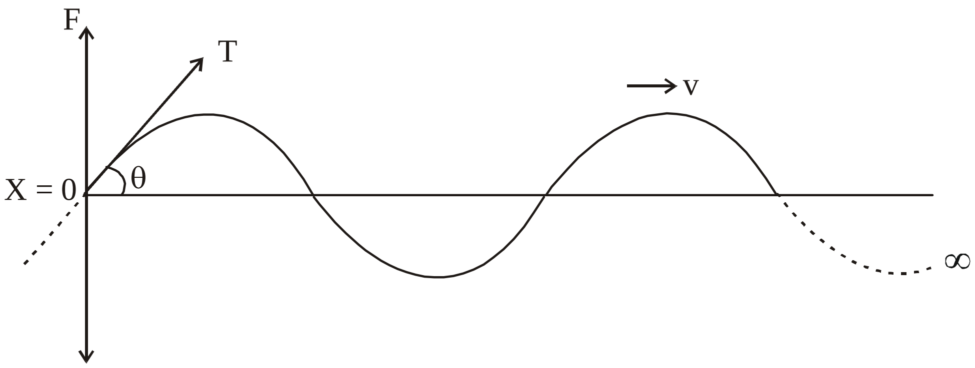
తరంగము యానకములో ఒక బిందువు నుంచి మరొక బిందువుకు శక్తి ప్రసారమగును. ఈ శక్తి ప్రసారములో యానకము ఆటంకము లేక ప్రతిఘటన కలిగించును. ఈ ఆటంకము కంపించే కణముల జడత్వము మరియు యానకము స్థితిస్థాపకత వలన ఏర్పడును. శక్తి ప్రసారమునకు కలిగే ఈ ప్రతిఘటననే అవరోధము అందురు.

తీగలోని తిర్యక్ కంపనముల వలన శక్తి ప్రసారమునకు అయ్యే నిరోధము

$$Z = \frac{\text{తిర్యక్ బలము}}{\text{తిర్యక్ వేగము}}$$

' Z ' ను తిర్యక్ అవరోధము అందురు. తన్యతలో గల తీగలో బలాత్కృత కంపనములను తీగ ఒక చివర ఆవర్తన బలమును ప్రయోగించి ఏర్పరచవచ్చును.

పటము 12.5



తీగ ఒక చివర ($x = 0$) అనువర్తించిన ఆవర్తన బలము $F_0 \text{Cos}\,\omega t$ వలన తీగలో ప్రసారమయ్యే తరంగము పటము 12.5లో చూపబడినది.

x = 0 వద్ద తన్యత (T) యొక్క లంబాంశము $T \text{ Sin } \theta$. అనువర్తించే ఆవర్తన బలము తనత్యపరుచును. కావున...

$$F = F_0 \cos\omega t = -T\sin\theta$$

(θ అతి తక్కువ కాబట్టి $\sin\theta = \tan\theta$)

లేక $F_0 \cos\omega t = -T\tan\theta \simeq -T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0}$ ---------- (1)

కణము యొక్క స్థాన భ్రంశమును తరంగ సామాన్య పరిష్కారములోని సైను ప్రమేయముతో సూచించవచ్చును.

$$y(x,\, t) = A\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$$

' x ' పరముగా అవకలనము చేసిన

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)A\cos\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$$

కాలము పరముగా అవకలనము చేసిన

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)vA\cos\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$$

పై రెండు సమీకరణముల నుండి

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)$$

అనగా $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0} = -\frac{1}{v}\left(\frac{dy}{dt}\right)_{x=0}$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0} = -\frac{1}{v}A\left(\frac{2\pi v}{\lambda}\right)\cos\left(\frac{2\pi vt}{\lambda}\right)$$

$$= -\frac{1}{v}A\omega\cos\omega t \qquad \left(\because \omega = 2\pi n = \frac{2\pi v}{\lambda}\right)$$

$A\omega = V_0$ వేగ కంపన పరిమితి

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0} = -\frac{v_0}{v}\cos\omega t \text{ ---------- (2)}$$

(2) నుండి $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0}$ విలువను (1)వ సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించిన

$$F_0 \cos\omega t = \frac{TV_0}{v}\cos\omega t$$

$$F_0 = \frac{TV_0}{v} \text{ -------------- (3)}$$

కాని తీగలో అభిలక్షణ అవరోధము Z ను తిర్యక ఆవర్తన బల కంపన పరిమితి (F_0) మరియు వేగము కంపన పరిమితి V_0ల నిష్పత్తిగా నిర్వచింపబడినది.

కావున

$$Z = \frac{F_0}{V_0} = \frac{TV_0}{vV_0} = \frac{T}{v}$$

$$\therefore Z = \frac{1}{v}\cdot v^2 m = mv \text{ --------- (4)} \qquad \left(\because v = \sqrt{T/m} \quad T = v^2 m\right)$$

వేగము 'V' యానకము స్థితిస్థాపకత మరియు తన్యతల పై ఆధారపడును. కావున అభిలక్షణ అవరోధము స్థితిస్థాపకత మరియు జడత్వముల ప్రమేయముగా యుండును. శక్తి నష్టము లేకున్న యెడల అవరోధము నిజరాశి అగును.

(4)వ సమీకరణము నుండి యాంత్రిక అవరోధము

(ఎ) ఆవర్తన బలమునకు వ్యతిరేకముగా యుండే యాంత్రిక అవరోధము కేవలము నిరోధము మాత్రమే (నిజరాశి).

(బి) తన్యత T మరియు రేఖీయ సాంద్రత (m)ల ప్రమేయము.

(సి) ఇది ఆవర్తన బలము పై ఆధారపడదు.

(డి) అనంత విద్యుత్ ప్రసార తీగలోని అవరోధమునకు (Inpedeance of infinite transmission line) ఈ యాంత్రిక అవరోధము తుల్యముగా యుండును.

12.7 సాధించిన సమస్యలు

1. ఒక ప్రసార తరంగమును $y = 0.004\sin(200x - 3t)$ తో సూచింపపడినది. స్థానము x, కాలము t ల వద్ద కణ స్థానభ్రంశము y సూచించును. అయిన

(ఎ) కంపన పరిమితి, (బి) తరంగ ధైర్ఘ్యము, (సి) పౌనఃపున్యము, (డి) ఆవర&తన కాలములను లెక్కింపుము.

సాధన ప్రామాణిక తరంగ సమీకరణము $y = A\sin(Kx - \omega t)$ ఇచ్చిన సమీకరణముతో పోల్చిన

(ఎ) కంపన పరిమితి $A = 0.004\,\text{met}$

(బి) తరంగధైర్ఘ్యము $\lambda = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{200} = 0.0314\,\text{met}$

(సి) పౌనఃపున్యము $n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3}{2\pi} = 0.477 H_2$

(డి) ఆవర్తన కాలము $T = \frac{1}{n} = \frac{1}{0.477} = 2.094\text{ sec}$

2. $y_1 = 5\sin(2\pi t - x)$ మరియు $y_2 = 5\sin(2\pi t + x)$ లు సూచించే తరంగములు అధ్యారోపణ చెంది స్థిర తరంగములు ఏర్పడినవి. అయిన $x = 10$ వద్ద కంపన పరిమితి ఎంత?

సాధన : ఫలిత స్థాన భ్రంశములు

$$y = y_1 + y_2 = 5\sin(2\pi t - x) + 5\sin(2\pi t + x)$$

$$= 5\{\sin 2\pi t \cos x - \cos 2\pi t \sin x + \sin 2\pi t \cos x + \cos 2\pi t \sin x\}$$

$$= 5(2\sin 2\pi t \cos x)$$

$$= 10\cos x \sin 2\pi t$$

కావున కంపన పరిమితి $= 10\ \text{Cos}\, x$

$x = 10,$ అయిన కంపన పరిమితి =10 . Cos 10 = 9.8 ప్రమాణాలు

3. 0.5 మీ॥ పొడవు గల తన్యతలో తీగ ప్రాథమిక పౌనఃపున్యము 512 Hz అయిన అదేస్థితిలో యుండి పొడవు రెట్టింపు గల తీగ ప్రాథమిక పౌనఃపున్యము ఎంత?

సాధన : రెండింటి తన్యత మరియు రేఖీయ సాంద్రత స్థిరము కాబట్టి

$$n_1\ell_1 = n_2\ell_2$$

$$512 \times \frac{1}{2} = n_2 \cdot 1$$

లేక $n = 256\,\text{Hz}$

4. 6 గ్రాముల ద్రవ్యరాశి గల రాగి తీగ పొడవు 60 సెం॥మీ॥ రెండు చివరల తన్యతలో స్థిర బిందువుల మధ్య బిగించిన తన్యత 300 N యున్నది. అయిన ప్రాథమిక పౌనఃపున్యము మరియు మొదటి అతిస్వరము పౌనఃపున్యములను లెక్కించుము.

సాధన $\ell = 60 \text{ cms} = 0.6 \text{met.}$ $m = \frac{6\times10^{-3}}{0.6}\text{Kg} = 10^{-2}\text{Kg/met}$

మరియు $T = 300\,\text{N}$

కాని $n = \frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{m}} = \frac{1}{2\times0.6}\sqrt{\frac{300}{10^{-2}}} = 144.3\,\text{Hz}$

ప్రాథమిక పౌనఃపున్యము $n = 144.3\,\text{Hz}$

మొదటి అనుస్వరము పౌనఃపున్యము $= 2n = 144.3\times2 = 288.6\text{ Hz}$

5. ఒక మీటరు పొడవు, 1 గ్రాము ద్రవ్యరాశి గల దారము T తన్యతలో గలదు. ఆ తీగ రెండు ఉచ్చులుగా, 256 Hz పౌనఃపున్యముతో కంపించుచున్న తీగలోని తన్యత T మరియు తరంగదైర్ఘ్యములను లెక్కించుము.

సాధన తరంగ దైర్ఘ్యము $\lambda = \frac{2\ell}{n}$ $\ell -$ తీగ పొడవు, n - ఉచ్చుల సంఖ్య

$$\lambda = \frac{2}{2} = 1\text{ mts.}$$

$\rho =$ ఉచ్చుల సంఖ్య =2, $\ell =$ తీగ పొడవు = 1 మీటరు, $m = 10^{-3}$ కి.గ్రా

మరియు $n = \frac{\rho}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{m}}$

$\rho -$ ఉచ్చుల సంఖ్య - 2, $\ell -$ తీగ పొడవు = 1 మీ॥, $m = 10^{-3}$ Kg

$$256 = \frac{2}{2\times1}\sqrt{\frac{T}{10^{-3}}}$$

లేక $T = (256)^2\times10^{-3} = 65.5\text{N}$

6. 1 చ॥ మీ॥ అడ్డుకోత గలిగిన తీగలో 0.1 కి॥గ్రా॥ భారము తన్యతను కలిగించిన తిర్యక్ తరంగ ప్రసార వేగమును లెక్కించుము. తీగ పదార్థపు సాంద్రత 9.81 గ్రాములు/సెం॥మీ^{3} మరియు $g = 9.8$ మీ/సె^{2}

సాధన : తరంగ వేగము $v = \sqrt{T/m}$ కాని $= T = Mg = 0.1\times9.81 = 0.981\text{N}$

= (మధ్యచ్ఛేద వైశాల్యము) × ρ

$$=10^{-6}\times 9.81\times 10^{-3}$$

$$=9.81\times 10^{-3}$$

$$V=\sqrt{\frac{0.981}{9.81\times 10^{-3}}}=31.62\,m/sec$$

12.8 సారాంశము

- తరంగ చలనములో యానకములోని కణములు సరళ హరాత్మక కంపనముల వలన శక్తి ప్రసారమగును.
- v వేగముతో X అక్షము వెంబడి ప్రయాణించుచున్న ఆ తరంగమును

  $y=f\left(x+vt\right)$ సూచించును.

- తరంగ సంఖ్య K $K=\frac{2\pi}{\lambda}$, λ తరంగ దైర్ఘ్యము.
- సామాన్య తరంగ సమీకరణము $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$
- తన్యతలో గల తీగలో ఏర్పడే తిర్యక్ కంపనముల సమీకరణము

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\sqrt{\frac{T}{m}}\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

- తన్యతలో గల తీగలో తరంగ ప్రసార వేగము $=\sqrt{\frac{T}{m}}$
- తరంగ సమీకరణ పరిష్కారము

$$y=A\sin\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)$$

$$y=A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$y=A\sin\left(\omega t-Kx\right)$$

$$y = A\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$$

$$y = A\sin 2\pi\left(nt - \frac{x}{\lambda}\right)$$

- తన్యతలో గల తీగలోని తిర్యక్ కంపనాల పౌనఃపున్యము

$$n = \frac{\rho}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

- ప్రసారమయ్యే సగటు సామర్థ్యము $\rho_{av} = \frac{2\pi^2 n^2 A^2 T}{v}$ watts.

- తన్యతలో గల తీగలో ప్రసారమయ్యే తిర్యక్ తరంగమునకు యుండే అవరోధము

$$Z = mv$$

12.8 కీలక పదములు

సామాన్య తరంగ సమీకరణము, తరంగ సంఖ్య, రేఖీయ సాంద్రత, కంపన రీతులు, అతిధ్వనులు, అనుస్వరములు, అవరోధము, శక్తి ప్రసరణ.

12.9 స్వయం సమీక్షా ప్రశ్నలు

వ్యాసరూప ప్రశ్నలు

1. తన్యతలో గల తీగ వెంబడి ప్రసారమయ్యే తిర్యక్ తరంగ వేగమునకు సమీకరణము రాబట్టుము.
2. తిర్యక్ తరంగమననేమి? తన్యతలో గల తీగలో ప్రసారమయ్యే తిర్యక్ తరంగమునకు సమీకరణము రాబట్టుము.
3. తన్యతలో గల తీగలో ప్రసారమయ్యే తిర్యక్ తరంగమునకు సమీకరణము రాబట్టి, దాని పరిష్కారమును విశ్లేషణ చేయుము.
4. రెండు స్థిర బిందువుల మధ్య బిగించబడిన తన్యతలో గలతీగలో ఏర్పడే కంపన రీతుల పై వ్యాసము వ్రాసి, కంపన పౌనఃపున్యమునకు సమీకరణము రాబట్టుము.
5. తన్యతలో గల తీగలో ప్రసారమయ్యే తరంగమునకు యుండే అవరోధము $Z = \sqrt{mT}$ లేక $Z = mv$ అని చూపుము. m రేఖీయ సాంద్రత, V వేగమును, T తన్యతలను సూచించును.
6. తన్యతలో గల తీగలో తిర్యక్ తరంగ ప్రసారములో సగటు శక్తి ప్రసారము

$$\rho_{av} = \frac{2\pi^2 n^2 A^2 T}{v}$$ వాట్లు అని చూపుము.

n పౌనఃపున్యము, A కంపన పరిమితి, T తన్యత, V వేగము

లఘుటీక ప్రశ్నలు

1. ప్రాథమిక పౌనఃపున్యము మరియు అతిస్వరములు అననేమి?
2. తీగలో తిర్యక్ కంపన సూత్రములు వ్రాయండి.
3. సాగదీసిన తీగలో ప్రసారమయ్యే తిర్యక్ తరంగ వేగమునకు సమీకరణము రాబట్టుము.
4. సామాన్య తరంగ సమీకరణ పరిష్కారము యొక్క ప్రాముఖ్యతను తెలుపుము.
5. తీగలోని తిర్యక్ తరంగ ప్రసారమునకు యుండే అవరోధము నిర్వచించి దాని అభి లక్షణములను వ్రాయుము.

అభ్యాసము

1. $y = 0.035\sin(3x - t)$, x అక్షము వెంబడి ప్రయోగించే తరంగమును సూచించే సమీకరణము. ఏదైనా క్షణము t వద్ద మూల బిందువు నుండి x దూరములో గల కణ స్థానభ్రంశము y అయిన (1) కంపన పరిమితి (2) తరంగ దైర్ఘ్యము (3) పౌనఃపున్యము (4) ఆవర్తన కాలము S.I ప్రమాణాలలో లెక్కింపుము.

జ॥ కంపన పరిమితి $a = 0.03$ మీ॥, తరంగదైర్ఘ్యము $\lambda = 2.09$ మీ॥, పౌనఃపున్యము $= 0.31$ Hz మరియు ఆవర్తన కాలము $T = \frac{1}{n} = 3.14 \sec$

2. రెండు పురోగామి తరంగాలు $y_1 = 10\sin(3\pi t - 4x)$ మరియు $y_2 = 10\sin(3\pi t + 4x)$ ఆధ్యారోపణ వలన స్థిర తరంగములు ఏర్పడినవి. అయిన $x = 18$ వద్ద కంపన పరిమితిని లెక్కింపుము. (A.U. Sept' 95)

జ॥ కంపన పరిమితి - 19.35 పొడవు ప్రమాణములు

3. 1 మీ॥ పొడవు గల తీగ తన్యతలో కంపనములు చేస్తున్న ప్రాథమిక పౌనఃపున్యము 256 Hz. ఈ తగ పొడవు సగము అయినపుడు అవే స్థితులలో ప్రాథమిక పౌనఃపున్యము యుండును. (N.U., March 1996)

జ॥ 512 Hz

4. 50 సెం॥ మీ॥ పొడవు, 5 గ్రాముల ద్రవ్యరాశి గల తీగ 400 న్యూటన్ల తన్యతలో యున్నపుడు ఆ తీగ ప్రాథమిక పౌనఃపున్యము ఎంత? (A.U. April 1995)

జ॥ 200 Hz

5. 1 గ్రాము ద్రవ్యరాశి, T తన్యత, 1 మీటరు పొడవు గల తీగ మూడు ఉచ్చులుగా 512 Hz పౌనఃపున్యముతో కంపించుచున్న తన్యతను లెక్కింపుము. (NU. April 1995)

జ॥ $T = 116.49\ N$

6. 1 మీటరు పొడవు యుండి తన్యతలో గల తీగ $256\,Hz$ కంపించుచున్న, ఇవే స్థితులలో తీగ పొడవు సగమయిన కంపన పౌనఃపున్యము ఎంత?

జ॥ 512 Hz

12.11 చదువదగిన గ్రంథాలు

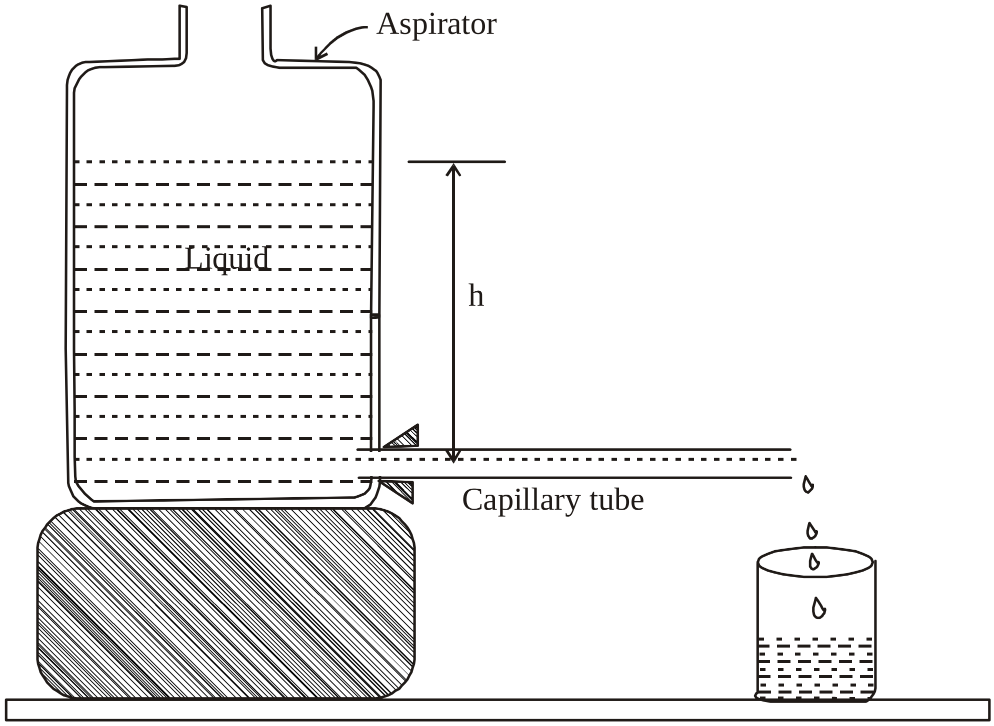
1. భౌతికశాస్త్రము మొదటి సంవత్సరము : Telugu Academy Publications.
2. Waves and Oscillations : S. Badami, V. Balasubramanin and K. Rama Reddy (Orient Longman)
3. B.Sc. Physics Vol. 1 : C. Murali Mohana Sastry, K. Shanker Rao, P. Baburao
4. Waves and Oscillations : Dr. P.K. Mittal, Prof. Jai Dev Anand (Har-Anand Publications)

ప్రయోగము సంఖ్య - 12

స్నిగ్ధతా గుణకము – పాస్వూస్ పద్ధతి

ఉద్దేశము : పాస్వూస్ పద్ధతిన ఒక ద్రవము(నీరు) యొక్క స్నిగ్ధతా గుణకమును కనుగొనుట.

పరికరములు : ఏకరీతి కేశనాళిక, ఆస్పిరేటర్ బాటిల్, బీకరు, స్టాపు వాచ్, సున్నితపు త్రాసు, బరువులు, చలన ద్వేష్టన, సూక్ష్మదర్శిని.



సిద్ధాంతము : ఒక క్షితిజ సమాంతర కేశనాళికలో స్థిరమైన, నాళికా ప్రవాహము జరుగునపుడు, స్నిగ్ధతా గుణకమునకు పాస్వూస్ సమీకరణము

$$\eta = \frac{\pi p r^4 t}{8 v \ell}$$

ఇందులో P = గొట్టము చివరల స్థిరపీడన భేదము

r = కేశనాళిక వ్యాసార్థము

ℓ = కేశనాళిక పొడవు

v = t కాలములో ప్రవహించిన ద్రవము ఘనపరిమాణము

వర్ణన : ఒక ఆస్పిరేటరు బాటిల్ సుమారుగా 2 లీటర్ల కెపాసిటీ ఉండి, అడుగు భాగమునకు దగ్గరగా చిన్న రంధ్రము ఉండును. ఒక రబ్బరు స్టాపరును రంధ్రమునకు బిగించి దానిలో గాజు, గొట్టమును, దానిని రబ్బరు గొట్టమును దాని చివర సుమారు 30 నుంచి 40 సెం.మీ. పొడవు, 0.5 మి.మీ. అంతర వ్యాసార్థము గల కేశనాళికను బిగిస్తారు. రబ్బరు గొట్టమునకు పించ్‌కాక్‌ను బిగిస్తారు. కేశనాళికను క్షితిజ సమాంతరముగా అమరుస్తారు.

పద్ధతి : (ఎ) ఆస్పిరేటరు బాటిల్‌ను శుభ్రపరచి, కొంత మట్టము వరకు నీటిని పోయాలి. బాటిల్‌ను చెక్కదిమ్మెపై ఎత్తుగా ఉంచాలి. కేశనాళికను ముందు పొటాషియమ్ డైక్రోమేట్ ద్రవముతో, ఆ తర్వాత నీటితో శుభ్రపరచాలి. దీనిని క్షితిజ సమాంతరముగా ఆస్పిరేటర్ బాటిల్‌లోనికి అమర్చాలి. కేశనాళిక రెండవ చివర ఒక సన్నని దారమును వ్రేలాడదీసిన, ప్రవహించిన నీరు బీకరులో దారముగుండా బిందువులుగా పడువీలగును.

కేశనాళిక అక్షము నుండి నీటి మట్టము తొలి ఎత్తు (h_1) కొలవాలి. ఒక శుభ్రమైన, పొడిగా వన్న బీకరు తొలి బరువు (w_1) కొలవాలి. దానిని కేశనాళిక చివర ఉంచాలి. పించ్‌కాక్‌ను పూర్తిగా తెరచి, ఆపు గడియారమును ఆన్ చేయవలెను. సుమారు 15 నిముషాలపాటు నీటిని బీకరులో పట్టాలి. స్టాప్‌వాచ్‌ని ఆపివేసి నీటి మట్టపు తుది ఎత్తు (h_2) కొలవాలి. సగటు ఎత్తు $h=\frac{h_1+h_2}{2}$ లెక్కించాలి. బీకరు + నీటి బరువు (w_2) కొలవాలి. ప్రవహించిన నీటి ద్రవ్యరాశి $m=w_2-w_1$ లెక్కించాలి. అప్పుడు నీటి ఘనపరిమాణము $v=\frac{m}{d}$ లెక్కించాలి.

(b) కేశనాళిక రంధ్రపు వ్యాసార్థము కనుగొనుట : కేశనాళికను సీసా నుండి తీసి, ఒక స్టాండుకి బిగించాలి. కేశనాళిక రంధ్రమును సూక్ష్మదర్శినిలో చూచి, నిలువు తీగను రంధ్రము ఒక చివరను ఏకీభవింపజేసి రీడింగు R_1 కొలవాలి. సూక్ష్మదర్శిని క్షితిజసమాంతరముగా జరిపి రంధ్రపు రెండవ చివర రీడింగు R_2 కొలవాలి. అప్పుడు వ్యాసము $d_1=R_1\sim R_2$ లెక్కించాలి. అదే విధముగా అడ్డు తీగతో నిలువు వ్యాసము $d_2=R_3\sim R_4$ లెక్కించాలి. సగటు వ్యాసము $d=\frac{d_1+d_2}{2}$ లెక్కించి సగటు వ్యాసార్థము లెక్కించాలి.

పరిశీలనలు :

ఖాళీ బీకరు బరువు $(w_1)=$ ....gm

బీకరు + నీటి బరువు $(w_2)=$ ....gm

నీటి ద్రవ్యరాశి $m=w_2-w_1=$ ....gm

పట్టిన నీటి ఘనపరిమాణము $(V)=\frac{m}{d}=$.................c.c.

నీటిమట్టపు తొలి ఎత్తు $h_1=$...................cm

నీటిమట్టపు తుది ఎత్తు $h_2=$...................cm

సగటు ఎత్తు $h=\frac{h_1+h_2}{2}=$............cm

కేశనాళిక చివరల పీడన భేదము $P=h\,dg=$...............$dyne/cm^2$

నీరు ప్రవహించిన కాలము $(t)=$.............sec

కేశనాళిక సగటు వ్యాసార్థము $(r)=$................cm

స్నిగ్ధతా గుణకము $\eta=\frac{\pi P r^4 t}{8v\ell}$ డైన్/చ.సెం.మీ. ప్రమాణ వేగ ప్రవణత

కేశనాళిక వ్యాసార్థము (r) కనుగొనుట

వ.సంఖ్య	అడ్డుతీగ స్థానము	సూక్ష్మదర్శిని రీడింగులు			రంధ్రపు వ్యాసము cm
		M.S.R. x cm	V.C.	మొత్తం రీడింగు $=M.S.R.+n\times L.C.$	
1				$R_1=$	$d_1=R_1\sim R_2$
2				$R_2=$	
3				$R_3=$	$d_2=R_3\sim R_4$
4				$R_4=$	

సగటు వ్యాసము $(d)=\frac{d_1+d_2}{2}=\cdots\cdots\cdots$cm

సగటు వ్యాసార్థము $(r)=\frac{d}{2}=\cdots\cdots\cdots\cdots$cm

ఫలితము : నీటి స్నిగ్ధతా గుణకము .... డైన్/సెం.మీ^{2}. ప్రమాణ వేగ ప్రవణత

జాగ్రత్తలు :

1. కేశనాళిక రంధ్రము ఏకరీతిగా నుండవలయును.
2. కేశనాళిక శుభ్రముగా ఉండవలెను.
3. కేశనాళికను క్షితిజ సమాంతరముగా అమర్చవలెను.
4. కేశనాళికను రంధ్ర వ్యాసార్థము ఖచ్చితముగా కొలవవలెను.

మౌఖిక ప్రశ్నలు

1. ద్రవపు స్నిగ్ధతా గుణకమును నిర్వచింపుము.

జవాబు : ప్రమాణ వేగప్రవణత ఉన్నప్పుడు, ప్రమాణ విస్తీర్ణముపై రెండు పొరల మధ్య కలుగు స్నిగ్ధతా బలమును స్నిగ్ధతా గుణకము అందురు.

2. స్నిగ్ధతా బలమునకు సూత్రము ఏదీ

జవాబు : $F = \eta \cdot A \cdot \frac{dv}{dx}$

3. పాస్యూల్ పద్ధతి ఏ ద్రవములకు అనుకూలము.

జవాబు : తక్కువ స్నిగ్ధత గల ద్రవములకు వర్తించును.

4. పాస్యూల్ పద్ధతిలో ఏ భౌతికరాశిని ఖచ్చితముగా కొలవాలి.

జవాబు : నాళిక వ్యాసార్థము - ఇది సూత్రములో నాల్గవ ఘాతాంకము కలిగి ఉండును.

5. నాళికా ప్రవాహము అనగానేమి ?

జవాబు : స్థానము మరియు కాలము పరముగా స్థిరవేగము కలిగిన ద్రవమును ప్రవాహమును నాళికా ప్రవాహము అందురు.

6. ఉష్ణోగ్రత పెరిగిన ద్రవముల స్నిగ్ధత ఏమగును.

జవాబు : తగ్గును.

యూనిట్ - 4

పాఠం - 13

అతిధ్వనులు

ఉద్దేశాలు

- అతిధ్వనుల లక్షణములు, ఉత్పత్తి, శోధన, అనువర్తనముల అవగాహనే పాఠ్యోద్దేశము.
- అతిధ్వనుల లక్షణములను తెలిసికొనుట
- అతిధ్వనుల ఉత్పత్తి విధము తెలిసికొనుట
- అతిధ్వనుల లక్షణములు అనువర్తనములను అవగాహన చేసినకొనుట

విషయసూచిక

13.1 ఉపోద్ఘాతము

ధ్వని తరంగ రూపంలో ప్రసారమయ్యే శక్తి. మానవుడు వినగలిగే ధ్వని పౌనఃపున్యపు అవధి $20\,\text{Hz}$ నుండి $20,000\,\text{Hz}$ వరకు మాత్రమే. $20\,\text{Hz}$ కంటే తక్కువ పౌనఃపున్యము గల ధ్వనులను పరాధ్వనులని, $20,000\,\text{Hz}$ కంటే ఎక్కువ పౌనఃపున్యము గల ధ్వనులను అతిధ్వనులని అందురు. మానవుడు వినగలిగే ధ్వనులు (audible range), పరాధ్వనులు, అతిధ్వనులన్నియూ ఒక యానకములో ఒకే వేగముతో ప్రయాణిస్తాయి.

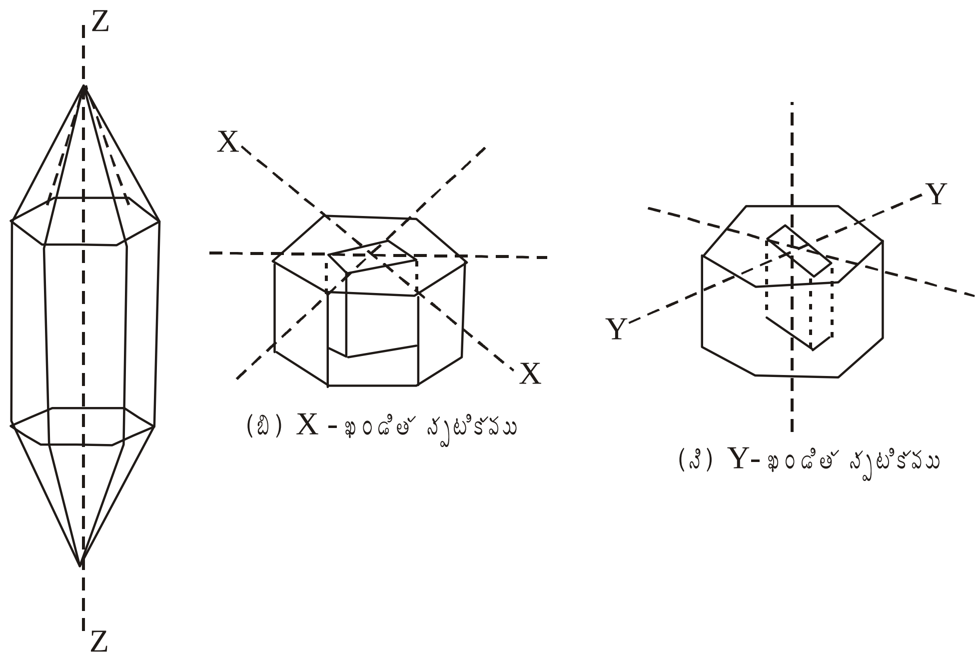
13.2 అతిధ్వనుల ఉత్పత్తి : పీడన విద్యుత్ ప్రభావ పద్ధతి -

అధిక పౌనఃపున్యము, తక్కువ తరంగ దైర్ఘ్యము గల అతి ధ్వనుల ఉత్పత్తి (ఎ) పీడన విద్యుత్ ప్రభావము (Piezo Electric Effect) (బి) అయస్కాంత విరూపణ (Magneto striction) పద్ధతుల ఆధారముగా జరుగును.

పీడన విద్యుత్ ప్రభావము : క్వార్ట్జ్, టార్మిలన్, రాషెల్లి మొదలగు లవణాల ప్రత్యేక ధర్మము పీడన విద్యుత్ ప్రభావమును ప్రదర్శించును. ఒక అక్షమునకు లంబముగా గల తలాల పై పీడనము లేక విరళీకరణమును ఏర్పరచిన, వేరొక అక్షము వెంబడి విద్యుత్ శక్మము ఏర్పడును. పీడన విద్యుత్ విపర్య ప్రభావము (Inverse Piezo Electric Effect) వీలగును. అనగా ఒక అక్షము వెంబడి విద్యుత్ శక్మమును ఏర్పరచిన వేరొక అక్షము వెంబడి సంపీడన లేక విరళీకరణములు ఏర్పడును.

అతిధ్వనుల ఉత్పత్తికి క్వార్ట్జ్ స్ఫటికాన్ని ఉపయోగిస్తారు. క్వార్ట్జ్ స్ఫటికము పటములో వలే యుండను. సహజ స్ఫటికములో అత్యధిక పొడవు వెంబడి యున్న అక్షాన్ని స్ఫటికపు అక్షము లేక దృశా అక్షము (optic axis) లేక Z - అక్షము అందురు. Z - అక్షమునకు లంబముగా గల మధ్యచ్ఛేదము పటములో వలే షడ్భుజ ఆకారము. షడ్భుజ ఎదుట మూలల గుండా దృశా అక్షమునకు లంబంగా పటము 13.1బిలో వలే పోయే అక్షములను విద్యుత్ అక్షము లేక X - అక్షము అందురు. దృశా అక్షమునకు, విద్యుత్ అక్షమునకు లంబముగా పటము 13.1సి తలాల మధ్య బిందువు గుండా పోయే అక్షములను యాంత్రిక అక్షము లేదా Y - అక్షము అందురు. స్ఫటికము తలాలు సౌష్ఠవముగా X - అక్షానికి లంబముగా యుండునట్లు పటములో వలే 13.1బిలో వలే ఖండించిన స్ఫటికమును X ఖండిత స్ఫటికమని, స్ఫటిక తలాలు Y - అక్షమునకు లంబముగా పటము 13.1సిలో వలే యుండునట్లు ఖండించిన స్ఫటికమును Y - ఖండిత స్ఫటికము అని అందురు.

పటము 13.1

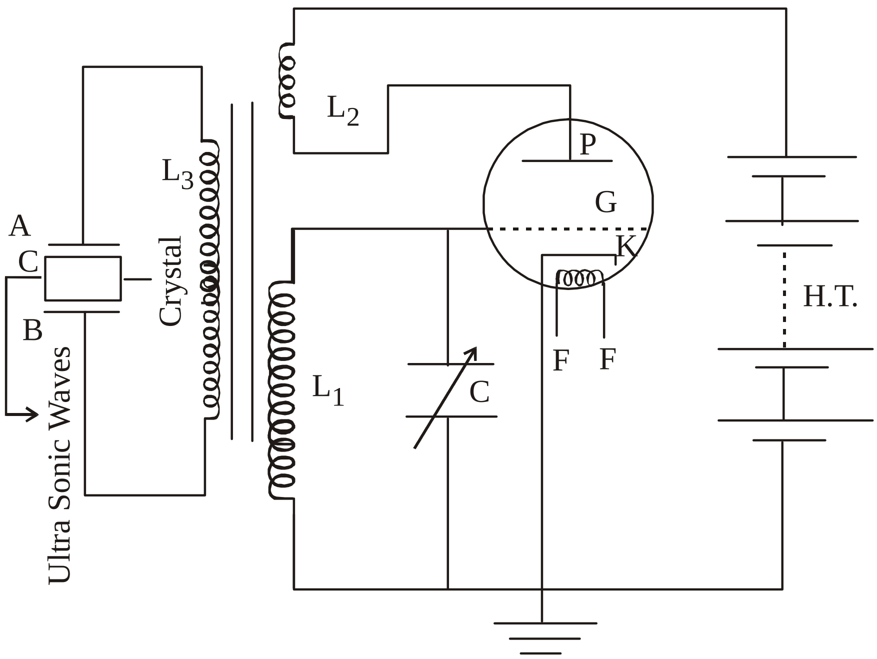


(ఎ) క్వార్ట్జ స్ఫటికము

(బి) X - ఖండిత స్ఫటికము

(సి) Y- ఖండిత స్ఫటికము

అతిధ్వనుల ఉత్పత్తి : X ఖండిత స్ఫటికమును అతిధ్వనుల ఉత్పత్తికి ఉపయోగించెదరు. X - అక్షము వెంబడి ఏకాంతర విద్యుత్ క్షేత్రము (A.C. field) ఏర్పరచిన, యాంత్రిక అక్షము Y - అక్షము వెంబడి సంకోచ, విరళీకరణములు ఆవర్తనముగా ఏర్పడి, ఆ అక్షము వెంబడి అతిధ్వనులు జనించును. ఈ అమరిక పటము 13.2లో చూపబడినది.



పటము 13.2

X ఖండిత స్ఫటికమును L_3 ప్రేరణ తీగ చుట్టకు కలిపిన AB కండెన్సరు పలకల మధ్య అమరియుండును. ప్రేరణ చుట్ట L_2 ట్రయోడ్ వాల్వ పలక వలయములో మరియు ప్రేరణ చుట్ట L_1, కెపాసిటి C గల ట్యాంకు వలయమును గ్రిడ్ వలయములో సంధింపబడి యుండును. L_1, L_2, L_3లు ప్రేరిత యుగ్మత(Inductively Coupled) ములు. ట్యాంకు వలయములో C విలువను మార్చి ఏకాంతర విద్యుత్ డోలకము యొక్క పౌనఃపున్యము స్ఫటికము సహజ పౌనఃపున్యమునకు సమానము చేసిన అనునాదము ఏర్పడును. ఈ స్థితిలో స్ఫటిక Y - అక్షము వెంబడి ఏర్పడే వ్యాకోచ, సంకోచముల వలన అతిధ్వనులు జనించును.

ఈ పద్ధతిలో 500 KHz వరకు పౌనఃపున్యము గల అతిధ్వనులను జనింప చేయవచ్చును. టార్మలీన్ స్ఫటికమునుపయోగించి 150 MHz వరకు పౌనఃపున్యము గల అతిధ్వనులు జనింప చేయవచ్చును.

జనించే అతిధ్వని పౌనఃపున్యము 'n', తరంగ దైర్ఘ్యము 'λ' అయిన వేగము

$v = n\lambda = n2t$ (t స్ఫటికపు మందము అయిన ప్రాథమిక తరంగదైర్ఘ్యము $\lambda = 2t$)

కాని తరంగ వేగము $v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$ Y యంగ్ గుణకము, ρ స్ఫటిక సాంద్రత.

$n2t = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$ కాని క్వార్ట్జ్ స్ఫటికమునకు $Y = 7.9 \times 10^{10}$ న్యూ/మీ^{2}, $\rho = 2650$ కి॥గ్రా॥ / మీ^{3}

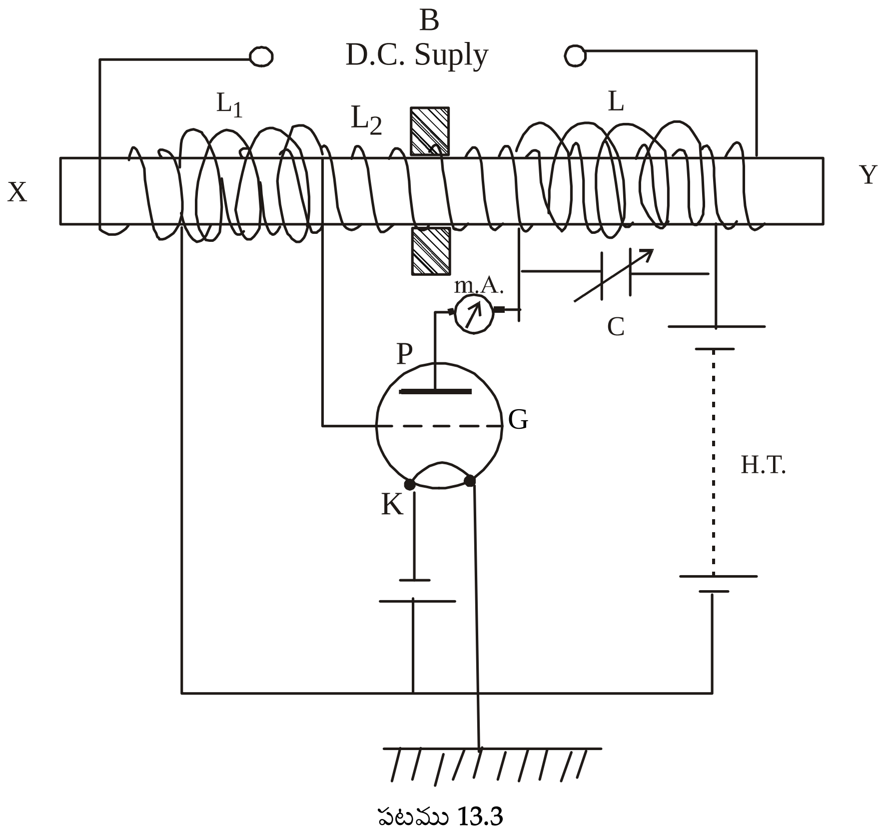
$$n = \frac{1}{2t}\sqrt{\frac{7.9 \times 10^{11}}{2650}} = \frac{5450}{2t}$$

$t = 1$ మి॥మీ॥ అయిన $n = 2.725$ MHz

విద్యుత్ డోలకము పౌనఃపున్యము $n = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ ట్యాంక్ వలయములో C విలువను మార్చి స్ఫటికము సహజ పౌనఃపున్యమునకు సమానమగునట్లు సర్దిన అనునాదము ఏర్పడి, స్ఫటికము అధిక కంపన పరిమితిలో కంపించును.

13.3 అతిధ్వనుల ఉత్పత్తి - అయస్కాంత విరూపణ పద్ధతి (Magnetostriction Method)

ఫెర్రో అయస్కాంత పదార్థపు కడ్డీని అయస్కాంతీకరించిన పొడవులో స్వల్పంగా వృద్ధి కలిగే దృగ్విషయమును అయస్కాంత విరూపణ అందురు. అయస్కాంతమును నిరయస్కాంతము చేసిన పొడవులో సంకోచము జరుగును. ఫెర్రో అయస్కాంత పదార్థపు కడ్డీకి ఏకాంతర అయస్కాంత క్షేత్రమును ఏర్పరచిన, కడ్డీ పొడవులో ఆవర్తనముగా కలిగే మార్పులు, సంపీడన, విరళీకరణములు ఏర్పరుచును. ఏకాంతర అయస్కాంత క్షేత్ర పౌనఃపున్యము కడ్డీ సహజ పౌనఃపున్యమునకు సమానమైన అనునాదము ఏర్పడి కంపన పరిమితి గరిష్ఠమగును. ఈ పద్ధతిలో 30 KHz పౌనఃపున్యము గల అతిధ్వనుల ఉత్పాదన చేయవచ్చును.



పటము 13.3

పరికరపు అమరిక పటము 13.3లో వలే యుండును. XY పెర్రో అయస్కాంత పదార్థపు కడ్డీ (ఇనుము) మధ్య బిందువు స్థిరముగా బిగింపపడి యుండును. కడ్డీ పై గల L_2 వేష్టనము గుండా D.C విద్యుత్ ప్రసారము చేయుదురు. దీని వలన స్థిర అయస్కాంత క్షేత్రము ఏర్పడును. కడ్డీ పై L_1, L వేష్టనపు చుట్టలు అమరి యుండును. వేష్టనము L కండెన్సర్ C తో సంధానము వలన ట్యాంకు వలయము ఏర్పడును. ట్యాంకు వలయమును ట్రయోడ్ వాల్వు పలక వలయములో పటములో వలే యుండును. వేష్టనపు చుట్ట L_1 క్యాథోడు K, గ్రిడ్ Gల మధ్య కలుపబడి యుండును. D.C మిల్లీ అమ్మీటరుతో ప్లేట్ వలయములో విద్యుత్ ప్రవాహము కొలిచెదరు. విద్యుత్ డోలక పౌనఃపున్యము టాంకు వలయములో L, C పై ఆధారపడును. C విలువను మార్చుతూ పౌనఃపున్యము $n=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ కడ్డీ సహజ పౌనఃపున్యమునకు సమానము చేసిన, అనునాదము ఏర్పడును. కడ్డీ గరిష్ఠ కంపన పరిమితితో కంపించును. ఈ స్థితి అమ్మీటరులో అధిక విద్యుత్ ప్రవాహము సూచించును.

అతిధ్వనుల పౌనఃపున్యము $n=\frac{v}{\lambda}=\frac{v}{2\ell}$

కడ్డీ పొడవు ℓ అయిన ప్రాథమిక తరంగ దైర్ఘ్యము 2ℓ అగును.

కాని $v=\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$ కావున

$$n=\frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{Y}{\rho}}\ \text{Hz}$$

13.4 అతిధ్వనుల శోధనము

అతిధ్వనుల శోధనమునకు క్రింది పద్ధతులనుపయోగించవచ్చును.

1. **కుండ్స్ గొట్టము :** కుండ్స్ గొట్టము ఒక చివర ముషలకము అమరి యుండును. గొట్టములో లైకోపోడియమ్ పొడి సమరీతిగా చల్లపడి యుండును. రెండవ చివర గల కడ్డీ ద్వారా అతిధ్వనులను జనింప చేసిన గొట్టములో స్థిర తరంగాలు ఏర్పడును. స్థిర తరంగము అస్పందన బిందువుల వద్ద లైకొపోడియమ్ పొడి కుప్పలుగా ఏర్పడును. రెండు వరుస కుప్పల మధ్య దూరము తరంగ దైర్ఘ్యములో సగము $\left(\frac{\lambda}{2}\right)$.

2. **సునిశిత జ్వాలా పద్ధతి -** యానకములో రెండు తలముల మధ్య స్థిర తరంగాలు ఏర్పరచవలెను. స్థిర తరంగాల వెంబడి జ్వాలను క్రమముగా జరిపిన అస్థిర బిందువు వద్ద జ్వాల స్థిరముగా యుండక రెపరెపలాడును. ఈ విధముగా వరుస అస్పందన బిందువుల మధ్య దూరము తరంగ దైర్ఘ్యములో సగము $\left(\frac{\lambda}{2}\right)$.

3. **ఉష్ణీయ శోధకాలు -** ప్లాటినము తీగ నిరోధములో ఉష్ణోగ్రతలో కలిగే మార్పు ఆధారముగా అతిధ్వనుల శోధనము చేయవచ్చును.

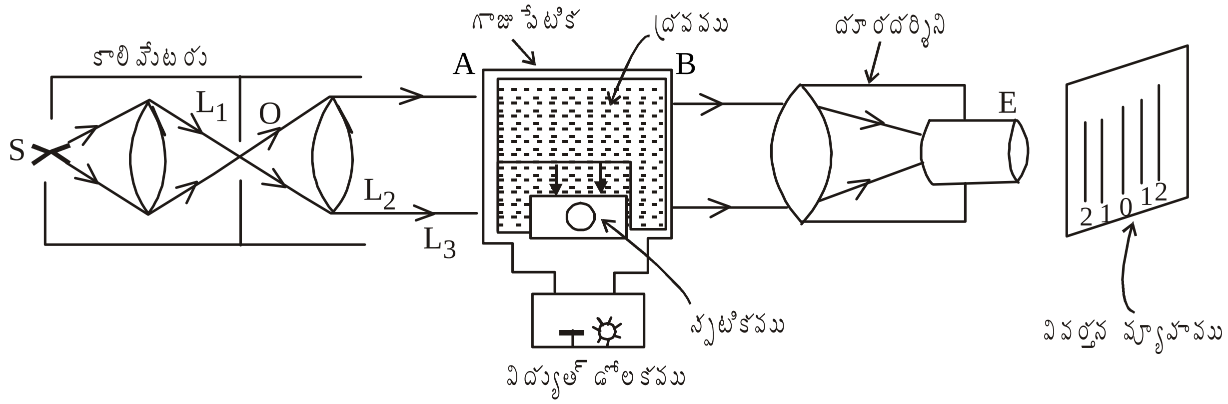
క్యాలెండర్ - గ్రిపిత్ వలయములో ఒక భుజములో అమరియున్న ప్లాటినమ్ తీగను అతిధ్వనుల స్థిర తరంగాల వెంబడి స్థానభ్రంశము చెందించిన అస్థిర బిందువు వద్ద నిరోధములో మార్పు సూచించును. ఈ విధముగా వరుస అస్థిర బిందువులను గుర్తించి $\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ అతిధ్వనులను గుర్తించవచ్చును.

4. **క్వార్ట్జ్ స్ఫటిక పద్ధతి -** ఇది పీడన విద్యుత్ ఫలితము ఆధారముగా పని చేయును. అతి ధ్వనులను రెండు తలముల మధ్య స్థిర తరంగాలనేర్పరచి క్వార్ట్జ్ స్ఫటికమును జరిపిన అస్పందన బిందువుల వద్ద ఏర్పడే పీడనములో మార్పుల వలన విద్యుత్ అక్షము వెంబడి ఆవేశము ఏర్పడును. దీనిని ఎలాక్ట్రానిక్ వలయముతో గుర్తించి, రెండు వరుస అస్పందన స్థానాల మధ్య దూరము $\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ కనుగొని అతి ధ్వనుల శోధన చేయవచ్చును.

13.5 ధ్వని జాలకము

పారదర్శక యానకములో అతిధ్వని స్థిర తరంగములు ఏర్పరచినపుడు యానకములో అస్పందన స్థానముల కలిగే సంపీడన, విరళీకరణములు ఆ బిందువుల వద్ద సాంద్రతలో మార్పు సంభవించును. ఆ బిందువల వద్ద సాంద్రత మరియు వక్రీభవన గుణకము అధికమగును. ఏక వర్ణ కాంతి ఈ స్థిర తరంగాలకు లంబముగా ప్రసరించినపుడు యానకము వివర్తన జాలకముగా పని చేసి వివర్తన వ్యూహము ఏర్పడును. N వకోటి వివర్తన కోణము θ అయిన, అతిధ్వని తరంగ దైర్ఘ్యము λ_S ఏకవర్ణ కాంతి తరంగ దైర్ఘ్యము λ అయిన

$$\lambda_S = \frac{N\lambda}{\sin\theta} \text{ --------- } (1)$$



పటము 13.4

ప్రయోగపు అమరిక పటములో వలే యుండును. AB గాజు పేటికలో గల పారదర్శక ద్రవము గుండా క్వార్ట్జ్ స్ఫటికము అతిధ్వనులు జనింప చేసిన అవి పేటిక గోడల వద్ద పరావర్తనము చెంది స్థిర తరంగములనేర్పరుచును. కాలిమేటరు గుండా ప్రసరించి ఏకవర్ణ సమాంతర కాంతి పుంజము పేటిక పై లంబముగా పతనమయిన వివర్తనము చెందును. ఈ వివర్తన

వ్యూహమును దూరదర్శిని గుండా పరిశీలించిన పటములో వలే యుండును. వరుస పట్టీల మధ్య దూరము $\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ అతిధ్వనుల పౌనఃపున్యము పెరిగిన పెరుగును. సూటి ప్రతిబింబానికి, వివర్తన ప్రతిబింబానికి మధ్య కోణము θ కొలచి పై సమీకరణముతో తరంగ దైర్ఘ్యము λ_S (1)వ సమీకరణం నుంచి కనుగొనవచ్చును. λ_S విలువ తెలిసిన $v = n\lambda_S$తో వేగము కనుగొనవచ్చును.

13.6 అతిధ్వనుల ధర్మములు

1. అతిధ్వనులు అత్యంత శక్తి గల యాంత్రిక తరంగములు.
2. అతిధ్వనులు అధిక పౌనఃపున్యము గల (>2000హెర్ట్జ్) యాంత్రిక (ధ్వని) తరంగములు.
3. ధ్వని తరంగముల ధర్మములన్నింటిని అతిధ్వనులు పాటించును.
4. అతిధ్వనుల వేగము పౌనఃపున్యముపై ఆధారపడక ధ్వని వేగముతో గాలిలో ప్రయాణించును.
5. అతిధ్వనుల లంబ వితరణ అతి తక్కువ కావున అధిక దూరాలకు తీవ్రతలో మార్పు లేకుండా ప్రసారమగును.
6. కీటకముల వంటి అల్ప జీవరాశి అతిధ్వనుల పతనము వలన నశించును.

13.7 అనువర్తనములు

1. **విజ్ఞాన శోధన -** ఘన, ద్రవ, వాయు యానకములో అతిధ్వనుల వేగము, శోషణము, పౌనఃపున్యముతో కలిగే మార్పులను పరిశీలించి, వాటి నిర్మాణ ధర్మములను నిర్ణయించవచ్చును.
2. **సోనార్ వ్యవస్థ -** SONAR అనగా Sound Navigation and Ranging యొక్క సంగ్రహ అక్షర రూపము. ప్రతిధ్వని పరావర్తనము సూత్రము ఆధారముగా సముద్రము లోతు, సబ్ మెరైన్‌ల ఉనికి, సబ్‌మెరైను ప్రయాణించే దిశ, వేగము, చేపల గుంపుల ఉనికి కనుగొనవచ్చును. సముద్ర తలము నుండి అతిధ్వనులను అడుగునకు ప్రసారించిన, అవి అడుగును తాకి పరావర్తనము చెంది తిరిగి సముద్ర తలమునకు చేరుటకు పట్టు కాలము 't'ని C.R.O. గుర్తించిన, లోతు $h = \frac{vt}{2}$ సూత్రముతో కనుగొనవచ్చును. v అతి ధ్వని వేగము. ఇదే నియమము ఆధారముగా లోహపు యంత్రములలో పగుళ్ళు వంటి లోపములను గుర్తించవచ్చును.
3. **యాంత్రిక ప్రభావము -** అతి ధ్వనులను ఉక్కు వంటి లోహము పలకలను కోయుటకు రంధ్రముల తోలుచుటకు వినియోగించెదరు.
4. **మిశ్రమ లోహముల** తయారీలో, వివిధ లోహముల ఏకరీతి మిశ్రమమును ఏర్పరుచుటకు వినియోగించెదరు.
5. **రసాయన చర్యలు -** రసాయన ఆక్సిడేషన్, రిడిక్షన్ వంటి చర్యలకు అతిధ్వనులు ఉత్ప్రేరకములుగా పని చేయును. రసాయనిక చర్యల వేగము పెరుగును.
6. **జీవరాశుల పై ప్రభావము -** చిన్న ప్రాణులైన కప్పలు, ఎలుకలు, చేపలు, దోమలు మొదలైన వాటిని పారదోలడానికి లేక చంపడానికి అతిధ్వనులు ఉపయోగపడును.
7. **వైద్య రంగము -** (ఎ) కీళ్ళ నొప్పుల ఉపశమనమునకు వాడెదరు.
   (బి) శరీరములో క్యాన్సరు వ్రణములు గుర్తించుటకు నిర్మూలమునకు వాడెదరు.
   (సి) రక్త స్రావము లేకుండా శస్త్ర చికిత్సల యందు వాడెదురు.

13.8 సాధించిన సమస్యలు

1. పీడన విద్యుత్ స్ఫటికము కంపన పొడవు 3×10^{-3} మీ॥ సాంద్రత 3.5×10^{3} కి॥గ్రా॥/మీ^{3}. యంగ్ గుణకము 8×10^{10} న్యూటన్లు / మీటరు^{2}. ప్రాథమిక కంపన స్థితిలో జనించే అతిధ్వని పౌనఃపున్యము కనుగొనుము.

సాధన ప్రాథమిక పౌనఃపున్యము $n=\frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$

$\ell=3\times10^{-3}$ మీటర్లు

$Y=8\times10^{10}$ న్యూ/మీ^{2}

$\rho = 3.5\times10^{3}$ కి.గ్రా / మీ^{3}.

$$=\frac{1}{2\times3\times10^{-3}}\sqrt{\frac{8\times10^{10}}{3.5\times10^{3}}}$$

$$=\frac{1}{6\times10^{-3}}\sqrt{\frac{8\times10^{8}}{35}}=\frac{2\sqrt{2}}{6\sqrt{35}}\times10^{7}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{35}}\times10^{7}=0.0796\times10^{7}$$

$$=0.796\times10^{6}\ \text{Hz}$$

$$=0.796\ \text{MHz}$$

2. పీడన విద్యుత్ స్ఫటిక మందము 0.002 మీ॥. ధ్వని వేగము స్ఫటికములో 5750 మీ॥/సె॥ అయిన ప్రాథమిక పౌనఃపున్యము ఎంత?

సాధన పౌనఃపున్యము $n=\frac{v}{\lambda}$ కాని $\lambda = 2\times t$

కాని $t=0.002$ m, $v = 5750\ {}^{m}/_{sec}$

$$\therefore n = \frac{5750}{2\times0.002}=\frac{5750}{4\times10^{-3}}$$

$$= 1437.5\times10^{3}\ \text{Hz} = 1.437\times10^{6}\ \text{Hz}$$

$= 1.437 \text{ MHz}$

3. ఒక గబ్బిలము జనింప చేసే అతి ధ్వని తరంగ ధైర్ఘ్యము 0.011 మీ॥ గాలిలో ధ్వని తరంగ వేగం 330 మీ/సె అయిన పౌనఃపున్యము ఎంత?

సాధన : $n = \frac{v}{\lambda} = \frac{330}{0.011} = 30 \text{ KHz}$

13.9 సారాంశము

అతిధ్వనులు అధిక పౌనఃపున్యము గల ధ్వని తరంగములే వీటిని పీడన విద్యుత్, మాగ్నెటోస్ట్రిక్షన్ పద్ధతులలో జనింప చేయవచ్చును. విజ్ఞాన పరిశోధన, ఇంజనీరింగ్, వైద్య రంగములో అనేక అనువర్తనములు గలవు.

13.10 కీలక పదములు

మాగ్నెటోస్ట్రిక్షన్ (లేదా) అయస్కాంత విరూపణ, పీడన విద్యుత్ ప్రభావము, SONAR, క్వార్ట్జ్ స్పటికము, దృశా అక్షము, యాంత్రిక అక్షము, విద్యుత్ అక్షము, $X-$ ఖండిత స్పటికము, $Y-$ ఖండిత స్పటికము, ధ్వని జాలకము.

13.11 స్వయం సమీక్షా ప్రశ్నలు

లఘు ప్రశ్నలు

1. పీడన విద్యుత్ ప్రభావము, అయస్కాంత విరూపణల పై లఘుటీక వ్రాయుము.
2. క్వార్ట్జ్ స్పటిక పరంగా విద్యుత్ అక్షము, యాంత్రిక అక్షము, $X-$ ఖండిత, $Y-$ ఖండిత స్పటికములననేమి ?
3. ధ్వని జాలకము పై లఘుటీక వ్రాయుము.
4. సోనార్ (SONAR) ను వివరింపుము. ఉపయోగములు వ్రాయుము.
5. అతిధ్వనులు ధర్మములు వ్రాయుము.
6. అతిధ్వనుల శోధనము గురించి వ్రాయుము.

దీర్ఘ ప్రశ్నలు

1. అతిధ్వనులననేమి? అతిధ్వనులనుత్పత్తి చేసే రెండు పద్ధతులను వివరింపుము?
2. అతిధ్వనుల శోధనము మరియు అనువర్తనములను వివరింపుము?

అభ్యాసము

1. X ఖండిత పీడన విద్యుత్ క్వార్ట్జ్ స్పటికము మందము 0.002725 మీటర్లు. ధ్వని వేగము 5450 మీ/సె అయిన ఉత్పత్తి అయ్యే ప్రాథమిక పౌనఃపున్యము ఎంత? $(\text{Ans} : n = 1\text{MHz})$

2. క్వార్ట్జ్ స్ఫటిక మందము 2×10^{-3} మీటరు. యంగ్ గుణకము 7.9×10^{11} న్యూ/మీ^{3}. సాంద్రత 2650 కి॥గ్రా॥/మీ^{3} అయిన జనించే అతిధ్వని ప్రాథమిక పౌనఃపున్యము ఎంత? $(\text{Ans}: 1.362\,\text{MHz})$

3. 1 హెన్రీ విలువ గల ప్రేరణ చుట్టతో 10^5 Hz అతిధ్వని జనింప చేసిన, కెపాసిటర్ యొక్క కెపాసిటి విలువ ఎంత?

$\left(\text{Hint}:\ n = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\right)$ $(\text{Ans}:\ 2.5\ \rho\text{F})$

13.12 చదువవలసిన పుస్తకాలు

1. Telugu Academy Publications (భౌతికశాస్త్రము మొదటి సంవత్సరము)
2. Waves and Oscillations by S.K. Badami; V.Bala Subramanian and K. Rami Reddy (Orient Longman)
3. Waves and Oscillations - Mittal, Anand

ప్రయోగము సంఖ్య : 13ఎ

తలతన్యత – కేశనాళికారోహణ పద్ధతి

ఉద్దేశము : కేశనాళికారోహణ పద్ధతిన గది ఉష్ణోగ్రత వద్ద నీటి తలతన్యత కనుగొనుట.

పరికరములు : ఏకరీతి కేశనాళిక, చలనద్వేష్టన సూక్ష్మదర్శిని, బీకరు, రబ్బరుబ్యాండ్, వంచిన తీగ, రిటార్డు స్టాండు

సూత్రము :

$$T = \frac{\left(h + \frac{r}{3}\right) r\,dg}{2}\ \text{dynes/cm}$$

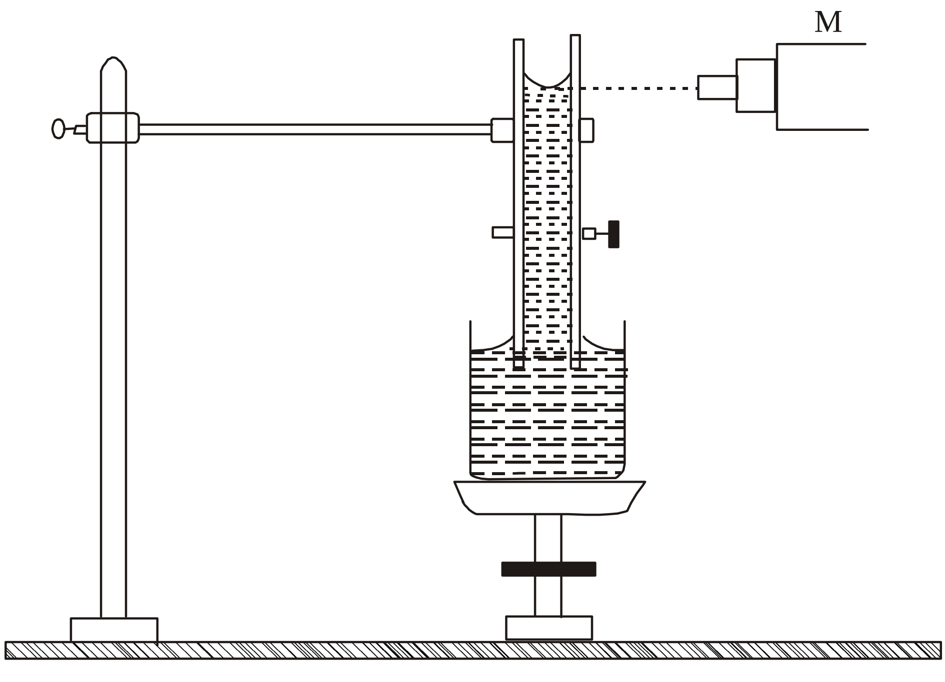
ఇక్కడ T- తలనత్యత

h - బీకరులోని నీటి మట్టము నుండి నాళికలోని ద్రవమట్టపు ఎత్తు

r - కేశనాళికా వ్యాసార్థము

d - నీటిసాంద్రత

g - గురుత్వ త్వరణము విలువ



పద్ధతి : కేశనాళికను పోటాషియం డైక్రోమేట్, నీటితో శుభ్రపరచాలి. దీనిని నిలువుగా ఒక స్టాండుకు అమర్చి, బీకరులోని నీటిలో క్రింది భాగము ముంచాలి. ఒక చిన్న తీగను వంచి, నాళికకు అమర్చి, తీగకొన బీకరులోని నీటిని తాకునట్లు అమర్చాలి. ఇప్పుడు సూక్ష్మదర్శినిలో నాళికలో ఎగబ్రాకిన నీటి చంద్రరేఖ అడుగున చూచి అడ్డుతీగను దానికి ఏకీభవింపచేసి రీడింగు తీసుకొనాలి. ఇప్పుడు బీకరును జాగ్రత్తగా

తొలగించి, ఇంతకుముందు నీటిని తాకిన తీగ అంచును సూక్ష్మదర్శినిలో చూచి, దాని రీడింగ్‌ను తీసుకొనవలెను. ఈ రెండు రీడింగుల తేడా, ఎగబ్రాకిన నీటి ఎత్తు 'h'ని తెలియజేయును.

ఇప్పుడు కేశనాళికను క్షితిజ సమాంతరముగా అమర్చి, దాని రంధ్రమును సూక్ష్మదర్శినిలో చూచి రెండు లంబదిశలలో వ్యాసములను కొలిచి, సరాసరి వ్యాసార్థమును లెక్కించాలి. విలువలను సూత్రములో ప్రతిక్షేపించి, తలతన్యత లెక్కించాలి.

పరిశీలనలు :

సూక్ష్మదర్శిని కనీసపు కొలత = ...

నీటి సాంద్రత (d) = ...

చంద్రరేఖ వద్ద సూక్ష్మదర్శిని రీడింగు $\left(R_1\right)$ = ...

తీగ కొన వద్ద సూక్ష్మదర్శిని రీడింగు $\left(R_2\right)$ = ...

కేశనాళికలో ఆరోహణము $(h) = R_1 \sim R_2 =$ ....cm

పట్టిక

కేశనాళిక వ్యాసార్థమును కనుగొనుట

వ.సంఖ్య	సూక్ష్మదర్శినిలో అడ్డుతీగల స్థానము	సూక్ష్మదర్శిని రీడింగ్			రంధ్రము వ్యాసము
		M.S.R.	V.C	M.S.R. + (V.C × L.C.)	
1					
2					
3					
4					

సరాసరి వ్యాసము (2r) =..

సరాసరి వ్యాసార్థము(r) = ...

ఫలితము : నీటి తలతన్యత (గది ఉష్ణోగ్రత వద్ద) = ... డైన్/సెం.మీ.

జాగ్రత్తలు :

1. తీగ అంచు ఖచ్చితముగా ఉపరితలము తాకాలి.
2. కేశనాళిక నిలువుగా ఉండాలి.
3. కేశనాళిక శుభ్రముగా ఉండాలి.

ప్రయోగము సంఖ్య - 13బి

తలతన్యత – బిందు పద్ధతి

ఉద్దేశం : బిందు పద్ధతి ద్వారా నీటి తలతన్యత కనుగొనుట.

పరికరములు : గరాట, రబ్బరు గొట్టము, కేశనాళిక, పించ్-కాక్, రిటార్డ్ స్టాండు, బీకరు, సున్నితపుత్రాసు, చలన సూక్ష్మదర్శిని

సూత్రము : $T = \frac{mg}{3.8r}$ dynes/cm

T - తలతన్యత (గది ఉష్ణోగ్రత)

r - కేశనాళికా వ్యాసార్థము

m - ఒక నీటి బిందువు ద్రవ్యరాశి

g - గురుత్వ త్వరణం

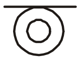
పద్ధతి : ఇచ్చిన ఖాళీ బీకరు ద్రవ్యరాశిని m_1గా కనుగొనవలెను. కేశనాళికను నిలువుగా ఉంచి దానిపైన గరాటాను ఉంచి గరాటాలో పోసిన నీరు కేశనాళిక గుండా బిందువులుగా పడునట్లు పించ్-కాక్‌ను అమర్చవలెను. n బిందువులు పడుటకు పట్టు కాలము 10 నిముషములుగా తీసుకొని నీరు చిందకుండా బీకరులో పట్టవలెను. ఇప్పుడు తుది ద్రవ్యరాశిని m_2గా గుర్తించవలెను. $m_2 - m_1$ విలువ n బిందువుల ద్రవ్యరాశిని ఇస్తుంది. దాని నుంచి ఒక్కొక్క బిందువు సగటు ద్రవ్యరాశి $\frac{m_2 - m_1}{n}$ గా లెక్కించాలి.

ఇప్పుడు కేశనాళికను క్షితిజ సమాంతరంగా ఉంచి సూక్ష్మదర్శిని ద్వారా దాని వెలుపలి వ్యాసార్థమును లెక్కించవలెను. పైన కనుగొనిన m, r విలువలను సూత్రంలో ప్రతిక్షేపించి T విలువను కనుగొనవచ్చును.

పట్టిక - 1 : బిందు ద్రవ్యరాశిని కనుగొనుటకు

వ.సంఖ్య	బిందువుల సంఖ్య(n)	నీటిలో బీకరు బరువు(m_2) $(m_2 - m_1)$	ఖాళీ బీకరు ద్రవ్యరాశి= m_1గ్రా ఒక్కొక్క బిందువు ద్రవ్యరాశి $m = \frac{(m_2 - m_1)}{n}$	తలతన్యత $T = \frac{mg}{3.8r}$

పట్టిక - 2 : కేశనాళిక బాహ్య వ్యాసార్థమును కనుగొనుటకు

వరుస సంఖ్య	అడ్డుతీగల స్థానం	మైక్రోస్కోప్ రీడింగు			వ్యాసము d
		M.S.R.	V.C.	M.S.R. + (V.C $\times$ L.C.)	
	 1				$1 \sim 2$ d_1
	 2				
	 3				$3 \sim 4$ d_2
	4 				

సగటు వ్యాసము = $\frac{d_1 + d_2}{2} = d$

సగటు వ్యాసార్థము = $\frac{d}{2}$

ఫలితము : నీటి తలతన్యత $T =$ $\qquad$ dyne / cm

జాగ్రత్తలు : 1. కేశనాళిక నిట్టనిలువుగా అమర్చవలెను.

2. బిందువుకి, బిందువుకి మధ్య కొంత కాలవ్యవధిని ఇచ్చి బిందువులను బీకరులో పెట్టవలెను.

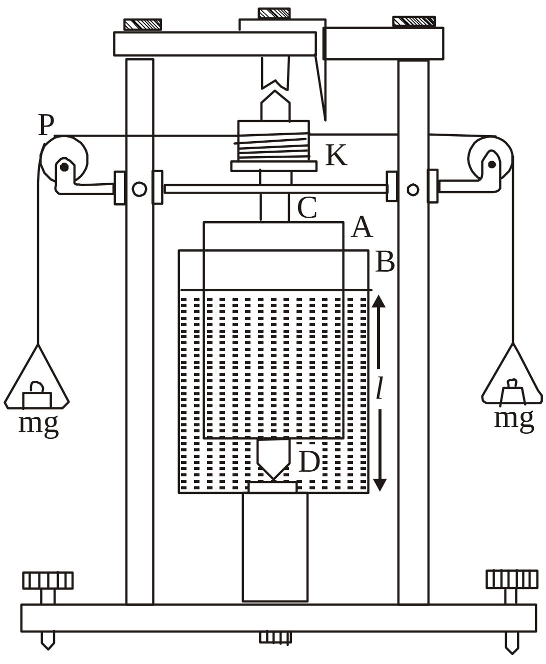
ప్రయోగము సంఖ్య - 14

సెరల్ స్నిగ్ధతా మాపకము

ఉద్దేశము : ఆముదము వంటి అధిక స్నిగ్ధత గల ద్రవము యొక్క స్నిగ్ధతా గుణకమును సెరల్ స్నిగ్ధతా మాపకమునుపయోగించి కనుగొనుట.

పరికరములు : సెరల్ స్నిగ్ధతా మాపకము, సున్నితపుత్రాసు, బరువులు, ఆపు గడియారము, వెర్నియర్‌కాలిపర్స్.

వర్ణన : ఈ పరికరములో ఒకే అక్షము పరంగా ఉండే రెండు స్తూపాలు ఉంటాయి. లోపలి స్తూపము తన ఇరుసు పరముగా తిరుగుటకు వీలుగా చుట్టి కొనలు కప్పీల పై నుంచి పంపి, బరువులు వ్రేలాడదీయవచ్చును. ఆ బరువులు బలయుగ్మభ్రామకము కలుగజేసి లోపలి స్తూపము తిరుగుతుంది. లోపలి, వెలుపలి స్తూపముల మధ్య ఖాళీ ప్రదేశము ఉండి, దానిలో స్నిగ్ధతాగుణకము కనుగొనవలసిన ద్రవముతో నింపుతారు. ద్రవమట్టమును స్కేలు ద్వారా తెలుసుకొనవచ్చును. లోపలి స్తూపమును పైకి, క్రిందికి జరుపుతూ కావలసిన స్థానములో ఉంచవచ్చును. ద్రవమట్టమును గాజు కిటికీ నుండి చూడవచ్చును.



పద్ధతి : స్తూపముల మధ్య ప్రదేశమును ద్రవముతో నింపవలెను. లోపలి స్తూపము మునిగిన పొడవును కావలసిన విలువకు సరిచేయవలెను. రెండు పళ్ళెములలో సమానమైన బరువులను వేసి, దారమును డ్రమ్‌పై కొన్ని చుట్ల సంఖ్యకు చుట్టి, పైన మరతో బిగించవలెను. ఇప్పుడు పళ్ళెములు భూమి నుంచి ఎత్తులో ఉండును. డ్రమ్‌ను వదలగానే, బరువుల వలన లోపలి స్తూపము భ్రమణం చెందుతూ, డ్రమ్‌పై చుట్టబడిన

చుట్లు విప్పుకొనుచు, బరువులు పూర్తిగా క్రిందికి జారును. దీనికి పట్టుకాలమును ఆపు గడియారము ద్వారా కనుగొనవలెను. వెలుపలి స్తూపము స్థానము మారుస్తూ, లోపలి స్తూపము ద్రవములో మునిగిన వివిధ పొడవులకు పై ప్రయోగమును చేసి పట్టికలో పొందుపరచవలెను.

లోపలి, వెలుపలి స్తూపముల వ్యాసార్థములను వెర్నియర్ కాలిపర్స్‌తో, పళ్ళెముల బరువులను సున్నితపు త్రాసుతో కొలవవలెను.

పరిశీలనలు :

1. లోపలి స్తూపము వ్యాసార్థము (a) =
2. వెలుపలి స్తూపము వ్యాసార్థము (b) =
3. డ్రమ్ వ్యాసము (d) =
4. గ్రాఫ్ నుండి పొందిన సవరణ (k) =
5. డ్రమ్‌పై దారము చుట్ల సంఖ్య (n) =
6. పళ్ళెము + దానిలోని బరువులు (m) =

వ.సంఖ్య	చుట్ల సంఖ్య (n)	ద్రవములో మునిగిన స్తూపము పొడవు (ℓ)	వేసిన బలము (m)	కాలము			$t_0 = \frac{t}{n}$	$\frac{mt_0}{\ell + K}$
				1వసారి (t_1)	2వసారి (t_2)	సరాసరి $t = \left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)$		

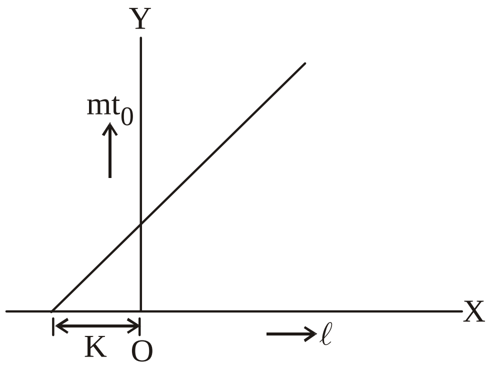
'ℓ ' ను X- అక్షముపైన, mt_0ను - Y - అక్షముపైన తీసుకొని గ్రాఫ్ గీచిన అది సరళరేఖ. X- అక్షముపై అంతర ఖండము 'K' ఇస్తుంది.

$$\text{స్నిగ్ధతా గుణకము } \eta = \frac{gd\left(b^2 - a^2\right)}{8\pi^2 a^2 b^2}\left(\frac{mt_0}{\ell + K}\right)$$

గమనిక : K విలువ లెక్కించకుండా η కనుగనుటకు

$$\eta = \frac{gd\left(b^2 - a^2\right)m}{8\pi^2 a^2 b^2}\left(\frac{t_2 - t_1}{\ell_2 - \ell_1}\right)$$

ఇక్కడ t_2, t_1లు, ℓ_2, ℓ_1 పొడవులకు పట్టు కాలములు.



ఫలితము : ఇచ్చిన ద్రవము స్నిగ్ధతా గుణకము (η) =

జాగ్రత్తలు : 1. కాలము గుర్తించుటకు వీలైన బరువులు వేయవలెను.

2. అధిక స్నిగ్ధత గల ద్రవములను మాత్రమే ఉపయోగించవలెను.

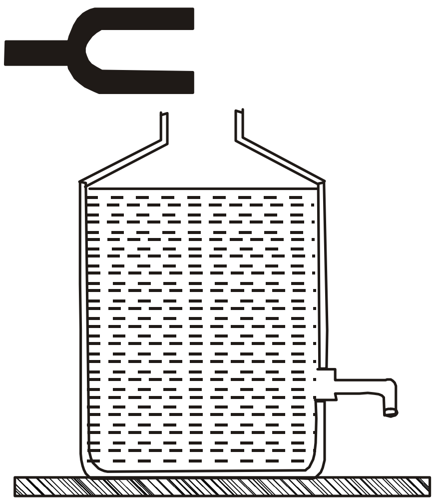
ప్రయోగము సంఖ్య - 15

ఘనపరిమాణ అనునాద పరికరము

ఉద్దేశము : వాయువు ఘనపరిమాణమునకు, దానిలో అనునాదము కలుగజేయు ధ్వని పౌనఃపున్యమునకు మధ్య సంబంధమును నిర్ధారించుట.

పరికరములు : ఆస్పిరేటర్ బాటిల్, తెలిసిన పౌనఃపున్యములు గల వివిధ శృతిదండములు, కొలమాన పాత్ర.

వర్ణన : ఒకటి నుండి రెండు లీటర్ల కెపాసిటీ గలిగి, అడుగు భాగమునకు దగ్గరగా చిన్న రంధ్రము గల, ఒక ఆస్పిరేటర్ బాటిల్ని ఘనపరిమాణ అనునాద పరికరము అందురు. ఆ రంధ్రమునకు ఒక రబ్బరు కార్కును బిగించి, దానిలో చిన్న గాజు గొట్టమును బిగిస్తారు. గాజు గొట్టమునకు రబ్బరు గొట్టము తొడిగి, దానికి పించ్కాక్ అమరుస్తారు. ఆస్పిరేటర్ బాటిల్ను పూర్తిగా నింపి, పించ్కాక్ను వదులు చేయుట ద్వారా, సరిపోయిన నీటిని తొలగించి, కావలసిన వాయుఘనపరిమాణమును పాత్రలో పొందవచ్చును.



సిద్ధాంతము : ఘనపరిమాణ అనునాదిని లో గాలి యొక్క సహజ పౌనఃపున్యమునకు సూత్రము.

$$n = \frac{V}{2\pi}\sqrt{\frac{A}{vL}}$$

V = గాలిలో ధ్వనివేగము,

v = సీసా మెడవరకు అనునాదములో ఉన్న కంపించుచున్న వాయువు ఘనపరిమాణము

A = మెడ పొడవు

L = మెడ అడ్డుకోత వైశాల్యము.

ఒక బాటిల్‌కి V, A, L లు స్థిరరాశులు.

అయితే బాటిల్ మూతి వద్ద 'C' కొన సవరణను తీసుకొనవలయును.

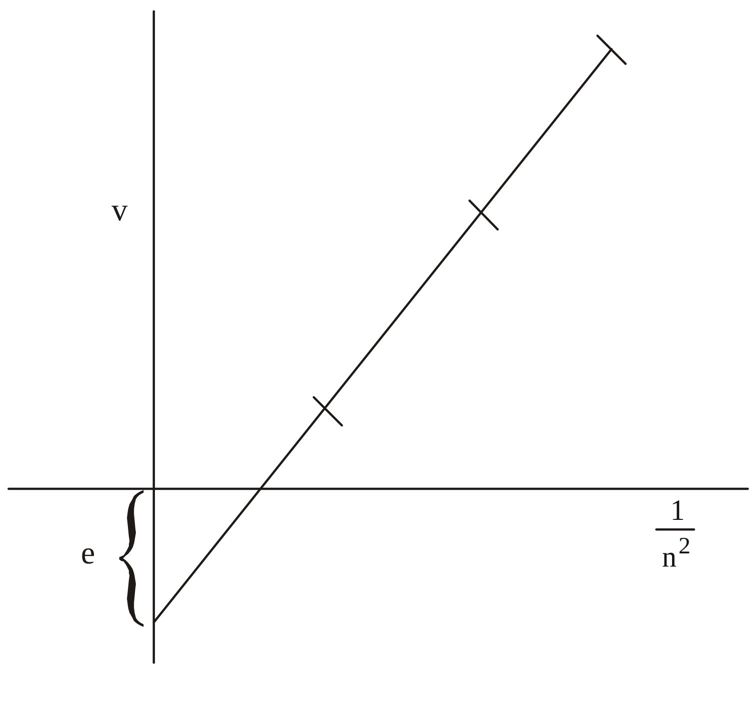
అప్పుడు $n^2(v+e) =$ స్థిరము.

ఈ సంబంధమును ప్రయోగాత్మకముగా నిర్ధారించవలెను.

పద్ధతి : పించ్‌కాక్‌ను మూసివేసి, బాటిల్ మెడవరకు నీటిని నింపాలి. ఒక శృతిదండమును కంపింపజేసి, మెడపైన దాని భుజములు సీసాకు తగులకుండా క్షితిజ సమాంతరముగా ఉంచాలి. పించ్‌కాక్‌ను తెరచి, నెమ్మదిగా నీటిని బయటకు వదలాలి. సీసాలో గాలి ఘనపరిమాణము కొంత విలువ చేరుసరికి బిగ్గరగా ధ్వని పించును. అనగా అక్కడ అనునాదము కలిగినది. ఆ గాలి ఘనపరిమాణము, విడుదలైన నీటి ఘనపరిమాణమునకు సమానము. దానిని కొలవవలెను. ఒక్కొక్క శృతిదండముతో రెండుసార్లు కొలచి, సగటు ఘనపరిమాణము (v) లెక్కించవలెను.

ప్రయోగములను వివిధ శృతిదండములతో చేసి, రీడింగులను పట్టికలో పొందుపరచవలెను. అలాగే ఒక తెలియని శృతిదండముతో దాని అనునాద, ఘనపరిమాణమును కొలవవలెను.

$1/n^2$ ను X - అక్షం మీద, v ని Y - అక్షం మీద తీసుకొని గ్రాఫ్ గీచిన, అది సరళరేఖ వలే వచ్చును. ఋణ Y - అక్షముపై సరళరేఖ అంతరఖండము, కొనసవరణ(e) విలువలను తెలియచేయును. ఈ విలువతో $n^2(v+e)$ లెక్కించవలెను. గ్రాఫ్ నుంచి తెలియని పౌనఃపున్యమును కనుగొనవలెను.



పట్టిక

వ.సంఖ్య	శృతిదండము పౌనఃపున్యము (n)	అనునాద వాయువు ఘనపరిమాణము(v)			$\frac{1}{n^2}$	$n^2(v+e)$ = స్థిరము
		1వసారి	2వసారి	3వసారి		

ఫలితము :

1. వాయువు సహజ పౌనఃపున్యమునకు, దాని ఘనపరిమాణమునకు మధ్య సంబంధము నిర్ధారించడమైనది.

$n^2(v+e) =$ స్థిరరాశి

2. తెలియని శృతిదండ పౌనఃపున్యము () = ... హెర్ట్జ్

జాగ్రత్తలు :

1. శృతిదండము సీసాను తాకరాదు.
2. శృతిదండ భుజములు క్షితిజ సమాంతరముగా పట్టుకొనవలెను.
3. గరిష్ట ధ్వని తీవ్రత వద్ద ఘనపరిమాణము తీసుకొనవలెను.

ప్రశ్నలు

1. అనునాదము అనగానేమి ?

జవాబు : ఒక కంపన వ్యవస్థ సహజ పౌనఃపున్యము, బాహ్య అనువర్తిత ఆవర్తన బలపౌనఃపున్యమునకు సమానమైనపుడు, వ్యవస్థ గరిష్ట కంపన పరిమితితో కంపించును. దీనిని అనునాదము అందురు. ఇది బలాత్కృత డోలనములు. ఒక ప్రత్యేక సందర్భము.

2. ఘనపరిమాణ అనునాదము అనగానేమి ?

జవాబు : కంపించే వాయుస్తంభము సహజ పౌనఃపున్యము, ఒక శృతి దండ పౌనఃపున్యమునకు సమానమైనపుడు బిగ్గరగా ధ్వని వినిపించును. దీనిని ఘనపరిమాణ అనునాదము అందురు.

3. అనునాదము వద్ద వాయువు ఘనపరిమాణము, శృతిదండ పౌనఃపున్యముపై ఎలా ఆధారపడును.

జవాబు : ఘనపరిమాణము, పౌనఃపున్య వర్గమునకు విలోమానుపాతము.

4. ఘనపరిమాణ అనునాదినిలో ఏర్పడు తరంగములు ఏ రకము?

జవాబు : అనుధైర్ఘ్య స్థిర తరంగములు. సీసా మూతి వద్ద ప్రస్పందన స్థానము; నీటి తలము వద్ద అస్పందన స్థానము కలుగును.

5. ప్రయోగములో కొలుచు ఘనపరిమాణము మెడక్రింది నుంచి కొలవబడును. మెడ ఘనపరిమాణమును ఉపేక్షించరాదు. అదియును గాక ప్రస్పందన స్థానము సీసా అంచున కాక, కొద్దిగా పైన కలుగును. వీటిని పరిగణనలోనికి తీసుకొనుటకు 'కొనసవరణ' అవసరము.